

71-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Kaunas, 2023 04 21

9–10 klasės

1. Raskite visas funkcijas  $f(x)$ , apibrėžtas sveikųjų skaičių aibėje ir įgyjančias sveikąsias reikšmes, kurios tenkina lygybę

$$f(x + y) + f(xy) = f(x)f(y) + 1$$

su visais sveikaisiais  $x$  ir  $y$ .

2. Trikampio  $ABC$  kraštinėse  $BC$  ir  $AC$  pažymėti tokie taškai  $D$  ir  $E$ , kad  $AD$  yra trikampio pusiaukampinė, o  $CD = CE$ . Tiesė  $DE$  ir kampo  $ABC$  pusiaukampinė kertasi taške  $G$ . Įrodykite, kad  $AG = DG$ .
3. Seka, sudaryta iš raidžių  $A$  ir  $B$ , yra vadinama *paprasta*, jei joje iš eilės einančių raidžių  $A$  fragmentų ilgiai yra lyginiai, o iš eilės einančių raidžių  $B$  fragmentų ilgiai – nelyginiai. (Pavyzdžiui, sekos  $AA$ ,  $BBB$ ,  $AAAABAA$  ir  $AABBBAA$  yra paprastos, tačiau seka  $BBAAB$  nėra paprasta.)

Kiek yra paprastų sekų, kurių ilgis lygus 15?

4. Raskite visas sveikųjų skaičių poras  $(a, b)$ , su kuriomis galioja lygybė

$$3a^2 + 3b^2 - 7a - 7b + 4 = 0.$$

## 11–12 klasės

1. Raskite visas funkcijas  $f(x)$ , apibrėžtas sveikųjų skaičių aibėje ir įgyjančias sveikąsias reikšmes, kurios tenkina lygybę

$$f(x + y) + f(xy) = f(x)f(y) + 1$$

su visais sveikaisiais  $x$  ir  $y$ .

2. Įrodykite, kad į šešiakampį  $ABCDEF$ , kuriame  $AB = BC$ ,  $CD = DE$ ,  $EF = FA$  ir  $\angle A = \angle C = \angle E$ , galima įbrėžti apskritimą.
3. Netuščią natūraliųjų skaičių aibę vadinsime *puikia*, jei joje nėra tokių (nebūtinai skirtingų) skaičių  $a, b, c$ , su kuriais galiotų lygybė  $a^b = c$ . (Pavyzdžiui, aibė  $\{2, 3\}$  yra puiki, o aibė  $\{2, 3, 9\}$  nėra puiki, nes  $3^2 = 9$ .) Raskite didžiausią natūralųjį skaičių  $n \geq 3$ , su kuriuo aibė  $\{2, 3, 4, \dots, n\}$  yra dviejų puikių aibių sąjunga.
4. Pasinaudojęs skaičiuotuvu, Linas nustatė, kad skaičiai  $4^{52}$  ir  $5^{52}$  prasideda skaitmeniu 2, o skaičiai  $4^{11}$  ir  $5^{11}$  prasideda skaitmeniu 4. Remdamasis savo skaičiavimais, jis tvirtina, kad jei su koku nors natūraliuoju  $n$  abu skaičiai  $4^n$  ir  $5^n$  prasideda skaitmeniu  $a$ , tai  $a = 2$  arba  $a = 4$ . Ar Linas teisus?