2023 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai

Artūras Dubickas[1]

71-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Kaunas, 2023 04 21

`1 (9-12 klasės).` Raskite visas funkcijas $f(x)$, apibrėžtas sveikųjų skaičių aibėje ir įgyjančias sveikąsias reikšmes, kurios tenkina lygybę

$$f(x+y)+f(xy)=f(x)f(y)+1$$

su visais sveikaisiais x ir y.

Sprendimas. Įrašykime į duotąją lygybę $x=y=0$. Gausime $2f(0)=f(0)^2+1$, todėl $(f(0)-1)^2=0 \implies f(0)=1$. Įrašę $x=1$ ir $y=-1$, gauname $f(0)+f(-1)=f(1)f(-1)+1$, taigi $f(-1)=f(1)f(-1)$. Vadinasi, $f(-1)=0$ arba $f(1)=1$. Tarkime, kad $f(1)=1$. Įrašykime į duotąją lygybę $y=1$. Gausime, kad $f(x+1)+f(x)=f(x)+1 \implies f(x+1)=1$. Vadinasi, $f(x)=1$ su visais $x\in\mathbb{Z}$. Akivaizdu, kad ši funkcija tenkina duotąją lygybę su visais $x,y\in\mathbb{Z}$.

Išnagrinėsime atvejį, kai $f(1)\neq 1$. Tada $f(-1)=0$. Įrašydami dvi poras $(x,y)=(2,-1)$ ir $(x,y)=(-2,1)$, gauname $f(1)+f(-2)=f(2)f(-1)+1=1$ ir $f(-2)=f(-2)f(1)+1$. Taigi $1=f(-2)(1-f(1))=(1-f(1))^2$. Iš čia išplaukia, kad $-2f(1)+f(1)^2=0$, todėl $f(1)=0$ arba $f(1)=2$.

Tarkime, kad $f(1)=2$. Įrašę $y=1$, gausime $f(x+1)+f(x)=2f(x)+1$. Vadinasi, $f(x+1)-f(x)=1$. Pažymėkime $g(x)=f(x)-x$. Tada $g(1)=1$ ir $g(x+1)+x+1-g(x)-x=1 \implies g(x+1)=g(x)$. Vadinasi, $g(x)=1$ su visais $x\in\mathbb{Z}$, todėl $f(x)=g(x)+x=x+1$ su visais $x\in\mathbb{Z}$. Iš tapatybės $x+y+1+xy+1=(x+1)(y+1)+1$ matome, kad gautoji funkcija $f(x)=x+1$ taip pat tenkina duotąją lygybę su visais $x,y\in\mathbb{Z}$.

Belieka išnagrinėti atvejį $f(1)=0$. Įrašę $y=1$, gausime $f(x+1)+f(x)=1$. Pakeitę x į $x+1$, gauname $f(x+2)+f(x+1)=1$, taigi $f(x+2)=f(x)$ su visais $x\in\mathbb{Z}$. Kadangi $f(0)=1$ ir $f(1)=0$, tai $f(x)=1$ su visais lyginiais

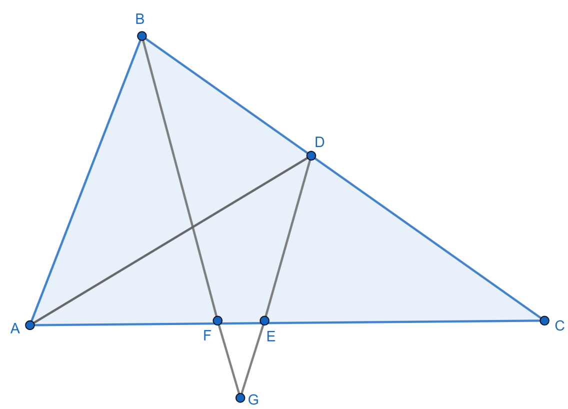
[1]Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Matematikos institutas, Naugarduko 24, Vilnius LT-03225. `http://www.mif.vu.lt/~dubickas/`

$x \in \mathbb{Z}$ ir $f(x) = 0$ su visais nelyginiais $x \in \mathbb{Z}$. Šią funkciją galima užrašyti taip pat ir formule $f(x) = \frac{1+(-1)^x}{2}$, $x \in \mathbb{Z}$. Įsitikinsime, jog ši funkcija tenkina duotąją lygybę su visais $x, y \in \mathbb{Z}$. Iš tikrųjų, jei bent vienas iš skaičių x, y yra nelyginis, tai dešinioji jos pusė, $f(x)f(y) + 1$, yra lygi 1. Kairioji jos pusė, $f(x+y) + f(xy)$, taip pat lygi 1, nes skaičiai $x + y$ ir xy yra skirtingo lyginumo. Vadinasi, lygybė galioja. Kita vertus, jei abu skaičiai x ir y yra lyginiai, tai abi duotosios lygybės pusės yra lygios 2, todėl ji taip pat galioja. Taigi funkcija $f(x) = \frac{1+(-1)^x}{2}$ tikrai tenkina duotąją lygybę su visais $x, y \in \mathbb{Z}$.

Atsakymas: $f(x) = 1$, $f(x) = x + 1$ arba $f(x) = \frac{1+(-1)^x}{2}$ su visais $x \in \mathbb{Z}$.

`2 (9-10 klasės).` Trikampio ABC kraštinėse BC ir AC pažymėti tokie taškai D ir E, kad AD yra trikampio pusiaukampinė, o $CD = CE$. Tiesė DE ir kampo ABC pusiaukampinė kertasi taške G. Įrodykite, kad $AG = DG$.

Sprendimas. Pažymėkime $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ ir $\angle BCA = \gamma$. Tegul BF yra trikampio ABC pusiaukampinė, taigi taškas F priklauso tiesei BG.



Kadangi trikampis CDE yra lygiašonis, tai $\angle CDE = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. Be to, iš trikampio ABD gauname $\angle BDA = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta$. Vadinasi,

$$\angle ADE = 180^\circ - \angle BDA - \angle CDE = 180^\circ - 180^\circ + \frac{\alpha}{2} + \beta - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2} = \angle ABF.$$

Iš $\angle ADG = \angle ADE = \angle ABF = \angle ABG$ išplaukia, kad taškai A, B, D ir G priklauso vienam apskritimui. Iš kampų lygybės $\angle ABG = \angle GBD = \frac{\beta}{2}$ gauname, kad ir atitinkamos to apskritimo stygos AG ir DG turi būti lygios.

`3 (9-10 klasės).` Seka, sudaryta iš raidžių A ir B, yra vadinama *paprasta*, jei joje iš eilės einančių raidžių A fragmentų ilgiai yra lyginiai, o iš eilės einančių raidžių B fragmentų ilgiai – nelyginiai. (Pavyzdžiui, sekos AA, BBB, $AAAABAA$ ir $AABBBAA$ yra paprastos, tačiau seka $BBAAB$ nėra paprasta.)

Kiek yra paprastų sekų, kurių ilgis lygus 15?

Sprendimas. Tarkime, kad yra a_n paprastų sekų, kurių ilgis n ir kurios baigiasi raide A, ir b_n paprastų sekų, kurių ilgis n ir kurios baigiasi raide B. Aišku, kad $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $a_2 = 1$ ir $b_2 = 0$. Tegul $n \geqslant 3$. Nagrinėsime paprastas sekas, kurių ilgiai yra lygūs n. Kiekvienos tokios sekos, kuri baigiasi raide A, abi paskutinės raidės turi būti A, o pirmosios $n-2$ raidės gali sudaryti bet kokią paprastą seką. Vadinasi,

$$a_n = a_{n-2} + b_{n-2}.$$

Kita vertus, jei tokia seka baigiasi raide B, tai ji yra sudaryta arba iš $n-1$ ilgio paprastos sekos besibaigiančios raide A (ir tos paskutinės raidės B), arba iš $n-2$ ilgio paprastos sekos, kuri baigiasi raide B, bei dviejų paskutiniųjų raidžių B. Vadinasi,

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-2}.$$

Naudodamiesi šiais rekurentiniais sąryšiais, užpildome lentelę iki $n = 15$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	0	1	1	1	3	2	6	6	11	16	22	37	49	80	113
b_n	1	0	2	1	3	4	5	10	11	21	27	43	64	92	144

Iš lentelės matome, kad iš viso yra $a_{15} + b_{15} = 113 + 144 = 257$ paprastos sekos, kurių ilgis lygus 15.

Atsakymas: 257.

`4 (9-10 klasės).` Raskite visas sveikųjų skaičių poras (a, b), su kuriomis galioja lygybė

$$3a^2 + 3b^2 - 7a - 7b + 4 = 0.$$

Sprendimas. Padauginę abi lygybės puses iš 12, gauname

$$36a^2 + 36b^2 - 84a - 84b + 48 = (6a-7)^2 + (6b-7)^2 - 50 = 0.$$

Taigi duotoji lygybė yra ekvivalenti lygybei

$$(6a-7)^2 + (6b-7)^2 = 50.$$

Nesunku įsitikinti, kad 50 dviejų sveikųjų skaičių kvadratų suma užrašomas tik kai vienas iš tų skaičių yra lygus ± 1, o kitas ± 7 (tada $50 = 1 + 49$), arba kai abu skaičiai yra ± 5 (tada $50 = 25+25$). Be to, skaičius $6a-7$ negali būti lygus $1, 7$ ir -5, nes tada $6a = 8$, 14 arba 2, tačiau skaičiai $8, 14$ ir 2 nesidalija iš 6. Analogiškai, skaičius $6b-7$ taip pat negali būti lygus $1, 7$ ir -5.

Vadinasi, visi galimi variantai yra tokie: $6a-7 = -1$, $6b-7 = -7$, arba $6a-7 = -7$, $6b-7 = -1$, arba $6a-7 = 6b-7 = 5$. Iš čia gauname tris poras $(a,b) = (1,0)$, $(0,1)$ ir $(2,2)$. Akivaizdu, kad visos trys poros tenkina lygybę $(6a-7)^2 + (6b-7)^2 = 50$. Vadinasi, jos tenkina ir duotąją lygybę.

Atsakymas: $(a,b) = (1,0)$, $(0,1)$ ir $(2,2)$.

`5 (11-12 klasės).` Įrodykite, kad į šešiakampį $ABCDEF$, kuriame $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$ ir $\angle A = \angle C = \angle E$, galima įbrėžti apskritimą.

Sprendimas. Nubrėžkime šešiakampio kampų prie viršūnių B, D ir F pusiaukampines. Kadangi trikampiai ABC, CDE, EFA yra lygiašoniai, tai šios pusiaukampinės yra atkarpų AC, CE, EA vidurio statmenys. Vadinasi, jos kertasi taške G, kuris yra trikampio ACE apibrėžtinio apskritimo centras. Trikampiai GAC, GCE ir GEA yra lygiašoniai, todėl $\angle GAC = \angle ACG$, $\angle GCE = \angle CEG$ ir $\angle GEA = \angle EAG$. Vadinasi,

$$\angle BAG = \angle BAC + \angle GAC = \angle BCA + \angle ACG = \angle BCG.$$

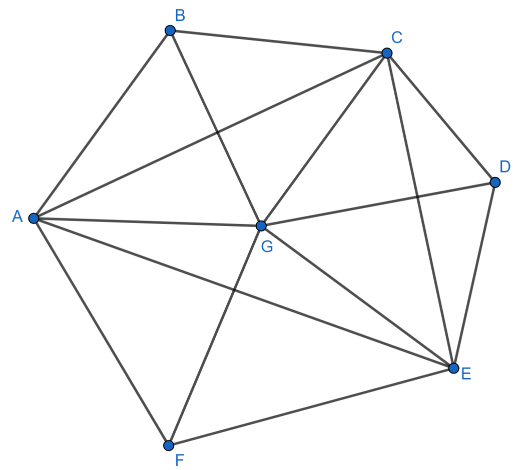
Analogiškai gauname, kad $\angle GCD = \angle DEG$ ir $\angle GEF = \angle FAG$. Kadangi šešiakampio kampai prie viršūnių A ir C yra lygūs, tai

$$\angle FAG + \angle BAG = \angle FAB = \angle BCD = \angle BCG + \angle GCD,$$

ir todėl $\angle FAG = \angle GCD$.

Vadinasi,

$$\angle GEF = \angle FAG = \angle GCD = \angle DEG,$$



todėl EG yra kampo DEF (arba šešiakampio kampo prie viršūnės E) pusiaukampinė. Analogiškai, AG ir CG yra šešiakampio kampų prie viršūnių A ir C pusiaukampinės. Įrodėme, kad visos šešios šešiakampio $ABCDEF$ kampų pusiaukampinės kertasi taške G. Vadinasi, taškas G yra vienodai nutolęs nuo visų šešiakampio kraštinių ir todėl jis yra į šį šešiakampį įbrėžto apskritimo centras.

`6 (11-12 klasės).` Netuščią natūraliųjų skaičių aibę vadinsime *puikia*, jei joje nėra tokių (nebūtinai skirtingų) skaičių a, b, c, su kuriais galiotų lygybė $a^b = c$. (Pavyzdžiui, aibė $\{2, 3\}$ yra puiki, o aibė $\{2, 3, 9\}$ nėra puiki, nes $3^2 = 9$.) Raskite didžiausią natūralųjį skaičių $n \geqslant 3$, su kuriuo aibė $\{2, 3, 4, \ldots, n\}$ yra dviejų puikių aibių sąjunga.

Sprendimas. Įrodysime, kad su kiekvienu $n \geqslant 2^{16}$ aibė $\{2, 3, 4, \ldots, n\}$ nėra dviejų puikių aibių sąjunga. Iš tiesų, tarkime, kad ji yra kokių nors puikių aibių S ir T sąjunga. Neprarasdami bendrumo, galime laikyti, kad $2 \in S$. Tada $4 = 2^2 \notin S$, todėl $4 \in T$. Iš $2^8 = 4^4 \notin T$ išplaukia, kad $2^8 \in S$. Vadinasi, $2^{16} = (2^8)^2 \in T$. Tačiau jei $8 = 2^3 \in T$, tai $4^8 = 2^{16}$ (čia $4, 8, 2^{16} \in T$), prieštara, o jei $8 \in S$, tai $2^8 = 2^8$ (čia $2, 8, 2^8 \in S$), vėl prieštara. Vadinasi, didžiausias ieškomas skaičius $n` neviršija $2^{16} - 1$.

Kita vertus, aibė $\{2, 3, 4, \ldots, 2^{16} - 1\}$ yra aibių $S = \{4, 5, 6, \ldots, 2^8 - 1\}$ ir $T = \{2, 3, 2^8, 2^8 + 1, 2^8 + 2, \ldots, 2^{16} - 1\}$ sąjunga. Įrodysime, kad jos abi yra puikios. Tarkime, kad $a, b, c \in S$ ir $a^b = c$. Tada $2^8 > c = a^b \geqslant 4^4 = 2^8$, prieštara, todėl aibė S yra puiki. Kita vertus, jei $a, b, c \in T$ ir $a^b = c$, tai $c \geqslant 4$, todėl $2^8 \leqslant c < 2^{16}$. Iš čia matome, kad $a = \sqrt[b]{c} \leqslant \sqrt{c} < 2^8$, taigi $a \in \{2, 3\}$. Kadangi $3^3 < 2^8$, tai $b \notin \{2, 3\}$. Vadinasi, $b \geqslant 2^8 = 256$ ir gauname $2^{16} > c = a^b \geqslant 2^{256}$, prieštara, todėl T yra puiki aibė. Vadinasi, aibė $\{2, 3, 4, \ldots, 2^{16} - 1\}$ tikrai yra dviejų puikių aibių S ir T sąjunga, taigi didžiausias ieškomas natūralusis skaičius n yra lygus $2^{16} - 1$.

Atsakymas: $n = 2^{16} - 1$.

`7 (11-12 klasės).` Pasinaudojęs skaičiuotuvu, Linas nustatė, kad skaičiai 4^{52} ir 5^{52} prasideda skaitmeniu 2, o skaičiai 4^{11} ir 5^{11} prasideda skaitmeniu 4. Remdamasis savo skaičiavimais, jis tvirtina, kad jei su kokiu nors natūraliuoju n abu skaičiai 4^n ir 5^n prasideda skaitmeniu a, tai $a = 2$ arba $a = 4$. Ar Linas teisus?

Sprendimas. Įrodysime, kad Linas teisus. Tarkime, kad abu skaičiai 4^n ir 5^n prasideda skaitmeniu a, kur $a \in \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Tada $n \geqslant 2$ ir egzistuoja tokie $m, \ell \in \mathbb{N}$, kad $a10^m \leqslant 4^n < (a + 1)10^m$ ir $a10^\ell \leqslant 5^n < (a + 1)10^\ell$. Be to, čia $a10^m \neq 4^n$, nes $a10^m$ dalijasi iš 5, o 4^n nesidalija, bei $a10^\ell \neq 5^n$, nes $a10^\ell$ yra lyginis skaičius, o 5^n – nelyginis. Sudauginę griežtas nelygybes $a10^m < 4^n < (a + 1)10^m$ ir dukart $a10^\ell < 5^n < (a + 1)10^\ell$, gausime

$$a^3 10^{m+2\ell} < 4^n \cdot 5^n \cdot 5^n = 10^{2n} < (a + 1)^3 10^{m+2\ell}.$$

Padalinę iš $10^{m+2\ell}$, gauname

$$1 \leqslant a^3 < 10^{2n-m-2\ell} < (a + 1)^3 \leqslant (9 + 1)^3 = 10^3,$$

todėl $0 < 2n - m - 2\ell < 3$. Vadinasi, $2n - m - 2\ell = 1$ arba $2n - m - 2\ell = 2$. Tačiau jei $2n - m - 2\ell = 1$, tai $a^3 \leqslant 10 < (a + 1)^3 \implies a = 2$, prieštara, o jei $2n - m - 2\ell = 2$, tai $a^3 \leqslant 100 < (a + 1)^3 \implies a = 4$, vėl prieštara.

Atsakymas: Linas teisus.