LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

24

2021–2023 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Užduotys

STOJAMOJI UŽDUOTIS

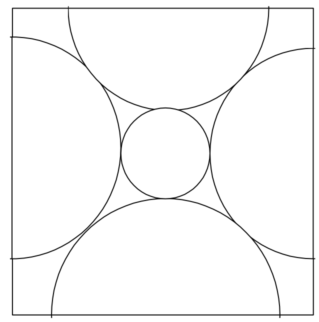
1. Tuo pačiu laiko momentu iš punkto A ta pačia kryptimi išvažiavo du dviratininkai, o po valandos – ir automobilis. Pirmo dviratininko greitis 24 km/h, o antro dviratininko greitis 18 km/h. Automobilis važiuodamas pastoviu greičiu antrą dviratininką pasivijo 10 minučių anksčiau negu pirmą dviratininką. Raskite automobilio greitį.

2. Išspręskite lygtį $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$.

3. Parduotuvė pardavė 50 skaičiuotuvų su 12 % antkainiu. Kiek daugiausiai skaičiuotuvų ji galėtų parduoti su 8 % nuolaida (nuo pradinės kainos), kad nepatirtų nuostolių?

4. Raskite mažiausią realųjį skaičių x, tenkinantį nelygybę $\dfrac{9x-68-3x^2}{x^2+25}\geq -2$.

5. Statinėje, įpylus į ją vandens tiek, kad dar liktų 30% laisvo jos tūrio, būtų 30 litrų vandens daugiau negu į ją įpylus 30% jos tūrio. Kokia statinės talpa?



6. Išspręskite nelygybę $\frac{|x|x-\frac{|x|}{x}}{x-1}<x-1$.

7. Į kvadratą įbrėžti keturi besiliečiantys pusapskritimiai (žr. pav.), kurių centrai – kvadrato kraštinių vidurio taškai, o spinduliai lygūs 1 cm. Apskaičiuokite apskritimo, esančio kvadrato viduryje ir liečiančio visus keturis pusapskritimius, spindulį.

8. Išspręskite lygtį $x(x+4)+\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}+4\right)=0$.

9. Apskritimo ω_1 centras yra kito apskritimo ω_2 taškas, apskritimas ω_1 liečia apskritimo ω_2 skersmenį AB taške M taip, kad $AM=m,\ BM=n$. Raskite apskritimo ω_1 ilgį.

10. Trikampio kraštinių ilgiai yra 5, m ir n + 5. Raskite visas natūraliųjų skaičių m ir n poras (m; n), kurioms esant šis trikampis yra statusis.

I. TEKSTINIAI UŽDAVINIAI

Teorinę medžiagą parengė bei pirmąją užduotį sudarė mokytojas ekspertas Kazimieras Pulmonas

Kartais jie įvardijami sąlyginiais ar žodiniais uždaviniais. Juos sprendžiant visų pirma labai svarbu gerai ir atidžiai perskaityti situacijos tekstą, dažnai ir kelis kartus, įsigilinti ir išsiaiškinti ką užduotis reikalauja atlikti, rasti ar nustatyti. Nereikia skubėti su sprendimu. Nepanikuoti. Po to, remiantis duomenimis, susidaryti loginį problemos sprendimo planą. Tam pasitarnauja paprasčiausios turimų duomenų sąryšio schemos.

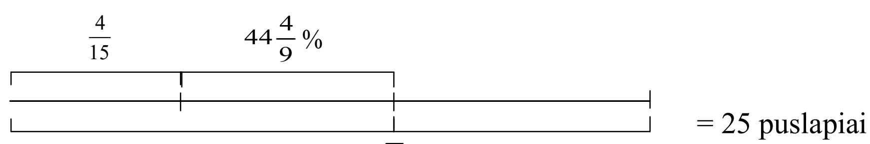
Suprantama, svarbūs kartu baziniai ir tipiniai įvairūs skaičiaus dalies ir viso skaičiaus, iš jo dalių radimo, proporcingosios dalybos, skirtingų judėjimo rūšių sausumoje ir upėje, bendro darbo, procentų, lydinių ir mišinių skaičiavimo praktiniai mokėjimai ir įgūdžiai, kaupiami mokantis matematikos mokykloje.

Iki praeito amžiaus aštuntojo dešimtmečio Lietuvos mokyklų 1 – 6 klasėse vyravo tekstinių uždavinių sprendimo aritmetiniu būdu metodika. Buvo šiose klasėse ir toks dalykas – aritmetika. Dabar kai kurie tekstiniai uždaviniai jau ir pradinėse klasėse sprendžiami algebriniu būdu. Praktikuojama matematikos mokymo metodika: svarbu problemą išspręsti, nesuteikiant svarbos ir pirmenybės sprendimo būdui. Sprendžiama patogiausiu, sprendėjui priimtiniausiu būdu.

Taigi, jeigu spręsdami tam tikrą problemą remiamės vien tik duomenų sąryšingumu ir tik jų sąsajomis bei dėsningumais, turime aritmetinį sprendimo būdą, o jei matematiškai modeliuojame lygtį, nelygybę ar lygčių ar nelygybių sistemą bei pasitelkiame diferencialinio ar integralinio skaičiavimo elementus, tai taikome algebrinį sprendimo būdą. Vienu ar kitu atveju labai svarbios čia ne tik turimos žinios iš matematikos, bet iš fizikos, chemijos, ekonomikos, o taip pat ir kitų mokslų. Galimas ir priimtinas uždavinių sprendimo taip vadinamas perrankos metodas.

1 pavyzdys. Berniukas iš pradžių perskaitė $\frac{4}{15}$ visos knygos, paskui dar $44\frac{4}{9}$ % likusios dalies. Po to paaiškėjo, kad jis perskaitė 25 puslapius daugiau, negu liko skaityti. Kiek puslapių yra knygoje?

Sprendimas.



I būdas (*Aritmetinis*). Perskaičius $\frac{4}{15}$ knygos berniukui liko skaityti $1-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}$ (knygos) $\cdot\, 44\frac{4}{9}$ % likusios skaityti knygos dalis yra $\frac{11}{15}\cdot\frac{44\frac{4}{9}}{100}=\frac{11}{15}\cdot\frac{4}{9}=\frac{44}{135}$ (knygos). Liko dar neperskaityta $\frac{11}{15}-\frac{44}{135}=\frac{55}{135}=\frac{11}{27}$ (knygos), o berniukas perskaitė $\frac{4}{15}+\frac{44}{135}=\frac{80}{135}=\frac{16}{27}$ (knygos). Perskaitytos ir neperskaitytos knygos dalių skirtumas yra $\frac{16}{27}-\frac{11}{27}=\frac{5}{27}$. Kadangi $\frac{5}{27}$ knygos yra 25 puslapiai, tai knygoje yra $25:\frac{5}{27}=25\cdot\frac{27}{5}=135$ (puslapiai).

II būdas (*Algebrinis*). Sakykime knygoje yra x puslapių, tai berniukas pradžioje perskaitė $\frac{4}{15}x$ puslapių, o paskui $\left(x-\frac{4}{15}x\right)\cdot\frac{44\frac{4}{9}}{100}=\frac{44x}{135}$ (puslapių). Liko perskaityti $x-\frac{4x}{15}-\frac{44x}{135}=\frac{135x-36x-44x}{135}=\frac{55x}{135}=\frac{11x}{27}$ (puslapių). Pagal sąlygą:

$\frac{4x}{15}+\frac{44x}{135}-\frac{11x}{27}=25\Big|\cdot 135;\quad 36x+44x-55x=25\cdot 135;\quad 25x=25\cdot 135$ ir $x=135.$

Ats.: 135 puslapiai.

2 pavyzdys. Iš indo, kuriame yra 40 *l* tam tikro stiprumo rūgšties, iš pradžių nupilta $\frac{3}{5}$ visos rūgšties kiekio ir pripilta tiek pat vandens. Ši procedūra pakartota dar du kartus. Kiek litrų pirmykščio stiprumo rūgšties liko inde, nupylus trečią kartą?

Sprendimas. Po pirmo nupylimo inde liko $40\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)=40\cdot\frac{2}{5}=16$ (*l*) pirmykščio stiprumo rūgšties, po antro – $16\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)=16\cdot\frac{2}{5}=6{,}4$ (*l*), o po trečio – $6{,}4\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)=6{,}4\cdot\frac{2}{5}=2{,}56$ (*l*).

Atsakymas;2,56 l.

3 pavyzdys. Nedžiovintų grūdų drėgnumas buvo lygus 23 %, o pradžiovintų – 12 %. Kiek procentų sumažėjo grūdų svoris juos pradžiovinus?

Sprendimas. Jei paimtume, pavyzdžiui, 100 kg nedžiovintų grūdų, tai sausųjų medžiagų juose būtų $100\cdot\frac{100-23}{100}=77$ (kg). Šios sausosios medžiagos, grūdus džiovinant, niekur nedingo, bet pradžiovintuose javuose jos jau sudaro $100-12=88$ (%), todėl pradžiovintų javų svorį x surandame iš schemos:

$$\begin{array}{l} 77\,\text{kg} - 88\,\%; \\ x\,\text{kg} - 100\,\%; \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 1\%\ \text{atitinka}\ \frac{77}{88}\,\text{kg}; \\ 1\%\ \text{atitinka}\ \frac{x}{100}\,\text{kg}. \end{array}$$

Todėl $\frac{x}{100}=\frac{77}{88}$ ir $x=\frac{77\cdot100}{88}=\frac{700}{8}=87{,}5$ (kg).

Vadinasi, grūdų svoris sumažėjo $100-87{,}5=12{,}5$ (kg), t.y. 12,5 %.

Ats.: 12,5 %.

4 pavyzdys. Statybos darbų apimtis padidėjo 80 %. Keliais procentais reikės padidinti darbininkų skaičių, jeigu darbo našumas bus padidintas 20 %?

Sprendimas.

I būdas (Aritmetinis). Jeigu pradinę statybos darbų apimtį laikytume lygia 100, o darbininkų darbo našumą, iki jis padidės, lygiu irgi 100 vienetų, tai nauja darbų apimtis yra 180, o darbo našumas – 120 vienetų. Darbininkų reikės naujoje situacijoje $\frac{180}{120}=1{,}5$ (buvusio) poreikio, t. y. 50 % daugiau.

II būdas (Algebrinis). Sakykime pradinė statybos darbų apimtis buvo a, o darbininkų darbo našumas – b, tai darbininkų poreikis buvo $\frac{a}{b}$. Naujos situacijos statybos darbų apimtis $1{,}8a$, o darbininkų darbo našumas $1{,}2b$. Vadinasi, darbininkų naujas poreikis yra $\frac{1{,}8a}{1{,}2b}=1{,}5\frac{a}{b}$ buvusio poreikio, t. y. 50 % didesnis.

Atsakymas 50

5 pavyzdys. Kiek sidabro 500-osios prabos ir 800-osios prabos reikia sulydyti, norint gauti 225 g sidabro lydinį, kurio praba yra 720?

Sprendimas. Jeigu 500-osios prabos sidabro reikia x g, tai jame yra $\frac{x\cdot500}{1000}=0{,}5x$ (g) gryno sidabro, o tuomet 800-osios prabos sidabro lydiniui reikia $(225-x)$ g ir jame yra $\frac{(225-x)\cdot800}{1000}=0{,}8(225-x)$ g gryno sidabro. 720-osios prabos 225 g sidabro lydinyje gryno sidabro yra $\frac{225\cdot720}{1000}=162$ (g).

Pagal sąlygą: $0{,}5x+0{,}8(225-x)=162;$ $0{,}5x+180-0{,}8x=162$ ir $x=60.$

Taigi 500-osios prabos sidabro reikia 60 g, o 800-osios prabos $225-60=165$ (g).

Uždavinį buvo galima spręsti ir kitaip.

Jeigu 500-osios prabos sidabro reikia paimti x gramų, tai 800-osios prabos – y gramų. Tuomet pagal sąlygą būtume sudarę lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x+y=225, \\ 0{,}5x+0{,}8y=162; \,\big|\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=225, \\ x+1{,}6y=324; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}6y=99, \\ x+y=225; \end{cases} \Rightarrow \; y=165, \text{ o } x=60.$$

Ats.: 60 g ir 165 gramus.

Sprendžiant pirmuoju atveju uždavinio sprendimo matematinis modelis yra lygtis $0{,}5x+0{,}8(225-x)=162,$ o antruoju – lygčių sistema $\begin{cases} x+y=225, \\ 0{,}5x+0{,}8y=162. \end{cases}$

6 pavyzdys. 125 m ilgio traukinys pro stulpą, esantį šalia geležinkelio, pravažiuoja per $\frac{1}{12}$ min, o per upę esantį tiltą pervažiuoja per 2,8 karto ilgesnį laiką. Koks yra tilto ilgis?

Sprendimas. $\frac{1}{12}\text{ min}=5\text{ s}.$ Traukinio važiavimo greitis $125:5=25\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$. Traukinys, pervažiuodamas tiltą (traukinio priekis pasiekia tilto pradžią, važiuoja tiltu, traukinio galas nuvažiuoja nuo tilto), nuvažiuoja kelią lygų $25\cdot 5\cdot 2{,}8=350$ (m). Kadangi traukinio ilgis 125 m, tai tilto ilgis $350-125=225$ (m).

Ats.: 225 m.

7 pavyzdys. Apskaičiuokite motorinės valties, kurios pradinė vertė 5000 Eur, likutines vertes per pirmuosius ketverius metus, jei kasmet valties vertė sumažėja 15 % buvusios vertės. Raskite motorinės valties vertę po 10 metų.

Sprendimas. Motorinės valties likutines vertes per pirmuosius ketverius metus galime apskaičiuoti paprasčiausiai prieš metus buvusią (likutinę) vertę daugindami iš skaičiaus $1-\frac{15}{100}=0{,}85.$

Todėl valties vertė:

pirmaisiais metais – 5 000 (Eur);

antraisiais metais – $5\,000\cdot 0{,}85=4\,250$ (Eur);

trečiaisiais metais – $4\,250\cdot 0{,}85=3\,612{,}5$ (Eur);

ketvirtaisiais metais – $3\,612{,}5\cdot 0{,}85=3\,070{,}63$ (Eur).

Susiduriame su sudėtiniais procentais. Todėl valties likutinę vertę galime apskaičiuoti pasinaudoję sudėtinių procentų formule: $b_n=b_1\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)^n.$

Motorinės valties vertė po 10 metų, t. y. vienuoliktaisiais metais bus

$$5\,000\cdot\left(1-\frac{15}{100}\right)^{11-1}=5\,000\cdot 0{,}85^{10}=984{,}37 \text{ (Eur).}$$

Ats.: 5 000 Eur, 4 250 Eur, 3 612,5 Eur, 3 070,63 Eur;984,37 Eur.

8 pavyzdys. Kiek mažiausiai kartų po 5 % reikia sumažinti prekės kainą, kad ji atpigtų ne mažiau kaip perpus?

Sprendimas. Jeigu prekės pradinė kaina a, tai pagal sąlygą:

$$a\left(1-\frac{5}{100}\right)^n\le\frac{a}{2},\quad \left(1-\frac{5}{100}\right)^n\le 0{,}5 \quad \text{ir} \quad 0{,}95^n\le 0{,}5.$$

Šią rodiklinę nelygybę paprasčiausia spręsti skaičiuokliu. Turime $n\ge 14.$ Susipažinusiems su logaritmais šios nelygybės sprendimas: $n\ge\log_{0{,}95}0{,}5=\frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}95}=13{,}51346...,\ n\ge 14.$

Ats.: 14 kartų.

9 pavyzdys. Šeimos pajamos kovo mėnesį buvo 1 248,48 Eur ir per visus šiuos kalendorinius metus didėjo kas mėnesį po 2 %. Apskaičiuokite šios šeimos pajamas per kalendorinius metus.

Sprendimas. Jeigu šeimos pajamos sausio mėnesį buvo x Eur, tai pagal sąlygą: $x\cdot 1{,}02^2=1\,248{,}48$ ir iš čia $x=1\,248{,}48:1{,}0404,$ todėl $x=1\,200$ Eur. Šeimos pajamos per metus atitinka geometrinės progresijos, kurios pirmasis narys $b_1 = 1\,200$, o vardiklis $q = 1 + \frac{2}{100} = 1{,}02$, pirmųjų dvylikos narių sumą S_{12}. Dvyliktasis narys yra $b_{12} = 1\,200 \cdot 1{,}02^{12-1} = 1\,200 \cdot 1{,}02^{11} = 1\,492{,}0486 \approx 1\,492{,}05$.

Pagal formulę $S_{12} = \frac{b_{12} \cdot q - b_1}{q-1}$ turime:

$$S_{12} = \frac{1\,492{,}05 \cdot 1{,}02 - 1\,200}{1{,}02 - 1} = \frac{1\,521{,}891 - 1\,200}{0{,}02} \approx 16\,094{,}5 \text{ (Eur)}.$$

Ats.: $\approx 16\,094{,}5$ Eur.

10 pavyzdys. Šeimoje yra penki vaikai. Keturi iš jų atitinkamai dviem, šešiais, aštuoniais ir dvylika metų yra vyresni už jauniausiąjį. Kiek metų yra jaunėliui, jei kiekvieno kito vaiko metų skaičius yra pirminis skaičius ir nedidesnis už 30.

Sprendimas. Pasinaudokime perrankos metodu. Pagal sąlygą akivaizdu, kad jauniausio vaiko metų skaičius yra nelyginis. Jei jaunėliui yra:

- vieneri, tai kitiems vaikams yra 3 m., 7 m., 9 m. ir 13 m. (9 – sudėtinis skaičius, tai sąlyga netenkinama);
- 3 metai, tai kitiems dviems – 9 m. ir 15 m. (netinka);
- 5 metai, tai kitiems – 7m., 11 m., 13 m. ir 17 m. (tinka);
- 7 metai, tai kitiems dviems – 9 m., ir 15 m. (netinka);
- 9 metai, tai kitiems dviems – 15 m. ir 21 m. (netinka);
- 11 metų, tai kitiems dviems – 13 m., 17 m., 19 m. ir 23 m. (tinka);
- 13 metų, tai kitiems trims – 15 m., 21 m. ir 27 m. (netinka);
- 15 metų, tai kitiems dviems – 21 m. ir 27 m. (netinka);
- 17 metų, tai vienam – 25 m. (netinka);
- 19 metų, tai vienam jau 31 m. ir sąlyga netenkinama.

Ats.: 5 m. arba 11 m.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Iš verdančio virdulio nupilta $\frac{2}{3}$ vandens, o į likusį vandenį virdulyje pripilta tiek pat kiek nupilta 16°C temperatūros vandens. Raskite sumaišyto vandens temperatūrą virdulyje.

2. 50 g 560-osios prabos aukso sulydyta su nežinomos prabos aukso lydiniu ir gauta 300 g. 760-osios prabos aukso lydinys. Raskite antrojo lydinio aukso prabą.

3. (Sąmojo uždavinys). Valstietis, važiuodamas į pievas šieno, pasiėmė tris sūnus: 15 metų, 12 metų ir 10 metų amžiaus. Grįždamas atgal su šienu, 13,5 km kelią berniukai iš eilės važiavo ant vežimo, kiekvienas savo amžiui atvirkščiai proporcingą nuotolį. Kiek kilometrų kiekvienas berniukas važiavo ant vežimo?

4. Laikrodis rodo vidurdienį. Po kiek mažiausiai laiko valandinė rodyklė vėl sutaps su minutine rodykle?

5. Darbininko darbo našumas pakilo 20 %, Kiek procentų sutrumpės laikas tam pačiam darbui atlikti?

6. Naujai iškasta akmens anglis yra 2 % drėgnumo. Po tam tikro laiko anglis dar įsiurbia tam tikrą kiekį drėgmės ir jau yra 15 %. Kiek padidės, atsižvelgiant į tai, naujai iškastos $13\frac{3}{8}$ tonos anglies svoris (tūkstantosios tikslumu)?

7. Miško sklype medienos prieaugis per metus sudarė 10 %. Medienos kiekis sklype dabar apytiksliai lygus $8{,}50 \cdot 10^4$ m^3. Kiek kubinių metrų medienos šiame sklype

a) buvo prieš keturis metus? b) bus po 5 metų?

Nurodymas. Atsakymus pateikite standartine skaičiaus išraiška $a \cdot 10^n$, skaičių a parašę šimtosios tikslumu.

8. Po aštuonerių metų iš 8 000 Eur palikimo sumos buvo likę 31,25 Eur. Po kiek tų pačių procentų likusios sumos išleido kasmet paveldėtojas?

9. Trys seserys pintinaitę gautų slyvų pasidalijo šitaip: pirmoji pasiėmė $\frac{1}{3}$ visų slyvų ir dar 8 slyvas, antroji pasiėmė $\frac{1}{3}$ likusiųjų ir dar 8 slyvas, trečioji pasiėmė vėl $\frac{1}{3}$ antrą kartą likusių slyvų ir dar paskutines 8 likusias slyvas. Kiek slyvų gavo kiekviena sesuo?

10. Išilgai geležinkelio sankasos eina takelis. 110 m ilgio traukinys važiavo 30 km/h greičiu. 14 val. 10 min. traukinys pasivijo einantį keleivį ir pravažiavo pro jį per 15 sekundžių. 14 val. 16 min. tas pats traukinys susitiko kitą keleivį ir pro jį pravažiavo per 12 sekundžių. Raskite kiekvieno keleivio greitį ir keleivių susitikimo laiką, jeigu keleiviai ėjo pastoviais greičiais.

II. KEITINIAI

Teorinę medžiagą parengė bei antrąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Aivaras Novikas

Keitinio apibrėžimas. Keitiniai yra tam tikros funkcijos. Funkcija yra taisyklė, pagal kurią kiekvienam vienos aibės X elementui x priskiriamas lygiai vienas kitos aibės Y elementas y. Aibė X vadinama atitinkamos funkcijos apibrėžimo sritimi, ir sakoma, kad ta funkcija apibrėžta aibėje X. Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = x^2$, apibrėžta visų realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$, reiškia taisyklę, kad skaičiui $x = 5$ priskiriamas skaičius $y = f(5) = 5^2 = 25$, skaičiui $x = -\sqrt[4]{3}$ – skaičius $y = \sqrt{3}$, skaičiui $x = 2\pi \approx 6{,}28$ – skaičius $y = 4\pi^2 \approx 39{,}48$, ir t. t. Visų x reikšmių neišvardysime, nes jų yra be galo daug, tačiau bet kuriai iš jų galime pritaikyti taisyklę ir apskaičiuoti funkcijos reikšmę $y = f(x)$. Mokykloje nagrinėjamos funkcijos, apibrėžtos begalinėse aibėse: aibėje $\mathbb{R}$, šios aibės intervaluose ir intervalų sąjungose. Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ gali būti apibrėžta visoje aibėje $\mathbb{R}$, funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$ – intervale $(-4;\ +\infty)$, o funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ – intervalų $(-\infty;\ -2)$ ir $(2;\ +\infty)$ sąjungoje. Čia nagrinėsime kitokias – baigtines – aibes. Keitiniai yra tokios funkcijos, kurioms $X = Y = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Čia n yra duotas natūralusis skaičius, o aibę $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ sudaro visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki n. Taigi keitinys yra funkcija, kiekvienam natūraliajam skaičiui nuo 1 iki n priskirianti po kokį nors natūralųjį skaičių nuo 1 iki n. Yra dar viena sąlyga: jokios dvi keitinio reikšmės negali sutapti, t. y. jei funkcija f yra keitinys, tai visos jos reikšmės $f(1), f(2), \dots, f(n)$ turi būti tarpusavyje skirtingos. Funkcija, kurios jokios dvi reikšmės nesutampa, vadinama *injektyvia*.

Dabar galime suformuluoti keitinio **apibrėžimą**: keitiniu vadinama injektyvi funkcija, apibrėžta ir įgyjanti reikšmes aibėje $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, kur n yra duotas natūralusis skaičius.

Kadangi keitinio apibrėžimo sritis yra baigtinė aibė, tai konkretų keitinį galima apibrėžti tiesiog išvardijant visas n jo reikšmių. Pavyzdžiui, kai $n = 4$, keitinį f galima apibrėžti keturiomis lygybėmis $f(1) = 3$, $f(2) = 4$, $f(3) = 2$, $f(4) = 1$. Tuo tarpu funkcija g su apibrėžimo sritimi $\{1, 2, 3, 4\}$, apibrėžta lygybėmis $g(1) = 3$, $g(2) = 4$, $g(3) = 2$, $g(4) = 3$, nėra keitinys, nes reikšmę $3 = g(1) = g(4)$ įgyja du kartus. Kiekvienas keitinys f žymimas tokia lentele:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$

(pirmoje eilutėje iš eilės užrašyti natūralieji skaičiai nuo 1 iki n, o po jais išvardytos atitinkamos keitinio reikšmės). Mūsų pavyzdyje vietoj keturių lygybių būtų galima užrašyti $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Šis užrašas nurodo taisyklę, kaip priskiriamos funkcijos reikšmės, tik kitu būdu nei, pavyzdžiui, užrašas $f(x) = x^2$. Jis reiškia, kad funkcija f skaičiui $x = 1$ priskiria po juo antroje eilutėje esantį skaičių $y = f(1) = 3$, ir t. t. Kad lentelė $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$ žymėtų kokį nors keitinį, antros eilutės skaičiai $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$ turi priklausyti aibei $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ir būti tarpusavyje skirtingi. Pavyzdžiui, lentelė $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ galėtų žymėti nagrinėtąją funkciją g, bet nežymi keitinio, nes jos antroje eilutėje yra du trejetai.

Keitiniai ir kėliniai. Mokykloje nagrinėjami baigtinės aibės kėliniai – tos aibės visų elementų surašymai kokia nors tvarka. Pavyzdžiui,

$$1, 2, 3, 4; \qquad 1, 2, 4, 3; \qquad 4, 3, 2, 1; \qquad 2, 4, 1, 3$$

yra keturi skirtingi aibės $\{1, 2, 3, 4\}$ kėliniai. Kad gautume šios aibės kėlinį, pirmąjį jo skaičių galime parinkti keturiais būdais, tada antrąjį – trimis, tada trečiąjį – dviem, o tada ketvirtąjį – tik vienu. Vadinasi, aibės $\{1, 2, 3, 4\}$ kėlinių yra $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$. Panašiai įrodoma, kad aibė $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ turi lygiai $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ kėlinių.

Keitinio lentelės $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$ antroje eilutėje yra n skirtingų skaičių iš aibės $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Šioje aibėje tėra n skaičių, todėl lentelės antroje eilutėje turi būti jie visi (kiekvienas po vieną kartą). Vadinasi, keitinį gausime, lentelės $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$ antroje eilutėje užrašę aibės $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ kėlinį. Su kiekvienu kėliniu gausime vis kitokį keitinį. Todėl duotam skaičiui n keitinių yra $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ – tiek pat, kiek kėlinių. Duotam skaičiui n visų keitinių

$\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ f(1) & f(2) & \dots & f(n)\end{pmatrix}$ aibę žymėsime S_n. Vėliau apibrėšime keitinių daugybą. Aibė S_n su joje apibrėžta daugyba yra vadinama **simetrine grupe**. Pavyzdžiui, simetrinėje grupėje S_3 yra $3! = 6$ keitiniai: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Kiekvienoje grupėje S_n yra keitinys e_n, kurio lentelėje abi eilutės vienodos. Jis pasižymi savybe $e_n(x) = x$ (kiekvienam x). Šis keitinys vadinamas **vienetiniu**. Pavyzdžiui, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix} = e_5 \in S_5$.

Keitinių daugyba. Dviejų tos pačios aibės S_n keitinių f ir g sandauga apibrėžiama taip:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ f(1) & f(2) & \dots & f(n)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ g(1) & g(2) & \dots & g(n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ g\big(f(1)\big) & g\big(f(2)\big) & \dots & g\big(f(n)\big)\end{pmatrix}.$$

Taigi vietoj įprastos funkcijų sandaugos $f(x) \cdot g(x)$, kai tiesiog dauginame jų atitinkamas reikšmes, iš tikrųjų turime funkcijų kompoziciją $g\big(f(x)\big)$, kai viena funkcija įrašoma į kitą. Kad nustatytume funkcijos $g\big(f(x)\big)$ konkrečią reikšmę $z_0 = g\big(f(x_0)\big)$, turime pirmiausiai nustatyti reikšmę $y_0 = f(x_0)$, o po to reikšmę $z_0 = g(y_0)$. Keitiniams tokią kompoziciją įprasta žymėti daugybos ženklu.

1 pavyzdys. Sandaugą $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 3 & 6 & 1 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1\end{pmatrix}$ galime gauti (t. y. užpildyti geltonus langelius) taip: kai $x_0 = 1$, tai $y_0 = 4$ (pirmasis keitinys); kai $y_0 = 4$, tai $z_0 = 2$ (antrasis keitinys); todėl sandaugos lentelėje po $x_0 = 1$ rašome $z_0 = 2$. Trumpiau: skaičiui 1 priskiriamas skaičius 4, o tada skaičiui 4 – skaičius 2, taigi sandauga skaičiui 1 priskiria skaičių 2. Dar trumpiau: $1 \to 4 \to 2$. Analogiškai baigiame pildyti antrąją sandaugos lentelės eilutę (veiksmus galima atlikti mintinai): $2 \to 5 \to 4$; $3 \to 3 \to 5$; $4 \to 6 \to 3$; $5 \to 1 \to 6$; $6 \to 2 \to 1$.

Daugybos savybės. Toliau keitinius žymėsime ne f, g, ..., bet a, b, c, ...

1) Keitinių a ir b iš S_n sandauga $a \cdot b$ taip pat yra keitinys iš S_n.

Iš tiesų, a yra keitinys, todėl visi skaičiai $a(1)$, $a(2)$, ..., $a(n) \in \{1, 2, \dots, n\}$ yra tarpusavyje skirtingi. Kadangi b yra keitinys, o skaičiai $a(1)$, $a(2)$, ..., $a(n)$ yra tarpusavyje skirtingi, tai skaičiai $b\big(a(1)\big)$, $b\big(a(2)\big)$, ..., $b\big(a(n)\big) \in \{1, 2, \dots, n\}$ taip pat yra tarpusavyje skirtingi, o lentelė $\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ b\big(a(1)\big) & b\big(a(2)\big) & \dots & b\big(a(n)\big)\end{pmatrix}$ žymi keitinį.

2) $a \cdot b$ nebūtinai lygu $b \cdot a$. Įsitikinkime tuo, sukeitę 1 pavyzdžio keitinius vietomis:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 3 & 6 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1\end{pmatrix}.$$

3) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Iš tiesų, jei $a(x_0) = y_0$, $b(y_0) = z_0$, $c(z_0) = t_0$, tai nesvarbu ar gausime, kad keitiniui $a \cdot b$ turime $x_0 \to y_0 \to z_0$, o keitiniui c turime $z_0 \to t_0$, ar kad keitiniui $b \cdot c$ turime $y_0 \to z_0 \to t_0$, o keitiniui a turime $x_0 \to y_0$. Abiem atvejais gausime situaciją $x_0 \to y_0 \to z_0 \to t_0$ ir tą patį galutinį daugybos rezultatą $c\Big(b\big(a(x_0)\big)\Big) = t_0$.

4) Prisiminus e_n apibrėžimą, nesunku suvokti, kad jei $a \in S_n$, tai $a \cdot e_n = e_n \cdot a = a$. Pastebėkime, kad keitinių daugybos atžvilgiu keitinys e_n aibėje S_n atlieka panašų vaidmenį, kokį realiųjų skaičių aibėje atlieka skaičius 1, taip pat pasižymintis savybe $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Todėl keitinys e_n ir vadinamas vienetiniu.

5) Jei $a \in S_n$, tai egzistuoja toks $a^{-1} \in S_n$, kad $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e_n$. Keitinys a^{-1} vadinamas keitinio a **atvirkštiniu** keitiniu.

Iš tiesų, kad turėtume reikiamą keitinį a^{-1}, jis turi pasižymėti savybe: jei keitiniui a turime $x_0 \to y_0$, tai keitiniui a^{-1} turime $y_0 \to x_0$. Tokį keitinį a^{-1} gausime, su keitiniu a atlikę veiksmus: jo lentelėje kiekvieną stulpelį $\begin{matrix}x_0\\ y_0\end{matrix}$ pakeitę stulpeliu $\begin{matrix}y_0\\ x_0\end{matrix}$ (t. y. sukeitę eilutes vietomis), o tada stulpelių tvarką pakeitę taip, kad pirmoje eilutėje skaičiai eitų didėjimo tvarka.

Jei vienetinis keitinys atitinka skaičių 1, tai atvirkštiniai keitiniai turėtų priminti atvirkštinius skaičius. Pavyzdžiui, skaičiai 2 ir $2^{-1} = 0{,}5$ yra vienas kitam atvirkštiniai, nes $2 \cdot 0{,}5 = 0{,}5 \cdot 2 = 1$.

2 pavyzdys. Nustatykime šią trijų keitinių sandaugą ir jos atvirkštinį keitinį:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 7 & 1 & 5 & 8 & 4 & 3 & 2 & 6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 4 & 2 & 6 & 8 & 1 & 7 & 3 & 5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 5 & 1 & 7 & 4 & 6 & 3 & 8 & 2\end{pmatrix}.$$

Daugybos 2 ir 3 savybės parodo, kad keitinių negalime sukeisti vietomis, bet galime arba pirmiau atlikti pirmąjį daugybos veiksmą, o tada antrąjį, arba pirmiau atlikti antrąjį daugybos veiksmą, o tada (su pirmuoju keitiniu ir gauta sandauga) pirmąjį. Tačiau abu daugybos veiksmus patogu apjungti.

Trys duotieji keitiniai priskiria skaičius atitinkamai tokiu būdu: $4 \to 8$; $8 \to 5$; $5 \to 6$. Todėl trijų keitinių sandaugai turime $4 \to 8 \to 5 \to 6$, t. y. sandauga skaičiui 4 priskiria skaičių 6. Taip pat, pavyzdžiui, turime $7 \to 2 \to 2 \to 1$, t. y. sandauga skaičiui 7 priskiria skaičių 1. Panašiai mąstydami, užpildome visą lentelę ir gauname atsakymą (patikrinkite!): $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Atvirkštinis keitinys gaunamas taip (žr. 5 savybės pagrindimą):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 6 & 2 & 3 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

3 pavyzdys. Nustatykime visus tokius keitinius $u \in S_9$, kad

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 8 & 5 & 3 & 7 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 4 & 5 & 3 & 7 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}^4.$$

Užrašykime lygtį trumpiau: $a \cdot u = c^4$. Pirmiausiai suprastinkime jos dešiniąją pusę. Kaip ir skaičiams, keitiniams užrašas c^4 reiškia $c \cdot c \cdot c \cdot c$. Taigi turime sudauginti 4 vienodus keitinius. Taigi pagal keitinį c sudarome reikiamas sekas su 4 rodyklėmis, pavyzdžiui, $1 \to 9 \to 8 \to 2 \to 6$ ir $4 \to 5 \to 3 \to 4 \to 5$. Taip gauname $b = c^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 4 & 5 & 3 & 8 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Pamėginkime lygybėje $a \cdot u = b$ išreikšti u. Nederėtų rašyti $u = b : a$, nes keitinių dalybos neapibrėžėme (ir neapibrėšime). Vietoj to pasinaudokime daugybos 5 savybe. Lygybės abi puses padauginkime iš a^{-1}. Atminkime, kad dauginimo tvarka yra svarbi: $b \cdot a^{-1} = (a \cdot u) \cdot a^{-1}$ (čia dauginamieji a ir a^{-1} nesusiprastins, nes nėra greta), bet, kita vertus, $a^{-1} \cdot b = a^{-1} \cdot (a \cdot u) = (a^{-1} \cdot a) \cdot u = e_9 \cdot u = u$. Taigi $u = a^{-1} \cdot b$, ir ši reikšmė tenkina lygtį: $a \cdot u = a \cdot (a^{-1} \cdot b) = (a \cdot a^{-1}) \cdot b = e_9 \cdot b = b$. Dabar beliko nustatyti $a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 5 & 7 & 4 & 9 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ir

$$u = a^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 5 & 7 & 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Apibendrinkime šį pavyzdį: jei duoti $a, b \in S_n$, tai lygtis $a \cdot u = b$ turi lygiai vieną sprendinį $u = a^{-1} \cdot b$. Panašiai nustatoma, kad lygtis $u \cdot a = b$ turi lygiai vieną sprendinį $u = b \cdot a^{-1}$ ir kad lygtis $a \cdot u \cdot b = c$ turi lygiai vieną sprendinį $u = a^{-1} \cdot c \cdot b^{-1}$ (čia $a, b, c \in S_n$ – duoti keitiniai).

Keitinio išraiška ciklais. Matėme, kad keitinį galima užrašyti dviejų eilučių lentele, pavyzdžiui, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 4 & 5 & 3 & 7 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. Informaciją, vienareikšmiškai nusakančią duotą keitinį, kartais naudinga užrašyti kitokia forma. Kiekvieną keitinį galima **užrašyti** ne tik **lentele**, bet ir **ciklais**. Visų pirma, duotos lentelės informaciją pavaizduokime rodyklėmis: $1 \to 9$; $2 \to 6$; $3 \to 4$; $4 \to 5$; $5 \to 3$; $6 \to 7$; $7 \to 1$; $8 \to 2$; $9 \to 8$. Šį užrašą galima sutrumpinti, jungiant jo atskiras dalis: $1 \to 9 \to 8 \to 2 \to \cdots$. Tęsdami tokią seką bet kokiam keitiniui, neišvengiamai prieisime jau užrašytą skaičių (juk skaičių kiekis baigtinis). Jei pirmas pasikartojęs sekos skaičius x nebūtų pirmasis sekos skaičius, tai į skaičių x būtų nukreiptos dvi rodyklės, o keitinio lentelės antroje eilutėje atitinkamai būtų du skaičiai x. Vadinasi, pirmas sekoje pasikartoja tas skaičius, kuriuo seka prasideda. Taip bus ir mūsų atveju: $1 \to 9 \to 8 \to 2 \to 6 \to 7 \to 1 \to \cdots$. Toliau sekoje pirmieji jos skaičiai ima kartotis, jie sudaro lyg uždarą ratą – **ciklą**. Pasirinkę bet kurį dar nepanaudotą skaičių ir jam užrašę naują seką, gausime dar vieną ciklą: $3 \to 4 \to 5 \to 3$. Jei dar liktų neužrašytų skaičių, tai šį procesą tęstume, tačiau šiuo atveju jau gavome visus 9 skaičius. Vadinasi, keitinį c sudaro du ciklai. Ciklas užrašomas, iš eilės viena eilute surašant visus skirtingus ciklo skaičius: $(1 \quad 9 \quad 8 \quad 2 \quad 6 \quad 7)$ ir $(3 \quad 4 \quad 5)$. Ciklai parodo visą keitinio lentelės informaciją: kiekvienam ciklo skaičiui, išskyrus paskutinį, keitinys priskiria gretimą iš dešinės skaičių, o paskutiniam ciklo skaičiui priskiriamas pirmas to ciklo skaičius. Nesvarbu kuriuo skaičiumi pradėsime ciklą: pavyzdžiui, $(1 \quad 9 \quad 8 \quad 2 \quad 6 \quad 7) = (8 \quad 2 \quad 6 \quad 7 \quad 1 \quad 9)$. **Keitinio išraiškoje ciklais** jis užrašomas išvardijant visus jo ciklus: $c = (1 \quad 9 \quad 8 \quad 2 \quad 6 \quad 7)(3 \quad 4 \quad 5)$. Ciklų tvarka tokioje išraiškoje nesvarbi: pavyzdžiui, $c = (4 \quad 5 \quad 3)(8 \quad 2 \quad 6 \quad 7 \quad 1 \quad 9)$. Skaičių kiekis cikle vadinamas **ciklo ilgiu**.

4 pavyzdys. Tris dauginamuosius 2 pavyzdyje užrašykime ciklais:

$(1 \quad 7 \quad 2)(3 \quad 5 \quad 4 \quad 8 \quad 6) \cdot (1 \quad 4 \quad 8 \quad 5)(2)(3 \quad 6 \quad 7) \cdot (1 \quad 5 \quad 6 \quad 3 \quad 7 \quad 8 \quad 2)(4)$.

Išspręskime 2 pavyzdžio uždavinį, bet sandaugą ir jos atvirkštinį keitinį iš karto užrašykime ciklais, o turėdami atsakymo išraišką ciklais perrašykime jį lentele. Sandaugos ieškome taip: pradedame bet kuriuo skaičiumi (pavyzdžiui, 1) ir gauname, kurį skaičių jam priskiria sandauga: $1 \to 7 \to 3 \to 7$. Taigi pradedame ciklą: $(1 \quad 7 \quad \ldots)$. Toliau tikriname skaičių 7 ir gauname $7 \to 2 \to 2 \to 1$. Ciklas užsivėrė, todėl užskliaučiame jį ir atveriame naują ciklą, pradėdami dar nepanaudotu skaičiumi, pavyzdžiui, 2: $(1 \quad 7)(2 \quad \ldots)$. Tęsiame šį procesą ($2 \to 1 \to 4 \to 4$; $4 \to 8 \to 5 \to 6$; ...), kol užrašome visus skaičius ir gauname sandaugą $(1\quad 7)(2\quad 4\quad 6\quad 3\quad 5)(8)$. Sandaugos atvirkštinis keitinys gaunamas, kiekviename cikle skaičių tvarką pakeičiant priešinga: $\big((1\quad 7)(2\quad 4\quad 6\quad 3\quad 5)(8)\big)^{-1} = (7\quad 1)(5\quad 3\quad 6\quad 4\quad 2)(8)$. Ši išraiška rodo keitinio priskyrimus $7 \to 1$; $1 \to 7$; $8 \to 8$; ir t. t. Juos nurodome keitinio lentelėje (visus veiksmus patikrinkite savarankiškai!): $(7\quad 1)(5\quad 3\quad 6\quad 4\quad 2)(8) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 6 & 2 & 3 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

5 pavyzdys. Keitinius $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 3 & 13 & 4 & 12 & 9 & 1 & 10 & 7 & 11 & 2 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{2021}$ ir $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 7 & 2 & 4 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}^{2022}$ nustatysime lengviau, jei keliamus laipsniu keitinius pirma užrašysime ciklais: $a = (1\quad 3\quad 4\quad 12\quad 5\quad 9\quad 11\quad 8\quad 7\quad 10\quad 2\quad 13\quad 6)^{2021}$ ir $b = \big((1\quad 5\quad 7\quad 4)(2\quad 3\quad 6)(8\quad 10)(9)\big)^{2022}$.

Nagrinėkime keitinį a ir nustatykime, kokį skaičių jis priskiria skaičiui 1. Tai skaičius, einantis po 2021-os rodyklės sekoje $1 \to 3 \to 4 \to 12 \to \cdots$. Pirmieji 13 skaičių sekoje yra skirtingi, o po 13-tos rodyklės eina skaičius 1, ir tie patys 13 skaičių ima ta pačia tvarka kartotis. Taigi skaičių seka yra periodinė. Pavyzdžiui, po pirmos rodyklės eina skaičius 3, todėl jis eina ir po $1 + 13 = 14$-tos, $14 + 13 = 27$-tos, $27 + 13 = 40$-tos ir t. t. rodyklių. Padalykime skaičių 2021 iš 13 su liekana: $2021 = 13 \cdot 155 + 6$. Todėl po 2021-os rodyklės eina tas pats skaičius, kuris eina po $2021 - 13 - -13 - \cdots - 13 = 6$-tos. Tai yra 6-as ciklo $(1\quad 3\quad 4\quad 12\quad 5\quad 9\quad 11\quad 8\quad 7\quad 10\quad 2\quad 13\quad 6)$ skaičius, einantis po vieneto. Taigi tai skaičius $a(1) = 11$, ir turime $a = (1\quad 11\quad ...)$. Remiantis ta pačia logika, $a(11)$ yra to paties ciklo skaičius, 6-as po skaičiaus 11. Tai skaičius $a(11) = 6$. Analogiškai gauname $a(6) = 9$, $a(9) = 13$, $a(13) = 5$, $a(5) = 2$, $a(2) = 12$, ir t. t. Taip randame $a = (1\quad 11\quad 6\quad 9\quad 13\quad 5\quad 2\quad 12\quad 10\quad 4\quad 7\quad 3\quad 8)$.

Apibendrinkime: kad pakeltume keitinį dideliu laipsniu ir gautume rezultatą a, turėjome laipsnio rodiklį (čia 2021) padalyti su liekana iš ciklo ilgio (čia iš 13). Gautoji liekana (čia 6) parodė, kelintas skaičius cikle yra skaičius $a(x)$, skaičiuojant nuo skaičiaus x (čia x – bet kuris to ciklo skaičius).

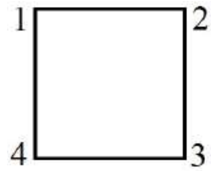
Nustatykime b. Turime ciklą $(1\quad 5\quad 7\quad 4)$, kurio ilgis yra 4. Skaičius 2022 dalijasi iš 4 su liekana 2. Todėl $b(1)$ yra šio ciklo skaičius, antras po skaičiaus 1. Taigi $b(1) = 7$. Analogiškai, $b(7) = 1$, $b(5) = 4$, $b(4) = 5$. Taigi keitinyje b ciklas $(1\quad 5\quad 7\quad 4)$ suskyla į du ciklus $(1\quad 7)$ ir $(4\quad 5)$. Turime ciklą $(2\quad 3\quad 6)$. Skaičius 2022 dalijasi iš 3 su liekana 0. Ką tai pasako apie $b(2)$? Kadangi 2022 dalijasi iš 3, tai periodinėje sekoje $2 \to 3 \to 6 \to 2 \to 3 \to 6 \to \cdots$ po 2022-os rodyklės eina skaičius 2. Taigi $b(2) = 2$. Analogiškai, $b(3) = 3$, $b(6) = 6$. Taigi keitinyje b ciklas $(2\quad 3\quad 6)$ suskyla į tris ciklus (2), (3), (6). Kadangi 2022 dalijasi ir iš 2, tai ir ciklas $(8\quad 10)$ suskyla į (8), (10) (o priešingu atveju liktų nepakitęs, nes dalybos iš 2 liekana būtų lygi 1). Žinoma, sekoje $9 \to 9 \to 9 \to \cdots$ po kiekvienos rodyklės eina skaičius 9, todėl $b(9) = 9$. Vadinasi, $b = = (1\quad 7)(4\quad 5)(2)(3)(6)(8)(10)(9)$.

Keitinio eilė. Jei 5 pavyzdyje vietoj rodiklio 2021 turėtume rodiklį 2028, kuris dalijasi iš 13, tai tokiu laipsniu keliamas vienaciklis keitinys suskiltų į 13 vienetinių ciklų, t. y. gautume $a = e_{13}$. Kad gautume $b = e_{10}$, pakeitę rodiklį 2022 į kokį nors natūralųjį skaičių k, tam į vienetinius ciklus turi suskilti ciklai $(1\quad 5\quad 7\quad 4)$, $(2\quad 3\quad 6)$, $(8\quad 10)$, kurių ilgiai yra 4, 3, 2. Taigi skaičius k turi dalytis iš 4, 3 ir 2, t. y. iš $4 \cdot 3 = 12$. Tinka $k = 12, 24, 36, ...$

Tarkime, kad duotas bet koks $a \in S_n$. Mažiausias toks natūralusis skaičius k, kad $a^k = e_n$, vadinamas keitinio a **eile**. Apibendrinkime mūsų pastebėjimus: eilė k yra toks mažiausias natūralusis skaičius, kuris dalijasi iš visų keitinį a sudarančių ciklų ilgių, t. y. k yra visų keitinio a ciklų ilgių mažiausias bendras kartotinis. Pavyzdžiui, keitinio $(1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6)(7\quad 8\quad 9\quad 10)$ eilė lygi $\mathrm{MBK}(6, 4) = 12$, o keitinio $(1\quad 2)(3\quad 4\quad 5)(6\quad 7\quad 8\quad 9\quad 10)$ eilė lygi $\mathrm{MBK}(2, 3, 5) = 30$.

6 pavyzdys. Nustatykime, kiek grupėje S_9 yra keitinių, kurių eilė yra 15. Tarkime, kad keitinio $a \in S_9$ eilė yra 15. Tada šio keitinio kiekvieno ciklo ilgis yra vienas iš skaičiaus 15 daliklių 1, 3, 5, 15. Kita vertus, ciklų ilgių suma lygi 9. Taigi ciklų ilgiai tegali būti 1, 3, 5. Jei ciklų ilgiai tėra lygūs 1 arba 3, tai ir šių ilgių mažiausias bendras kartotinis yra 1 arba 3. Taigi bent vieno ciklo ilgis turi būti 5. Analogiškai, bent vieno ciklo ilgis yra 3. Vadinasi, $3 + 5 = 8$ iš 9 skaičių sudaro du tokius ciklus, ir dar vienas skaičius sudaro vienetinį ciklą. Kiekvienas toks keitinys tinka, nes $\mathrm{MBK}(5, 3, 1) = 15$.

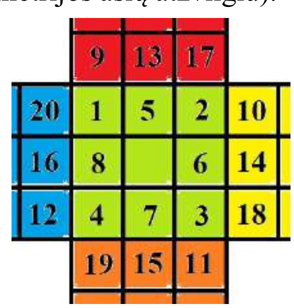
Taigi $a = (a_1)(a_2 \quad a_3 \quad a_4)(a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9)$. Skaičiui a_1 galime priskirti bet kurią iš 9 reikšmių 1, 2, ..., 9, tada skaičiui a_2 – vieną iš likusių 8 reikšmių, skaičiui a_3 – vieną iš likusių 7 reikšmių, ir t. t. Taigi pirmąjį ciklą sudaryti yra 9 būdai, tada antrąjį – $8 \cdot 7 \cdot 6$ būdų, tada trečiąjį – $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ būdų. Tačiau kai kurie iš taip sudarytų ciklų $(a_2 \quad a_3 \quad a_4)$ sutampa. Gautus $8 \cdot 7 \cdot 6$ ciklų galima suskirstyti į ciklų trejetus $(x \quad y \quad z)$, $(y \quad z \quad x)$, $(z \quad x \quad y)$. Kiekviename trejete turime tą patį ciklą, užrašytą trimis skirtingais būdais, o ciklai iš skirtingų trejetų visada skirtingi. Todėl skirtingų ciklų $(a_2 \quad a_3 \quad a_4)$ turime $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3}$. Analogiškai, skirtingų ciklų $(a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9)$ gauname ne $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, bet $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5}$. Vadinasi, tinkamų keitinių a yra $9 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5} = 9 \cdot 112 \cdot 24 = 24\,192$.



Keitiniai ir simetrijos. Plokštumoje nagrinėkime kvadratą. Jo viršūnes iš eilės sunumeruokime (žr. pav.). Pasukę kvadratą aplink jo centrą 90° kampu pagal laikrodžio rodyklę, gausime tą patį kvadratą, tik kiekvienas skaičius užims kito skaičiaus vietą: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$. Taigi šią kvadrato transformaciją apibūdina keitinys $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Jei kvadratą suksime ne 90°, bet 180° kampu, tai reikš du posūkius 90° kampu, todėl posūkį 180° kampu apibūdina keitinys $a \cdot a = a^2 = (1 \quad 3)(2 \quad 4)$. Iš tiesų, po šio posūkio priešingos viršūnės (1 ir 3, 2 ir 4) susikeičia vietomis.

Geometrinės figūros (plokštumoje arba erdvėje) transformacija, kuria gaunama tokia pati (tiek forma, tiek dydžiu) figūra, užimanti tą pačią (plokštumos arba erdvės) vietą, yra vadinama tos figūros **simetrija**. Taigi kvadrato posūkiai 90° ir 180° kampais aplink jo centrą yra kvadrato simetrijos. Duotojo kvadrato simetrinis vaizdas horizontalios tiesės l, einančios per kvadrato centrą, atžvilgiu sutampa su kvadratu. Taigi turime dar vieną simetriją, kurią atitinka keitinys $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Tarkime, kad atlikome tokią transformaciją: kvadratą aplink jo centrą pasukome 90° kampu prieš laikrodžio rodyklę (tai tas pats kaip pasukti tris kartus pagal laikrodžio rodyklę), tada atvaizdavome simetriškai tiesės l atžvilgiu, o tada – simetriškai kvadrato centro atžvilgiu (tai tas pats kaip pasukti 180° kampu). Transformacijos tris veiksmus atitinka keitiniai a^3 (arba a^{-1}), b ir a^2. Taigi ją pačią apibūdina $a^3 \cdot b \cdot a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Dabar galime pastebėti: atlikti šią transformaciją trimis veiksmais yra tas pats, kaip atlikti ją tokiu vienu veiksmu: kvadratas simetriškai atvaizduojamas įstrižainės, jungiančios viršūnes 2 ir 4, atžvilgiu.

Tarkime, kad turime duotojo kvadrato simetriją, kuri kiekvieną kvadrato kraštinę perveda į jo (tą pačią ar kitą) kraštinę taip, kad kiekvieno kraštinės taško atstumai iki jos galų nepakistų. Viršūnė 1 gali būti atvaizduota į bet kurią vieną iš viršūnių 1, 2, 3, 4 (4 atvejai), o likusios trys viršūnės nuo viršūnės 1 gali iš eilės rikiuotis ratu pagal arba prieš laikrodžio rodyklę (2 atvejai). Taigi kvadratas turi tik $4 \cdot 2 = 8$ tokias simetrijas. Jas atitinka keitiniai $e_4 = a^4$, a, a^2, $a^3 = a^{-1}$ (posūkiai 0°, 90°, 180°, 270° kampais), b, $b \cdot a$, $b \cdot a^2$, $b \cdot a^3$ (kvadrato simetrijos jo keturių simetrijos ašių atžvilgiu). Tai 8 iš 24 aibės S_4 elementų. Tuo tarpu, pavyzdžiui, keitinys $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ tokios kvadrato simetrijos neapibūdina, nes čia kvadrato kraštinės galai 2 ir 3 pereina į įstrižainės galus 1 ir 3.



Keitiniais galima apibūdinti ir, pavyzdžiui, Rubiko kubo transformacijas. Kubas turi 6 sienas, kurių kiekviena padalyta į 9 langelius. Centrinis kiekvienos sienos langelis, sukiojant kubo sienas, lieka savo vietoje, todėl šių 6 langelių galima nepaisyti. Likusius $6 \cdot 9 - 6 = 48$ langelius galima bet kaip sunumeruoti skaičiais nuo 1 iki 48. Jei Rubiko kubo išklotinėje dalį langelių sunumeruosime, kaip parodyta paveikslėlyje, tai kubo sienos su žaliu centriniu langeliu posūkį 90° kampu pagal laikrodžio rodyklę atitiks keitinys
$(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)(5 \quad 6 \quad 7 \quad 8)(9 \quad 10 \quad 11 \quad 12)(13 \quad 14 \quad 15 \quad 16)(17 \quad 18 \quad 19 \quad 20)(21)(22) \dots (48)$.
Atitinkamiems kitų sienų posūkiams galime priskirti dar penkis keitinius iš S_{48}. Visos įmanomos sandaugos, kur kiekvienas dauginamasis yra vienas iš šių 6 pradinių keitinių, nusakys visas įmanomas Rubiko kubo transformacijas. Šios sandaugos gali įgyti iš viso $43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$ skirtingų reikšmių. Tai reiškia, kad sukiodami Rubiko kubo sienas galime gauti būtent tiek skirtingų Rubiko kubo pavidalų.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Nustatykite sandaugas $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 1 & 5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 1 & 3 & 6 & 2 & 7 & 5\end{pmatrix}$ ir
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14\\ 3 & 12 & 5 & 10 & 2 & 11 & 7 & 9 & 1 & 14 & 4 & 6 & 8 & 13\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14\\ 4 & 13 & 14 & 6 & 9 & 10 & 2 & 11 & 5 & 12 & 8 & 3 & 1 & 7\end{pmatrix}$.
Abiem atvejais atsakymą užrašykite tiek lentele, tiek ciklais.

2. Nustatykite sandaugą $a^3 \cdot b^2 \cdot a^{-1}$, kur $a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11\\ 3 & 10 & 8 & 7 & 9 & 1 & 5 & 11 & 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$,
$b = (1 \;\; 6 \;\; 3 \;\; 11)(2 \;\; 7 \;\; 5 \;\; 8)(4 \;\; 10 \;\; 9)$. Atsakymą užrašykite tiek lentele, tiek ciklais.

3. Duoti keitiniai $a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 2 & 4 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5\end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.
Nustatykite keitinio $u \in S_6$ eilę, jei $a \cdot u \cdot b = c$.

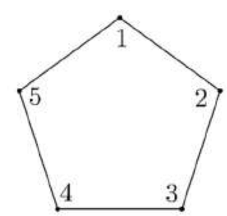
4. Duotas keitinys $a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15\\ 13 & 11 & 9 & 1 & 14 & 3 & 8 & 4 & 2 & 10 & 15 & 5 & 7 & 12 & 6\end{pmatrix}$.
Nustatykite keitinį a^{5678}. Atsakymą užrašykite lentele.

5. Nustatykite keitinį u^{100}, jei $u \cdot a^{444} = b^{-1}$, $a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 8 & 4 & 7 & 1 & 10 & 2 & 3 & 9 & 5 & 6\end{pmatrix}$ ir
$b = (1 \;\; 5 \;\; 6 \;\; 4 \;\; 9)(2 \;\; 10 \;\; 7)(3 \;\; 8)$. Atsakymą užrašykite ciklais.

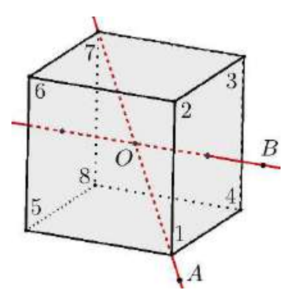
6. Nustatykite keitinio $(a^{201} \cdot b^{210})^{102} \cdot c$ eilę, kai
$a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13\\ 4 & 11 & 5 & 1 & 13 & 7 & 8 & 2 & 3 & 12 & 10 & 9 & 6\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13\\ 4 & 3 & 6 & 11 & 10 & 9 & 1 & 13 & 7 & 8 & 2 & 5 & 12\end{pmatrix}$,
$c = (1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5)(6 \;\; 7 \;\; 11 \;\; 12)(8)(9)(10)(13)$.

7. Nustatykite, kiek grupėje S_{10} yra keitinių, kurių eilė lygi 14.

8. Nustatykite, kiek grupėje S_6 yra keitinių, kurių eilė lygi 2.



9. Vieną pavaizduoto taisyklingojo penkiakampio (su centru O) simetriją galima apibūdinti tokia trijų veiksmų seka: pasukame penkiakampį 144° kampu aplink O pagal laikrodžio rodyklę; simetriškai atvaizduojame jį vertikalios tiesės, einančios per O, atžvilgiu; pasukame jį 72° kampu aplink O prieš laikrodžio rodyklę. Ciklais užrašykite grupės S_5 keitinius, kurie apibūdina šiuos tris veiksmus, ir šių keitinių sandaugą, kuri apibūdina duotąją penkiakampio simetriją. Kokiu vienu veiksmu (posūkio arba simetriško atvaizdavimo tiesės atžvilgiu) galima nusakyti šią simetriją?



10. Pavaizduotas kubas su centru O. Kubo simetriją U, kai šis pasukamas 120° kampu aplink tiesę OA pagal laikrodžio rodyklę, žiūrint iš taško A, apibūdina keitinys $a \in S_8$. Simetriją V, kai kubas pasukamas 90° kampu aplink tiesę OB (statmeną kubo sienai) pagal laikrodžio rodyklę, žiūrint iš taško B, apibūdina keitinys $b \in S_8$. Kubas transformuotas, simetrijas pritaikant tokia tvarka: UVUUVVUUUVVVUUUUUUVVVVVV. (Sukant kubą, tiesės OA ir OB nejuda.) Ši kubo transformacija W – vėlgi jo simetrija. Užrašykite jos keitinį c kaip keitinių a ir b laipsnių sandaugą. Ciklais užrašykite c bei įvardykite, kokiu vienu posūkio veiksmu galima nusakyti W.

III. STEREOMETRIJOS UŽDAVINIAI

Teorinę medžiagą parengė bei trečiąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

Stereometrija (iš graikų kalbos „stereos“ – erdvė, „metreo“ – matuoju) – tai erdvės geometrija. Stereometrija nagrinėja erdvinių figūrų savybes. Kas tai yra plokštuma, visi įsivaizduoja; planimetrijoje plokštuma nagrinėjama nepriklausomai nuo ją supančios erdvės. Tuo tarpu stereometrijoje plokštumos suprantamos kaip erdvės taškų aibės, be to, kiekvienoje plokštumoje galioja planimetrija – plokštumos geometrija. Taigi nagrinėdami erdvės geometriją ir spręsdami uždavinius, naudosime planimetrijos sąvokas, teiginius ir formules.

Geometrijoje kaip ir bet kurioje kitoje matematikos mokslo šakoje pradiniai faktai gaunami iš praktikos, jie yra vaizdūs ir akivaizdūs. Tie faktai yra vadinami aksiomomis, aksiomos apibūdina taip vadinamas pirmines sąvokas, t. y. tas sąvokas, kurios nėra apibrėžiamos. Kitos sąvokos yra apibrėžiamos, naudojant pirmines sąvokas ir jau apibrėžtas sąvokas. Kiti geometrijos faktai – vadinami teoremomis – įrodomi naudojant aksiomas ir jau įrodomas teoremas.

Stereometrijos aksiomos apibūdina tokias sąvokas: taškas, tiesė, plokštuma. Išvardysime jas:

1. Bet kuriems trims erdvės taškams egzistuoja plokštuma, kuriai tie taškai priklauso. Tuomet sakoma, kad ši plokštuma eina per duotuosius taškus.

2. Jei dvi plokštumos turi bendrą tašką, tai jos turi bendrą tiesę. Tuomet sakoma, kad dviejų plokštumų sankirta yra tiesė.

3. Jei teisei priklauso du plokštumos taškai, tai visi tiesės taškai yra toje plokštumoje. Tuomet sakoma, kad tiesė yra plokštumoje.

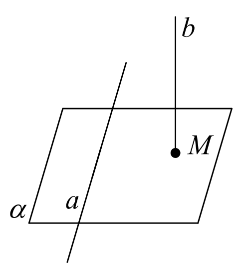
4. Kiekvienoje erdvės plokštumoje yra teisingos visos plokštumos geometrijos (planimetrijos) aksiomos ir teoremos.

Iš šių aksiomų lengvai įrodomos tokios stereometrijos teoremos:

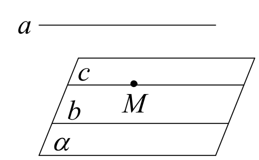
1 teorema. Jei trys taškai nėra vienoje tiesėje, tai egzistuoja vienintelė plokštuma, kuriai priklauso tie trys taškai.

2 teorema. Per tiesę ir jai nepriklausantį tašką eina vienintelė plokštuma.

Dvi erdvės tiesės a ir b yra vadinamos *prasilenkiančiomis*, jei nėra tokios plokštumos, kuriai priklauso ir tiesė a, ir tiesė b. Jei tiesės a ir b yra vienoje plokštumoje, tai jos arba turi vienintelį bendrą tašką (jos yra susikertančios), arba neturi bendrų taškų (tiesės a ir b lygiagrečios $a \parallel b$).



1 pav.



2 pav.

3 teorema. Per dvi susikertančias tieses eina vienintelė plokštuma.

4 teorema. Per dvi lygiagrečias tieses eina vienintelė plokštuma.

Tiesė a ir plokštuma α gali turėti vieną bendrą tašką (tiesė kerta plokštumą), neturėti nė vieno bendro taško (tiesė lygiagreti su plokštuma), o taip pat tiesė gali priklausyti plokštumai.

5 teorema (prasilenkiančių tiesių požymis). Jei tiesė a yra plokštumoje α, o tiesė b kerta plokštumą α taške M, nepriklausančiame tiesei a, tai tiesės a ir b yra prasilenkiančios (1 pav.).

6 teorema. Kokia bebūtų tiesė a ir jai nepriklausantis taškas A, per tašką A eina vienintelė tiesė b, lygiagreti su tiese a.

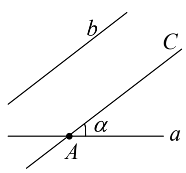
7 teorema. Jei tiesė a lygiagreti su tiese b, o tiesė b lygiagreti su tiese c, tai tiesės a ir c yra lygiagrečios.

8 teorema. Jei tiesės a ir b yra lygiagrečios, o tiesė a kerta plokštumą α, tai ir tiesė b kerta plokštumą α.

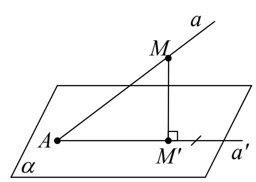
1 pavyzdys. Tiesė b yra plokštumoje α, ji yra lygiagreti su tiese a, kuri nėra plokštumoje α. Per plokštumos α tašką M, nepriklausantį tiesei b, nubrėžta tiesė c, lygiagreti su tiese a (2 pav.). Įrodysime, kad tiesė c yra plokštumoje α.

Sprendimas. Kadangi tiesės a ir b yra lygiagrečios, o tiesės a ir c yra lygiagrečios, tai tiesė b lygiagreti su tiese c (7 teorema). Sakykime, kad tiesė c nėra plokštumoje α. Kadangi tiesė c ir plokštuma α turi bendrą tašką, tai tiesė c nelygiagreti su plokštuma α. Tarkime, kad tiesė c kerta plokštumą α viename taške M. Pagal 8 teoremą ir lygiagreti su ja tiesė b turi kirsti plokštumą α. Gavome prieštarą, kuri ir įrodo, kad tiesė c yra plokštumoje α.

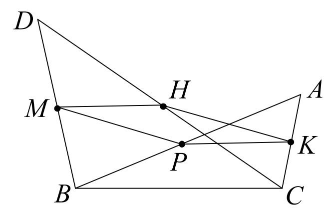
Jei a ir b – dvi prasilenkiančios tiesės, taškas A yra tiesėje a, tai pagal 6 teoremą per tašką A eina vienintelė tiesė c, lygiagreti su tiese b (3 pav.), tiesės a ir c yra vienoje plokštumoje (3 teorema). Tuomet kampas α tarp tiesių a ir c yra vadinamas kampu tarp tiesių a ir b. Akivaizdu, jog taip apibrėžtas kampas tarp prasilenkiančių tiesių nepriklauso nuo taško $A \in a$ parinkimo.



3 pav.



4 pav.



5 pav.

9 teorema. Jei tiesė a lygiagreti su tiese b, esančia plokštumoje α, bet pati tiesė a nėra plokštumoje α, tai tiesė a yra lygiagreti su plokštuma α (tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymis).

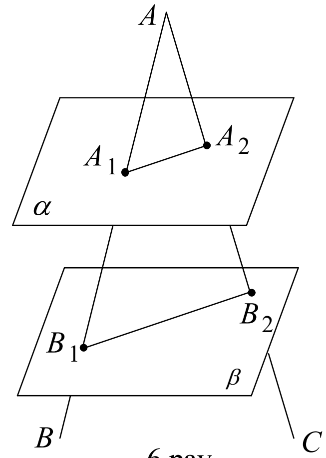
10 teorema. Jei plokštumos α ir β susikerta, tiesė a yra plokštumoje α ir ji lygiagreti su plokštuma β, tai tiesė a yra lygiagreti su plokštumų α ir β susikirtimo tiese.

11 teorema. Jei plokštuma kerta dvi lygiagrečias plokštumas, tai susikirtimo tiesės yra lygiagrečios.

Sakykime, kad tiesė a kerta plokštumą α taške A (4 pav.). Iš bet kurio tiesės taško M nuleiskime statmenį į plokštumą α; šis statmuo kerta plokštumą α taške M', kuris vadinamas taško M ortogonaliąja projekcija plokštumoje α. Visų tiesės a taškų ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α yra tiesėje a', kuri vadinama tiesės a ortogonaliąja projekcija plokštumoje α. Kampas φ tarp tiesės a ir jos ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α yra vadinamas *kampu tarp tiesės a ir plokštumos α*.

2 pavyzdys. Trikampiai ABC ir DBC yra skirtingose plokštumose, kraštinė BC yra jų bendra kraštinė, taškai M, H, K yra atitinkamai atkarpų BD, CD, AC vidurio taškai (5 pav.). Per taškus M, H, K nubrėžta plokštuma kerta tiesę AB taške P. Įrodysime, kad atkarpos PH ir MK susikerta viename taške ir jame dalijasi pusiau.

Sprendimas. Kadangi taškai M ir H yra trikampio BCD kraštinių BD ir CD vidurio taškai, tai atkarpa MH yra šio trikampio vidurinė linija, todėl $BC \parallel MH$ ir $MH = \frac{1}{2}BC$. Plokštumoje, einančioje per taškus B, C, D yra tiesė MH, lygiagreti su plokštumos, einančios per taškus A, B, C tiese BC, todėl pagal 9 teoremą tiesė MH lygiagreti su plokštuma, einančia per taškus A, B, C. Lygiai taip pat plokštumoje, einančioje per taškus M, H, K yra tiesė MH, lygiagreti su plokštuma, einančia per taškus A, B, C, tai pagal 10 teoremą šių plokštumų sankirtos tiesė KP yra lygiagreti su tiese MH, todėl $BC \parallel KP$. Kadangi taškas K yra atkarpos AC vidurio taškas, tai atkarpa KP yra trikampio ABC vidurinė linija, todėl $BC \parallel KP$ ir $KP = \frac{1}{2}BC$. Keturkampio $MPKH$ priešingos kraštinės MN ir KP yra lygios ir lygiagrečios, taigi šis keturkampis yra lygiagretainis. Iš čia ir išplaukia uždavinio tvirtinimas.



6 pav.

3 pavyzdys. Lygiagrečios plokštumos α ir β kampo BAC kraštinę AB kerta taškuose A_1 ir B_1, o to kampo kraštinę AC - taškuose A_2 ir B_2 (6 pav.). Rasime AB_1 ir A_2B_2, jei $A_1B_1 = 2A_1A$, $A_1B_1 = 12$, $AA_2 = 5$.

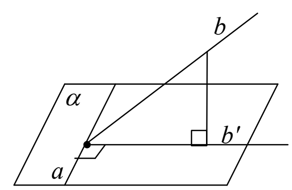
Sprendimas. Iš sąlygos gauname, kad $A_1A = \frac{1}{2}A_1B_1 = 6$. Taškai A, A_1, A_2, B_1, B_2 yra vienoje plokštumoje γ. Ši plokštuma kerta dvi lygiagrečias plokštumas α ir β lygiagrečiomis tiesėmis (11 teorema), taigi $A_1A_2 \parallel B_1B_2$. Taikydami Talio teoremą gauname lygybę $\frac{AA_1}{A_1B_1} = \frac{AA_2}{A_2B_2}$, iš kurios išplaukia, kad $A_2B_2 =$ $= 10$.

Tiesė a yra vadinama statmena plokštumai α, jei ji statmena bet kuriai tos plokštumos tiesei.

11 teorema. Tiesė yra statmena plokštumai tada ir tik tada, kai ji statmena dviem susikertančioms tos plokštumos tiesėms.

12 teorema. Per bet kurį tašką A eina vienintelė tiesė a, statmena duotajai plokštumai α.

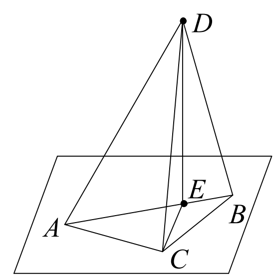
12 teorema (trijų statmenų teorema). Plokštumos tiesė a yra statmena tiesei b tada ir tik tada, kai ji statmena tiesės b ortogonaliajai projekcijai toje plokštumoje (7 pav.).



7 pav.

4 pavyzdys. Stačiojo trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta į įžambinę, lygi 5, taškas D nėra trikampio plokštumoje ir nuo kiekvienos trikampio viršūnės nutolęs vienodu atstumu lygiu 10. Rasime taško D atstumą iki trikampio plokštumos.

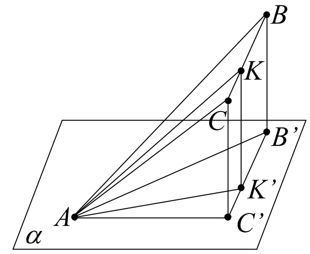
Sprendimas. Sakykime, kad taško D ortogonalioji projekcija trikampio ABC, $\angle C = 90^0$ plokštumoje yra taškas E, statieji trikampiai AED, BED, CED yra lygūs (jų statinis ED yra bendras, įžambinės $DA = DB = DC$ yra lygios pagal sąlygą). Iš trikampių lygumo išplaukia, kad $AE = EC = EB$, taigi taškas E yra vienodai nutolęs nuo trikampio ABC viršūnių, todėl jis yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras – įžambinės AB vidurio taškas. Iš čia išplaukia, kad atkarpa CE yra stačiojo trikampio ABC pusiaukraštinė, išvesta į įžambinę (8 pav.), taigi ieškomasis atstumas lygus $DE = \sqrt{DC^2 - CE^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.



8 pav.

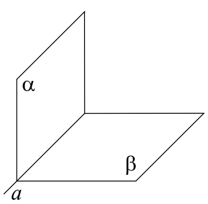
5 pavyzdys. Per smailiojo trikampio ABC viršūnę A išvesta plokštuma α, lygiagreti su tiese BC ir nutolusi nuo jos atstumu lygiu 5. Taškai B' ir C' yra taškų B ir C ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α, $AB' = 13$, $AC' = 15$, $BC = 14$. Rasime trikampio ABC plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad atkarpa AK yra trikampio ABC aukštinė, o taškas K' yra taško K ortogonalioji projekcija plokštumoje α (9 pav.). Kadangi atkarpa $B'C'$ yra kraštinės BC ortogonalioji projekcija plokštumoje α, tai $BC = B'C' = 14$, atkarpų BB' ir CC' ilgiai lygūs plokštumos α atstumui iki tiesės BC, taškas K' yra atkarpoje $B'C'$, o atkarpa AK' yra aukštinės AK ortogonalioji projekcija šioje plokštumoje, $KK' = BB' = CC' = 5$. Kadangi tiesė BC yra statmena tiesei AK, tai pagal trijų statmenų teoremą ji statmena ir jos projekcijai - tiesei AK'. Kadangi tiesės BC ir $B'C'$ yra lygiagrečios, tai ir tiesė $B'C'$yra statmena tiesei AK', taigi atkarpa AK' yra trikampio $AB'C'$ aukštinė. Šios aukštinės ilgį rasime žymėdami $B'^{K'} = x$, tuomet $C'K' = 14 - x$. Statiesiems trikampiams $AB'K'$ ir $AC'K'$ taikydami Pitagoro teoremą gauname, kad $AK'^2 = 13^2 - x^2 = 15^2 - (14—x)^2$. Iš lygties $169 - x^2 = 225 - (14 - x)^2$ randame, kad $x = 5$, $AK' = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, $AK = \sqrt{AK'^2 + KK'^2} = \sqrt{12^2 + 5^3} = 13$, todėl ieškomasis plotas $S = \frac{1}{2} BC \cdot AK = 91$.

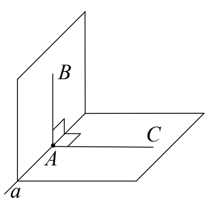


9 pav.

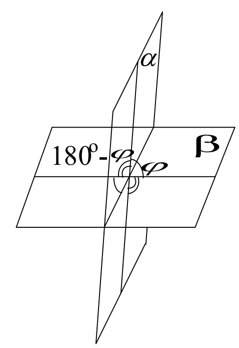
Dvisienį kampą sudaro dvi pusplokštumės, turinčios bendrą kontūro tiesę (10 pav.). Tos pusplokštumės vadinamos dvisienio kampo sienomis, o bendroji jų kontūro tiesė – dvisienio kampo briauna. Sakykime, kad dvisienio kampo briaunoje – tiesėje a – pažymime bet kurį tašką A ir kiekvienoje kampo sienoje išvedame spindulius AB ir AC, statmenus tiesei a (11 pav.). Kampas CAB yra vadinamas nagrinėjamo dvisienio kampo *tiesiniu kampu*. Visi dvisienio kampo tiesiniai kampai yra lygūs (t. y. nepriklauso nuo taško $A \in a$ parinkimo). Dvisienio kampo didumu vadinamas jo *tiesinio kampo didumas*.



10 pav.



11 pav.



12 pav.

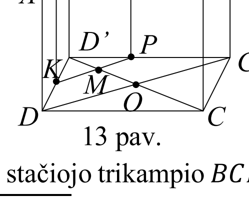
Dvi nelygiagrečios plokštumos α ir β sudaro keturis dvisienius kampus. Jei vieno jų didumas φ, tai kitų didumai lygūs $180^0 - \varphi$, φ, $180^0 - \varphi$ (12 pav.). Jei $\varphi = 90^0$, tai visi keturi kampai yra statieji, tuomet plokštumos α ir β yra statmenos.

13 teorema. Jei plokštumoje α yra tiesė a, statmena plokštumai β, tai plokštumos α ir β yra statmenos.

14 teorema. Jei plokštuma γ yra statmena dviem susikertančioms plokštumoms α ir β, tai ji yra statmena plokštumų α ir β sankirtos tiesei.

6 pavyzdys. Stačiakampio gretasienio $ABCDA'B'C'D'$ siena $DD'C'C$ yra kvadratas, taškas M yra atkarpoje $D'C$ ir $D'M{:}\,MC = 1 : 5$. Nubrėšime gretasienio pjūvį plokštuma, einančia per tašką M ir statmena plokštumoms BCD' ir DCC'. Rasime gautojo pjūvio plotą, jei $DD' = 6, BD' = \sqrt{88}$.

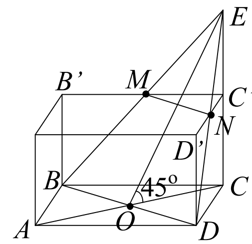
Sprendimas. Sprendžiant šį uždavinį patogiau nusibraižyti brėžinį taip, kad siena $DD'C'C$ būtų gretasienio pagrindas (13 pav.). Plokštumos $DCC'D'$ ir $BCD'A'$ yra statmenos, tiesė CD' yra jų sankirtos tiesė. Kadangi pjūvio plokštuma yra statmena plokštumoms $DCC'D'$ ir $BCD'A'$, tai ši plokštuma turi būti statmena tiesei CD' (14 teorema). Taigi pjūvio plokštumos ir gretasienio pagrindo plokštumos sankirtos tiesė yra statmena tiesei CD', taigi ji lygiagreti su tiese DC'. Todėl pjūvio plokštuma kerta pagrindo plokštumą $DD'C'C$ tiese KP, lygiagrečia su kvadrato įstrižaine DC', čia $K \in DD'$, $P \in C'D'$. Kadangi pjūvio plokštuma yra statmena gretasienio pagrindui $DCC'D'$, tai ji kerta sienas $ADD'A'$ ir $A'B'C'D'$ tiesėmis KQ ir PR, statmenomis plokštumai $DCC'D'$, čia $Q \in AA'$, $R \in A'B'$. Taigi ieškomasis pjūvis yra stačiakampis $KPRQ$. Iš stačiojo trikampio BCD' randame vieną šio stačiakampio kraštinę $KQ = CB = \sqrt{D'B^2 - D'C^2} = \sqrt{88 - \left(6\sqrt{2}\right)^2} = 4$. Jei taške O



13 pav.

susikerta pagrindo įstrižainės DC' ir CD', o $D'M{:}MC = 1:5$, tai $D'M{:}D'C = 1{:}6$, $D'M{:}D'O = D'M{:}\frac{1}{2}D'C = 1{:}3$. Iš trikampių KMD' ir DOD' panašumo gauname, kad $KM : DO = KP : DC' = D'M{:}D'O = 1:3$, todėl $KP = \frac{1}{3}DC' = \frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Taigi ieškomasis plotas $S = 4\cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

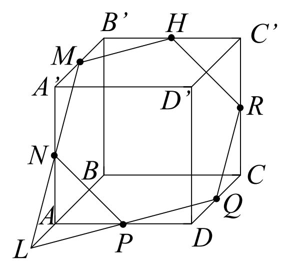
7 pavyzdys. Stačiakampio gretasienio pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinės ilgis lygus 2, o gretasienio aukštinė lygi 1. Per pagrindo įstrižainę išvesta plokštuma, kuris su pagrindo plokštuma sudaro 45^0 kampą. Rasime gautojo pjūvio plotą.



14 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad stačiakampio gretasienio $ABCDA'B'C'D'$ pagrindo $ABCD$ kraštinės $AB = AD = 2$, aukštinė $AA' = 1$. Sakykime, kad taškas O yra kvadrato $ABCD$ centras, per įstrižainę BD einanti pjūvio plokštuma kerta tiesę CC' taške E. Atkarpa OC yra atkarpos OE ortogonalioji projekcija pagrindo plokštumoje, o $OC \perp BD$, taigi pagal trijų statmenų teoremą išplaukia, kad $EO \perp BD$, todėl kampas EOC yra dvisienio kampo tarp pagrindo plokštumos ir pjūvio plokštumos tiesinis kampas, taigi $\angle EOC = 45^0$. Iš čia gauname, kad statusis trikampis EOC yra lygiašonis, $OC = EC = \sqrt{2} > CC' = 1$, taigi taškas E yra kraštinės CC' tęsinyje (14 pav.). Jei pjūvio plokštuma gretasienio kraštines $B'C'$ ir $D'C'$ kerta atitinkamai taškuose M ir N, tai trapecija $BDNM$ yra ieškomasis pjūvis. Kadangi trikampiai EMN ir EBD yra panašieji, tai $S_{EMN}{:}S_{EBD} = EM^2 : EB^2$. Iš trikampių EMC' ir EBC panašumo randame, kad $EM : EB = EC'{:}EC = (EC - CC'){:}EC = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$, taigi $S_{EMN} = (\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}})^2 S_{EBD}$. Kadangi $OE = \frac{OC}{\cos 45^0} = 2$, tai $S_{EBD} = \frac{1}{2}\cdot BD\cdot OE = 2\sqrt{2}$, todėl $S_{EMN} = (\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}})^2\cdot 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 4$, o ieškomasis plotas $S = S_{EBD} - S_{EMN} = 2\sqrt{2} - (3\sqrt{2} - 4) = 4 - \sqrt{2}$.

8 pavyzdys. Taškai M, H ir P yra kubo $ABCDA'B'C'D'$ briaunų $A'B', B'C'$ ir AD vidurio taškai (15 pav.). Nubrėšime kubo pjūvį plokštuma, einančia per taškus M, H ir P. Įrodysime, kad plokštumos, einančios per taškus M, H, P ir B, D, D' yra statmenos. Rasime kubo kraštinės ilgį, jei gautojo pjūvio perimetras lygus $12\sqrt{2}$.



15 pav.

Sprendimas. Visų pirma nubrėšime duotąjį pjūvį. Kadangi pjūvio plokštuma dvi lygiagrečias plokštumas $ABCD$ ir $A'B'C'D'$ kerta lygiagrečiomis tiesėmis (11 teorema), tai per tašką P nubrėžę tiesę, lygiagrečią su tiese MH, gauname jos sankirtos su tiese CD tašką Q, kuriame pjūvio plokštuma kerta tiesę CD, o gretasienio sieną $ABCD$ pjūvio plokštuma kerta tiese PQ. Tiesių AB ir PQ sankirtos taškas L yra taškas, kuriame pjūvio plokštuma kerta gretasienio briauną AB, o tiesių AA' ir ML sankirtos taškas N yra pjūvio plokštumos ir briaunos AA' sankirtos taškas. Kadangi pjūvio plokštuma lygiagrečias plokštumas $ABB'A'$ ir $DCC'D'$ kerta lygiagrečiomis tiesėmis, tai nubrėžę tiesę QR, lygiagrečią su tiese NM, gauname pjūvio plokštumos ir kubo briaunos CC' sankirtos tašką R. Taigi šešiakampis $MHRQPN$ yra ieškomasis pjūvis. Pažymėkime kubo kraštinės ilgį x. Kadangi $PQ \parallel MH \parallel A'C' \parallel AC$, tai atkarpa PQ yra trikampio ADC vidurinė linija, taigi $DQ = \frac{x}{2}$. Stačiųjų trikampių PDQ ir PAL statiniai PD ir PA yra lygūs, smailieji kampai prie viršūnės P irgi lygūs, todėl iš šių trikampių lygumo gauname, kad $AL = DQ = \frac{x}{2}$. Analogiškai iš stačiųjų trikampių NAL ir $NA'M$ lygumo randame, kad $AN = NA' = \frac{x}{2}$. Kadangi $DR \parallel NM \parallel AB' \parallel DC'$, tai $CR = RC' = \frac{x}{2}$. Taigi taškai Q, R, N yra kubo briaunų DC, CC', AA' vidurio taškai, todėl visos pjūvio kraštinės yra lygios kubo sienos įstrižainės pusei $\frac{x\sqrt{2}}{2}$. Pagal sąlygą šešiakampio perimetras $6\cdot\frac{x\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$, taigi $x = 4$. Kadangi plokštumos, einančios per taškus M, H, P, tiesė HM yra statmena dviem plokštumos BDD' tiesėms $B'D'$ ir BB', tai pagal 11 teoremą tiesė HM yra statmena plokštumai BDD'. Tuomet pagal 13 teoremą plokštumos MHP ir BDD' yra statmenos.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Tiesės a ir b yra lygiagrečios, tiesė a kerta plokštumą α taške A, tiesė c yra lygiagreti su tiese b. Ar tiesė c gali priklausyti plokštumai α? Atsakymą pagrįskite.

2. Tiesė a kerta plokštumą, einančią per taškus A, B ir C, taške A. Taškai M ir N yra tiesėje a, o tsaškai P ir Q – tiesėje BC. Nustatykite tiesių MP ir NQ tarpusavio padėtį.

3. Trikampis ADP ir trapecija $ABCD, BC \parallel AD$ yra skirtingose plokštumose, jie turi bendrą kraštinę AD. Per trapecijos pagrindą BC ir atkarpos PD vidurio tašką K išvesta plokštuma, kuri kerta atkarpą AP taške M. Raskite atkarpos MK ilgį, jei $AD = 10$.

4. Dviejų atkarpų, esančių tarp lygiagrečių plokštumų, ilgių santykis yra $2:3$, o kampų, kuriuos šios atkarpos sudaro su minėtomis plokštumomis, didumų santykis lygus $1:2$. Raskite tuos kampus.

5. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = BC = 10$, $AC = 12$, taškas K yra vienodai nutolęs nuo tiesių AB, BC, AC, jo atstumas iki trikampio plokštumos lygus 4. Raskite atstumą nuo taško K iki tiesių AB, BC, AC.

6. Rombo $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 4, kampas A lygus 60^0. Nubrėžta rombo plokštumai statmena atkarpa AE, taško E atstumas iki tiesės CD lygus 4. Raskite atstumą nuo taško E iki rombo plokštumos.

7. Per trikampio MHP viršūnę M išvesta plokštuma β lygiagreti su tiese HP ir nutolusi nuo šios tiesės atstumu lygiu $\sqrt{15}$. Taškai G ir Q yra atitinkamai taškų H ir P ortogonaliosios projekcijos plokštumoje β. Raskite trikampio MGQ plotą, jei $MH = 17, PM = 10, HP = 9$.

8. Stačiakampio gretasienio $ABCDA'B'C'D'$ pagrindas $ABCD$ yra kvadratas, kurio kraštinės ilgis lygus 4, gretasienio įstrižainės AC' ilgis lygus $4\sqrt{6}$. Pagrindo įstrižainėje AC yra taškas K toks, kad $AK : KC = 1 : 3$. Nubrėžkite gretasienio pjūvį plokštuma, einančia per tašką K ir statmena plokštumoms ABC ir $AA'C$. Apskaičiuokite gautojo pjūvio plotą.

9. Stačiakampio gretasienio pagrindo kraštinių ilgiai yra 1 ir 2, o gretasienio aukštinė lygi 3. Per pagrindo įstrižainę išvesta plokštuma, kuri su pagrindo plokštuma sudaro 60^0 kampą. Raskite gautojo pjūvio plotą.

10. Kubo $ABCDA'B'C'D'$ įstrižainės AC' ilgis lygus $2\sqrt{3}$, taškai M, H ir P yra briaunų $B'C', D'C'$ ir DD' vidurio taškai. Nubrėžkite kubo pjūvį plokštuma, einančia per taškus M, H, P ir suraskite šio pjūvio perimetrą.

IV. SEKOS

Teorinę medžiagą parengė bei ketvirtąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis (VU)

Šioje jauniesiems matematikams skirtoje temoje kalbėsime tik apie begalines skaičių sekas, todėl jas vadinsime tiesiog sekomis.

Kiekvieną (begalinę) realiųjų skaičių seką galima apibūdinti kaip kurią nors funkciją *f*, apibrėžtą natūraliųjų skaičių aibėje $\mathbb{N}$. Šios funkcijos reikšmės $f(1)$, $f(2)$, $f(3), \ldots$ yra vadinamos atitinkamai *pirmu, antru, trečiu ir t. t. sekos nariu*. Reikšmė $f(n),\ n \in \mathbb{N}$, vadinama *bendruoju sekos nariu*.

Paprastai skaičių sekos nariai žymimi kuria nors viena raide su indeksu, pavyzdžiui, x_n, y_n, a_n, b_n ir pan., o pačios sekos užrašomos vardijant jų narius:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots;$$

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots;$$

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots;$$

$$b_1, b_2, , b_3, \ldots, b_n, \ldots.$$

Gana dažnai sekos nusakomos glaustai - užrašant skliaustuose (...) bendrąjį narį: (x_n), (y_n), (a_n), (b_n).

Seka (x_n) vadinama *didėjančiąja seka*, jeigu $x_{n+1} > x_n$, kai $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. Ji vadinama *mažėjančiąja seka,* jeigu $x_{n+1} < x_n$, kai $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Seka (x_n) vadinama *monotonine seka*, jeigu ji yra arba didėjančioji seka, arba mažėjančioji seka. Kartais taip apibūdinta monotoninė seka vadinama *griežtai monotonine seka.*

Skaičius a vadinamas *sekos* (x_n) *riba*, jeigu skirtumo $x_n - a$ modulis $|x_n - a|$ neribotai didėjant n pasidaro kiek norima artimas nuliui; rašoma: $a = \lim x_n$.

Skaičiaus $|x_n - a|$ artumas nuliui nusakomas nelygybe $|x_n - a| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (čia ε yra graikų abėcėlės raidė epsilon), o neribotas indekso n didėjimas $-$ nelygybe $n > E, E \in \mathbb{N}$.

Matematiškai tikslesnis sekos ribos apibrėžimas yra toks: skaičius a vadinamas sekos (x_n) riba, jeigu kiekvienam (kiek norimai mažam) teigiamam skaičiui ε yra toks natūralusis skaičius E, kad būtų

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ kai } n > E.$$

Seka (x_n) vadinama *nykstamąja seka*, jeigu $\lim x_n = 0$.

Pereikime prie uždavinių.

1 pavyzdys. Užrašykime pirmuosius 5 sekos narius, jei jos bendrasis narys yra:

1) $x_n = \frac{1+(-1)^n \cdot n}{n+1}$;

2) $x_n = 2x_{n-1} + 1,\ x_1 = 2.$

Sprendimas. 1) Pagal formulę $x_n = \frac{1+(-1)^n \cdot n}{n+1}$ gauname:

$$x_1 = \frac{1+(-1)\cdot 1}{1+1} = 0;$$

$$x_2 = \frac{1+(-1)^2\cdot 2}{2+1} = 1;$$

$$x_3 = \frac{1+(-1)^3 \cdot 3}{3+1} = -\frac{1}{2};$$

$$x_4 = \frac{1+(-1)^4 \cdot 4}{4+1} = 1;$$

$$x_5 = \frac{1+(-1)^5 \cdot 5}{5+1} = -\frac{2}{3}.$$

2) Kadangi $x_1 = 2$, tai pagal formulę $x_n = 2x_{n-1} + 1$ gauname, kad

$$x_2 = 2x_1 + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5;$$

$$x_3 = 2x_2 + 1 = 2 \cdot 5 + 1 = 11;$$

$$x_4 = 2x_3 + 1 = 2 \cdot 11 + 1 = 23;$$

$$x_5 = 2x_4 + 1 = 2 \cdot 23 + 1 = 47.$$

2 pavyzdys. Patikrinkime, ar seka (x_n), $x_n = \frac{n^2+1}{n^2+2}$, yra monotoninė seka.

Sprendimas. Skaičiuodami skirtumą $x_{n+1} - x_n$, gauname, kad

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2+2} - \frac{n^2+1}{n^2+2} = \frac{(n^2+2n+2)(n^2+2)-(n^2+1)(n^2+2n+3)}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} = \frac{2n+1}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} > 0,$$

todėl seka yra didėjančioji seka, taigi monotoninė.

3 pavyzdys. Įsitikinkime, kad seka (x_n), $x_n = 2 + (-1)^n$, nėra monotoninė seka.

Sprendimas. Lengva matyti, kad

$$x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1,$$

ir to pakanka, kad suprastume, jog seka nėra monotoninė.

Dabar pagvildenkime sekos (x_n) bendrojo nario x_n nusakymo vien tik indeksu n problemą, kai žinoma x_n priklausomybė nuo pirmesnių (vieno ar kelių) sekos narių. Pavyzdžiui, $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$, kai $n \geq 3$, $x_1 = x_2 = 2$.

Aišku, kad pagal šią formulę (ji vadinama *rekurenčiąja formule*) visai nesunku sužinoti, koks yra, sakykim, septintasis sekos narys x_7. Bet tikrai nusibostų ieškoti 37-o sekos nario x_{37}, nes reikėtų sužinoti visus prieš jį esančius narius.

Seka (x_n), kuri nusakoma rekurenčiąja formule

$$x_{n+2} = px_{n-1} + qx_n,\ n \geq 1;\ p, q - \text{ (nelygūs nuliui) realieji skaičiai,}$$

vadinama *antros eilės tiesine homogenine rekurenčiąja seka.*

Šiuo atveju ieškoma *rekurenčiosios lygties*

$$x_{n+2} - px_{n+1} - qx_n = 0 \quad (1)$$

sprendinių, kurių pavidalas yra $x_n = r^n$. Tada $x_{n+1} = r^{n+1}$, $x_{n+2} = r^{n+2}$, todėl gaunama lygtis

$$r^{n+2} - pr^{n+1} - qr^n = 0,$$

o iš jos – lygtis

$$r^2 - pr - q = 0, \quad (2)$$

kuri vadinama *charakteringąja lygtimi.*

Galimi trys atvejai:

1) $D = p^2 + 4q > 0$;

2) $D = p^2 + 4q = 0$;

3) $D = p^2 + 4q < 0$.

Pirmu atveju (2) lygtis turi du sprendinius r_1 ir r_2, antru atveju – vieną sprendinį r, o trečiu atveju realiųjų sprendinių neturi (jo toliau nenagrinėsime).

Pagal gautus charakteringosios lygties $r^2 - pr - q = 0$ sprendimo rezultatus sudaromas rekurenčiosios lygties $x_{n+2} - px_{n+1} - qx_n = 0$ bendrasis sprendinys:

1) $x_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$, jei $D > 0$; (3)

2) $x_n = C_1 \cdot r^n + C_2 \cdot nr^n$, jei $D = 0$. (4)

Čia C_1 ir C_2 $-$ bet kurie realieji skaičiai. Jų reikšmės randamos pasinaudojus pirmųjų dviejų sekos narių x_1 ir x_2 reikšmėmis.

4 pavyzdys. Išspręskime rekurenčiąją lygtį

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n, \tag{5}$$

jei $x_1 = x_2 = 2$.

Sprendimas. Ieškodami sprendinių, kurių pavidalas yra $x_n = r^n$, gauname charakteringąją lygtį $r^{n+2} = 2r^{n+1} + 3r^n$, o iš jos $-$ lygtį $r^2 - 2r - 3 = 0$, kuri turi du realiuosius sprendinius: $r_1 = -1, r_2 = 3$. Todėl (pagal (3)) bendrasis (5) lygties sprendinys yra

$$x_n = (-1)^n C_1 + C_2 \cdot 3^n;\ C_1, C_2 \text{ – realieji skaičiai.}$$

Iš sąlygos $x_1 = x_2 = 2$ gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2 = -C_1 + 3C_2, \\ 2 = \quad C_1 + 9C_2, \end{cases}$$

kuri turi vienintelį sprendinį $-$ $C_1 = -1,\ C_2 = \frac{1}{3}$.

Vadinasi,

$$x_n = (-1)^n \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 3^n = (-1)^{n+1} + 3^{n-1}$$

yra vienintelis (5) lygties sprendinys, kuris tenkina sąlygą $x_1 = x_2 = 2$.

5 pavyzdys. Įrodykime, kad seka (x_n), $x_n = \frac{n+1}{n^2+2n+7}$, yra nykstamoji seka.

Sprendimas. Siekdami įrodyti, kad $\lim \frac{n+1}{n^2+2n+7} = 0$, pasirinkime bet kurį teigiamą skaičių ε (ε > 0) ir spręskime nelygybę

$$\frac{n+1}{n^2+2n+7} < \varepsilon, \tag{6}$$

nes $\left|\frac{n+1}{n^2+2n+7} - 0\right| = \frac{n+1}{n^2+2n+7}$.

Pažymėję $t = n + 1$, gausime, kad $n^2 + 2n + 7 = t^2$+6, todėl (6) nelygybė įgis pavidalą

$$\frac{t}{t^2+6} < \varepsilon. \tag{7}$$

Spręsdami ją gausime:

$$\frac{t}{t^2+6} - \varepsilon < 0,$$

$$\frac{-\varepsilon t^2+t-6\varepsilon}{t^2+6} < 0,$$

$$\varepsilon t^2 - t + 6\varepsilon > 0,$$

$$\left(\sqrt{\varepsilon}\, t - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 + 6\varepsilon - \frac{1}{4\varepsilon} > 0,$$

$$\left(\sqrt{\varepsilon}\, t - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 + \frac{24\varepsilon^2-1}{4\varepsilon} > 0. \tag{8}$$

Jei $24\varepsilon^2 - 1 > 0$, tai (8) nelygybė (todėl ir (7)) galioja esant bet kuriai t reikšmei, taigi esant bet kuriam natūraliajam skaičiui n (nes $t = n + 1$).

Iš čia darome išvadą, kad pasirinkus $\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ (6) nelygybė galioja esant bet kuriam natūraliajam skaičiui n.

Pasirinkus $\varepsilon \leq \frac{1}{2\sqrt{6}}$, lygties

$$\left(\sqrt{\varepsilon}\, t - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 + \frac{24\varepsilon^2-1}{4\varepsilon} = 0$$

sprendiniai būtų du (išskyrus atvejį $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{6}}$):

$$\left(\sqrt{\varepsilon}\, t - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 = \frac{1-24\varepsilon^2}{4\varepsilon},$$

$$\sqrt{\varepsilon}\, t - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} = \pm\frac{\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\sqrt{\varepsilon}},$$

$$\sqrt{\varepsilon}\, t = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \pm \frac{\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\sqrt{\varepsilon}},$$

$$t = \frac{1\pm\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\sqrt{\varepsilon}},$$

$$t_1 = \frac{1-\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\varepsilon},\ t_2 = \frac{1+\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\varepsilon}.$$

Vadinasi, (7) nelygybės sprendinių aibė yra $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\varepsilon};\ +\infty\right)$. O turint mintyje, kad $t \geq 2$, ji susiaurėja iki aibės

$$\left[2; \frac{1-\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\varepsilon}; +\infty\right)$$

Aišku, kad pasirinkę bet kurį natūralųjį skaičių, priklausantį intervalui $\left(\frac{1+\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\varepsilon};\ +\infty\right)$ ir pasižymėję jį E_1, gausime, jog

$$\frac{t}{t^2+6} < \varepsilon,\ \text{jei tik } t > E_1.$$

Kadangi $n = t - 1$, tai pasirinkę $E = E_1 + 1$, galėsime teigti, kad

$$\frac{n+1}{n^2+2n+7} < \varepsilon, \text{jei tik } n > E.$$

O tai ir reiškia, kad $lim \frac{n+1}{n^2+2n+7} = 0$ ir todėl seka (x_n), $x_n = \frac{n+1}{n^2+2n+7}$, yra nykstamoji seka.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Parašykite pirmuosius 7 sekos (x_n),

$$x_n = \frac{1}{3 - x_{n-1}}\,, \;\; n > 1,$$

narius, jei $x_1 = \frac{1}{2}$.

2. Parašykite pirmuosius 7 sekos (x_n),

$$x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}\,, \;\; x_1 = \frac{1}{2},$$

narius ir nuspręskite, kokia turėtų būti bendrojo nario x_n formulė.

3. Raskite mažiausią sekos (x_n) narį, jei

a) $x_n = n^2 - 5n + 1$; b) $x_n = \frac{n^3+1}{2n^3+3}$.

4. Įrodykite, kad (x_n) yra mažėjančioji seka, jei

$$x_n = \frac{n+3}{2n+1}.$$

5. Nustatykite, ar (x_n) yra monotoninė seka, jei

$$x_n = y_{n+2}, \;\; y_n = \frac{2^n}{n!}\,;$$

čia $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (skaičiaus n faktorialas).

6. Raskite sekos (x_n), bendrąjį narį, jei

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n, \;\; x_1 = 2 \;\text{ ir }\; x_2 = 5.$$

7. Raskite sekos (x_n), tenkinančios rekurenčiąją lygtį $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ ir sąlygą $x_1 = x_2 = 1$, bendrojo nario formulę.

8. Raskite rekurenčiosios lygties

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{1}{4}x_n$$

sprendinį, jei $x_1 = 1$ ir $x_2 = -\frac{1}{2}$.

9. Įrodykite, kad (x_n) yra nykstamoji seka, jei

$$x_n = \frac{7}{n+1}.$$

10. Įrodykite, kad $\lim x_n = 0$, jei

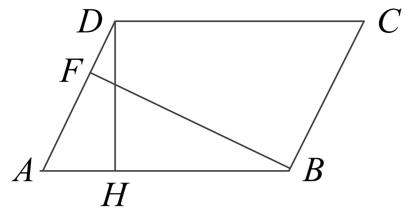
$$x_n = \frac{1}{n^2+5}.$$

V. PLOTŲ SKAIČIAVIMO UŽDAVINIAI

Teorinę medžiagą parengė bei penktąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

Matematikos pamokose mokėtės skaičiuoti paprasčiausių geometrinių figūrų – trikampių, lygiagretainių, trapecijų, skritulio ir jo dalių - plotus. Atlikdami šią užduotį, detaliau susipažinsite su kai kuriomis geometrinių figūrų plotų savybėmis, su plotų taikymu uždavinių sprendimui.

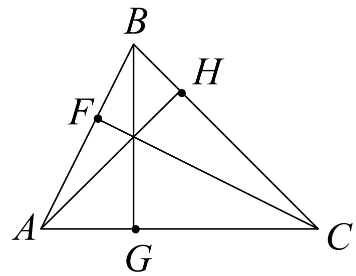
Priminsime, kad lygiagretainio plotas lygus jo kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės sandaugai: jei atkarpa DH yra iš lygiagretainio $ABCD$ viršūnės D į kraštinę AB (1 pav.) nubrėžta aukštinė, tai šio lygiagretainio plotas $S = AB \cdot DH$. Kadangi iš stačiojo trikampio ADH išplaukia, kad $DH = AD \sin\angle A$, tai lygiagretainio plotas lygus jo gretimų kraštinių ir kampo tarp jų sinuso sandaugai: $S = AB \cdot AD \sin\angle A$. Nubrėžkime lygiagretainio $ABCD$ aukštinę BF iš viršūnės B į kraštinę AD, tuomet $S = AD \cdot BF$. Iš lygybės $AB \cdot DH = AD \cdot BF$ išplaukia, kad $\frac{AB}{AD} = \frac{BF}{DH}$, t. y. lygiagretainio kraštinių ilgiai yra atvirkščiai proporcingi į jas nuleistų aukštinių ilgiams.



1 pav.

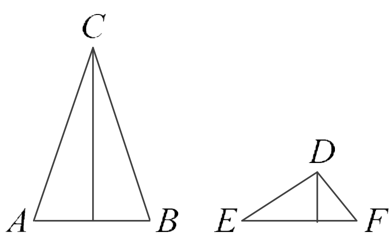
Kadangi trikampio ABC plotas lygus pusei lygiagretainio $ABCD$ ploto, tai trikampio plotas lygus jo kraštinės ir į ją nubrėžtos trikampio aukštinės sandaugos pusei, o taip pat trikampio plotas lygus dviejų jo kraštinių sandaugos pusei, padaugintai iš tų kraštinių sudaromo kampo sinuso. Atskiru atveju stačiojo trikampio plotas lygus jo statinių sandaugos pusei.

Jei trikampio kraštinių ilgiai $BC = a, AC = b, AB = c$, o į jas nuleistų aukštinių ilgiai atitinkamai yra lygūs $AH = h_a$, $BG = h_b$, $CF = h_c$ (2 pav.), tai jo plotui S teisingos lygybės $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, iš kurių išplaukia, kad trikampio kraštinių ilgiai yra atvirkščiai proporcingi į jas nubrėžtų aukštinių ilgiams: $a{:}\,b{:}\,c = \frac{1}{h_a}{:}\frac{1}{h_b}{:}\frac{1}{h_c}$.

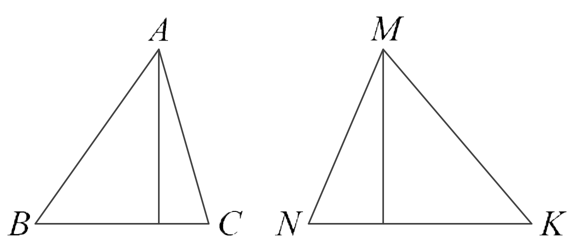


2 pav.

Dažnai uždavinių sprendimui padeda šios akivaizdžios trikampių plotų savybės:



3 pav.



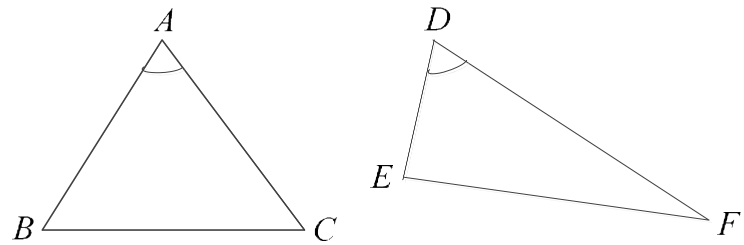
4 pav.

1) Jei trikampių ABC ir EFD kraštinės AB ir EF yra lygios (3 pav.), tai šių trikampių plotų santykis lygus iš viršūnių C ir D nubrėžtų aukštinių santykiui.

2) Jei trikampių ABC ir MNK aukštinės, nubrėžtos iš viršūnių A ir M yra lygios (4 pav.), tai šių trikampių plotų santykis lygus kraštinių BC ir NK santykiui.

3) Trikampio ABC kraštinėje BC esantis taškas M dalija trikampį į du trikampius ABM ir ACM, kurių plotų santykis lygus atkarpų BM ir CM santykiui. Atskiru atveju trikampio pusiaukraštinė dalija jį į du vienodo ploto trikampius.

4) Jei trikampių ABC ir DEF kampai A ir D yra lygūs (5 pav.), tai trikampių ABC ir DEF plotų santykis lygus jų kraštinių sandaugų $AB \cdot AC$ ir $DE \cdot DF$ santykiui: $\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DF}$.

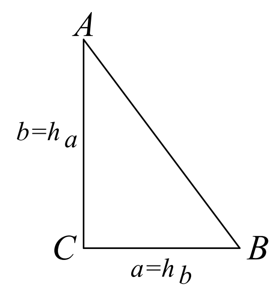


5 pav.

5) Panašiųjų trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui. Tai reiškia, kad panašiųjų trikampių plotų santykis lygus bet kurių atitinkamų tų trikampių atkarpų santykio kvadratui.

1 pavyzdys. Trikampio aukštinių ilgiai lygūs 12, 15, 20. Rasime trikampio plotą.

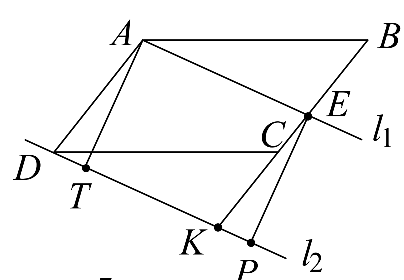
Sprendimas. Sakykime, kad trikampio ABC aukštinių ilgiai lygūs $h_a = 20,\ h_b = 15,\ h_c = 12$. Tada iš lygybės $ah_a = bh_b$ gauname, kad $a = \frac{h_b}{h_a} b = \frac{15}{20} b = \frac{3}{4} b$. Analogiškai iš lygybės $bh_b = ch_c$ turime, kad $c = \frac{h_b}{h_c} b = \frac{15}{12} b = \frac{5}{4} b$. Kadangi yra teisinga lygybė $a^2 + b^2 = c^2$, tai trikampis ABC yra statusis, kraštinė c yra jo įžambinė, o kraštinės b ir a yra statiniai, taigi $b = h_a,\ a = h_b$ (6 pav.), todėl trikampio plotas lygus $S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} h_a h_b = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 = 150$.



6 pav.

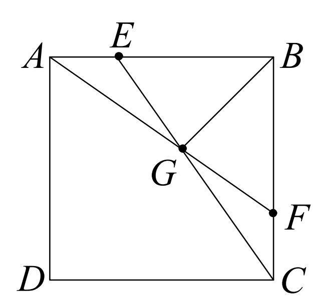
2 pavyzdys. Per lygiagretainio $ABCD$ viršūnę A nubrėžta tiesė l_1, kertanti kraštinę BC taške E. Per tašką D nubrėžta tiesė l_2, lygiagreti su tiese l_1, iš taškų A ir E nubrėžti statmenys AT ir EP tiesei l_2 (7 pav.). Įrodysime, kad stačiakampio $AEPT$ plotas lygus duotojo lygiagretainio plotui.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesės BC ir l_2 kertasi taške K. Trikampiai ABE ir DCK yra lygūs ($AB = DC$ pagal sąlygą, $\angle ABE = \angle DCK$ kaip atitinkamieji kampai tarp lygiagrečių tiesių $AB \parallel CD$ ir kirstinės BK, o $\angle BAE = \angle CDK$ kaip kampai su atitinkamai lygiagrečiomis kraštinėmis). Iš čia seka, kad duotojo lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus lygiagretainio $AEKD$ plotui. Statieji trikampiai ATD ir EPK taip pat lygūs, nes jų statiniai AT ir EP lygūs kaip atstumas tarp lygiagrečių tiesių l_1 ir l_2, o $\angle DAT = \angle KEP$ kaip kampai su atitinkamai lygiagrečiomis kraštinėmis. Kadangi stačiakampio $AEPT$ plotas gaunamas iš keturkampio $AEKT$ ploto atėmus trikampio EDK plotą, lygiagretainio $AEKD$ plotas gaunamas iš keturkampio $AEKT$ ploto atėmus trikampio ATD plotą, tai keturkampių $AEPT$ ir $AEKD$ plotai yra lygūs. Bet anksčiau įrodėme, kad lygiagretainio $AEKD$ plotas lygus lygiagretainio $ABCD$ plotui. Taigi stačiakampio $AEPT$ ir lygiagretainio $ABCD$ plotai yra lygūs.



7 pav.

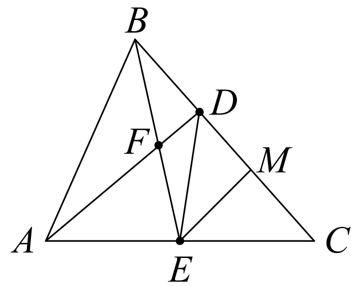
3 pavyzdys. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ligis lygus 10, taškai E ir F yra atitinkamai kraštinėse AB ir BC, tiesės AF ir CE susikerta taške G, trikampių ABF ir CBE plotai atitinkamai lygūs 20 ir 35. Rasime keturkampio $EBFG$ plotą (8 pav.).



8 pav.

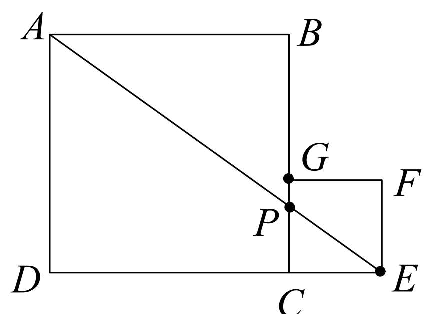
Sprendimas. Trikampių AEG, EGB, BGF ir FGC plotus pažymėkime atitinkamai x, y, z, w. Pagal sąlygą yra teisingos lygybės $x + y + z = 20$, $y + z + w = 35$. Trikampiai ABC ir ABF turi tą pačią aukštinę AB, todėl jų plotas lygus kraštinių BC ir BF santykiui: $\frac{BC}{BF} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABF}} = \frac{50}{20} = \frac{5}{2}$. Taigi $BF = \frac{2}{5}BC = 4, CF = 6$. Trikampių CGF ir BGF aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės G, yra vienodos, todėl jų plotų santykis lygus kraštinių CF ir BF santykiui: $\frac{w}{z} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, t. y. $w = \frac{3}{2}z$. Analogiškai $\frac{AB}{EB} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta EBC}} = \frac{50}{35} = \frac{10}{7}$, taigi $EB = \frac{7}{10}AB = 7,\ AE = 3,\ \frac{x}{y} = \frac{AE}{EB} = \frac{3}{7},\ x = \frac{3}{7}y$. Įrašę šias w ir x reikšmes, turime, kad $\frac{3}{7}y +$ $+ y + z = 20,\ y + z + \frac{3}{2}z = 35$. Iš čia išplaukia, kad $10y + 7z = 140,\ 2y + 5z = 70$. Sudėję šias lygybes, randame ieškomąjį plotą: $12y + 12z = 210,\ \ y + z = \frac{210}{12} = \frac{35}{2}$.

4 pavyzdys. Taškas E yra trikampio ABC kraštinės AC vidurys, taškas D yra kraštinėje BC ir $\frac{DC}{BD} = 2$. Atkarpos AD ir BE susikerta taške F. Rasime keturkampio $FDCE$ plotą, jei trikampio DBF plotas lygus 10 cm^2.



9 pav.

Sprendimas. Per tašką E nubrėžiame tiesę lygiagrečią su tiese AD, kuri kerta kraštinę BC taške M (9 pav.). Kadangi atkarpa EM yra trikampio CAD vidurio linija, tai iš $DC = 2BD$ gauname, kad $CM = MD = DB = \frac{1}{3}CB$. Kadangi atkarpa EM yra lygiagreti su atkarpa FD, tai pagal Talio teoremą $EF = FB$. Kadangi atkarpa DF yra trikampio EDB pusiaukraštinė, tai trikampio DEF plotas lygus trikampio BDF plotui, taigi $S_{\Delta DEF} = S_{\Delta DBF} = 10$, o trikampio EDB plotas lygus 20. Kadangi taškas D dalija trikampio EBC kraštinę BC santykiu $\frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}$, tai $\frac{S_{\Delta EDC}}{S_{\Delta EDB}} = \frac{DC}{DB} = 2$, todėl $S_{\Delta EDC} = 2S_{\Delta EDB} = 40$. Iš čia gauname, kad $S_{FDCE} =$ $= S_{\Delta ECD} + S_{\Delta EDF} = 50cm^2$.

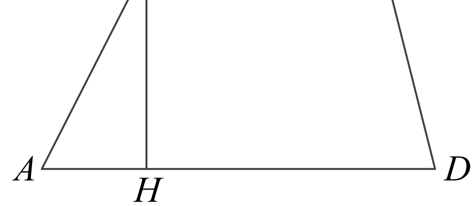


10 pav.

5 pavyzdys. Kvadrato $ABCD$ kraštinė lygi 16, kvadrato $CEFG$ kraštinė lygi 5, jo viršūnė G yra kraštinėje BC, o viršūnė $E -$ kraštinės DC tęsinyje už taško C. Tiesės AE ir BC susikerta taške P. Rasime keturkampio $PGFE$ plotą (10 pav.).

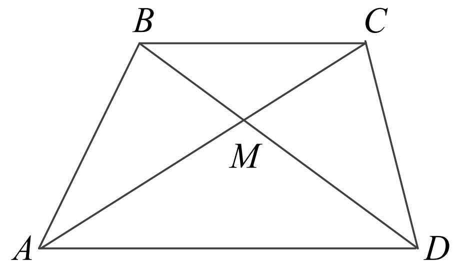
Sprendimas. Kadangi $DE = DC + CE = 16 + 5 = 21$, tai tg $\angle AED = \frac{AD}{DE} = \frac{16}{21} < 1$, tai $\angle AED < 45^0 = \angle CEG$, o taškas P yra kvadrato kraštinėje CG. Kadangi $AD \parallel PC$, tai statieji trikampiai ADE ir PCE yra panašieji. Panašiųjų figūrų plotai sutinka kaip jų atitinkamų atkarpų ilgių kvadratai, todėl $S_{\Delta PCE} : S_{\Delta ADE} = CE^2 : DE^2 = 5^2 : 21^2$. Kadangi trikampio ADE plotas lygus $S_{\Delta ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 21 = 168$, tai $S_{\Delta PCE} =$ $= \frac{25}{441} S_{\Delta ADE} = \frac{25}{441} \cdot 168 = \frac{200}{21}$. Taigi ieškomasis plotas $S_{PGFE} = S_{CEFG} - S_{\Delta PCE} = 25 - \frac{200}{21} = \frac{325}{21}$.

Sakykime, kad keturkampis $ABCD$ yra trapecija, kurios pagrindai yra AD ir BC, o aukštinė – atkarpa BH. (11 pav.). Trapecijos plotas lygus pagrindų sumos ir aukštinės sandaugos pusei: $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH$. Kadangi trapecijos vidurinė linija, jungianti jos šoninių kraštinių vidurio taškus, yra lygi trapecijos pagrindų sumos pusei, tai trapecijos plotas lygus jos vidurinės linijos ir aukštinės sandaugai.



11 pav.

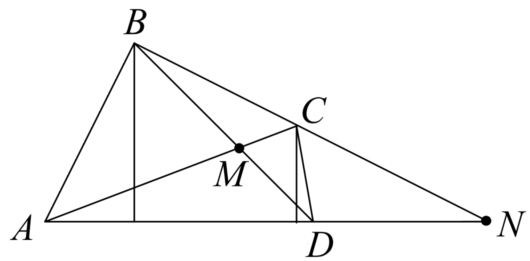
6 pavyzdys. Jei trapecijos $ABCD$, $AD \parallel BC$ įstrižainės AC ir BD susikerta taške M (12 pav.), tai trikampių ABM ir CDM plotai yra lygūs. Įrodysime tai.



12 pav.

Įrodymas. Iš tikrųjų, trikampių ABD ir ACD plotai yra lygūs, nes jų kraštinė AD yra bendra, o į ją nubrėžtos aukštinės yra lygios. Iš lygybės $S_{ABD} = S_{ACD}$ abiejų pusių atėmę trikampio ADM plotą, gauname lygybę $S_{ABM} = S_{CDM}$.

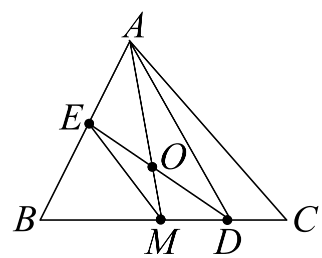
Pastebėkime, kad teisingas ir atvirkštinis teiginys: jei atkarpos AC ir BD susikerta taške M taip, kad trikampių ABM ir CDM plotai yra lygūs, tai tiesės AD ir BC yra lygiagrečios. Įrodymui tarkime, kad yra priešingai – tiesės AD ir BC susikerta taške N, nemažindami bendrumo tarkime, kad taškas C yra tarp taškų B ir N (13 pav.). Trikampių ACD ir ABD kraštinė AD yra bendra, o trikampio ABD aukštinė, nubrėžta į kraštinę AD yra ilgesnė už trikampio ACD aukštinę, nubrėžtą į kraštinę AD, todėl $S_{\Delta ACD} < S_{\Delta ABD}$. Atėmę iš abiejų nelygybės pusių trikampio AMD plotą, gauname tokią nelygybę: $S_{\Delta ACD} - S_{\Delta AMD} < S_{\Delta ABD} - S_{\Delta AMD}$, iš kurios išplaukia, kad $S_{\Delta CDM} < S_{\Delta ABM}$. Prieštara įrodo, kad tiesės AD ir BC yra lygiagrečios.



13 pav.

7 pavyzdys. Trikampio ABC plotas lygus 10 cm^2, atkarpa AM yra jo pusiaukraštinė, taškas D yra atkarpoje MC, per tašką M nubrėžta lygiagreti su tiese AD tiesė, kertanti kraštinę AB taške E (14 pav.). Rasime keturkampio $AEDC$ plotą.

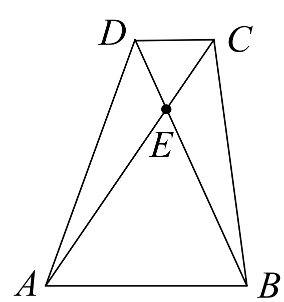
Sprendimas. Tarkime, kad atkarpos AM ir ED kertasi taške O. Kadangi atkarpa AM yra trikampio ABC pusiaukraštinė, tai trikampių ABM ir ACM plotai lygūs 5. Kadangi tiesės AD ir EM yra lygiagrečios, tai keturkampis $AEMD$ yra trapecija, todėl pagal 6 pavyzdžio rezultatą trikampių AOE ir MOD plotai lygūs. Iš čia gauname, kad $5 = S_{\Delta AMB} =$ $= S_{BEOM} + S_{\Delta AOE} = S_{BEOM} + S_{\Delta MOD} = S_{\Delta BED}$. Tuomet ieškomasis plotas $S_{AEDC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta BED} = 10 - 5 = 5$ cm^2.



14 pav.

8 pavyzdys. Iškiliojo keturkampio $ABCD$ kraštinės $AB = 9$ cm, $CD = 12$ cm, o įstrižainė $AC = 14$ cm. Keturkampio įstrižainės AC ir BD susikerta taške E, o trikampių AED ir BEC plotai yra lygūs (15 pav.). Rasime atkarpos AE ilgį.

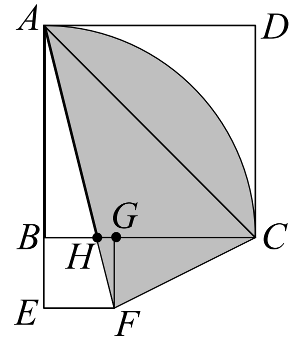
Sprendimas. Pagal 6 pavyzdžio rezultatą iš trikampių AED ir BEC plotų lygybės seka, kad tiesės AB ir CD yra lygiagrečios, taigi keturkampis $ABCD$ yra trapecija, todėl trikampiai AEB ir CED yra panašieji. Iš jų panašumo išplaukia, kad $\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CE} = \frac{AE}{AC-AE}$. Įrašę sąlygoje uždavinio duomenis, gauname lygtį $\frac{9}{12} = \frac{AE}{14-A}$, kurios sprendinys yra $AE = 6$ cm.



15 pav.

Skritulio, kurio spindulio ilgis lygus R, plotas yra lygus $S = \pi R^2$. Jei taškas O yra skritulio centras, o centrinio kampo AOB didumas lygus n^0, tai išpjovos AOB plotas lygus $S = \frac{\pi R^2 n}{360}$.

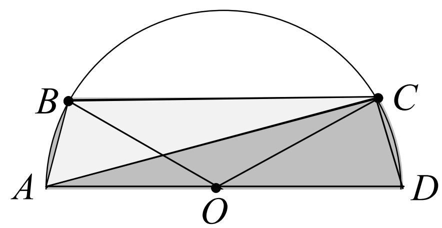
9 pavyzdys. Kvadrato $ABCD$ kraštinė lygi 6 cm., iš viršūnės B nubrėžtas ketvirtis apskritimo, einančio per taškus A ir C. Kvadrato $BEFG$ viršūnė G yra kraštinėje BC, o viršūnė E yra kraštinės AB tęsinyje už taško B (16 pav.). Rasime plokštumos dalies, kurią riboja apskritimo lankas AC , atkarpa CF ir atkarpa AF, plotą.



16 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad atkarpos AF ir BC kertasi taške H. Kaip ir 5 pavyzdyje įrodome, kad taškas H yra atkarpoje BG. Kadangi $\angle BAC = \angle EBF = 45^0$, tai tiesės AC ir BF yra lygiagrečios, todėl keturkampis $ACFB$ yra trapecija, atkarpos AF ir BC yra jos įstrižainės. Pagal 6 pavyzdžio rezultatą iš čia gauname, kad trikampių AHB ir CHF yra lygūs. Todėl ieškomosios figūros plotas lygus skritulio išpjovos BAC plotui $S = \frac{1}{4}\pi \cdot BC^2 = 9\ cm^2$.

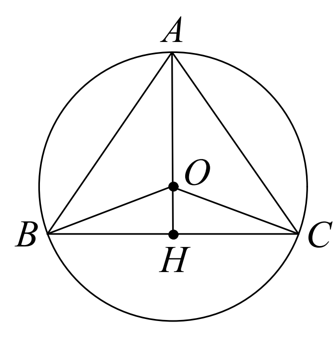
10 pavyzdys. Atkarpa AD yra pusskritulio skersmuo, taškai B ir C yra pusskritulyje taip, kad lankų AB ir CD didumai yra lygūs 30^0. Rasime kurią pusskritulio ploto dalį sudaro figūros, kurią riboja lankas AB ir atkarpa AB ir figūros, kurią riboja lankas CD ir atkarpos AD bei AC, plotas (17 pav.).



17 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas O yra skersmens AD vidurio taškas, o $OA = R$. Kadangi lankai AB ir CD yra lygūs, tai tiesės AD ir BC yra lygiagrečios. Kadangi trikampių ABC ir BOC kraštinė BC yra bendra, o aukštinės, nubrėžtos į kraštinę BC yra lygios (jos yra lygios atstumui tarp lygiagrečių tiesių AD ir BC), tai trikampių ABC ir OBC plotai yra lygūs. Iš čia seka, kad figūros, ribojamos lanku BC ir tiesėmis AB bei AC, plotas lygus skritulio išpjovos OBC plotui. Kadangi $\angle AOB = \angle DOC = 30^0$, tai $\angle BOC = 180^0 - 2 \cdot 30^0 = 120^0$, tai šios išpjovos plotas lygus trečdaliui skritulio plotui: $S_{išpjovos\ BOC} = S_1 = \frac{\pi R^2}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi R^2}{2}$. Kadangi pusskritulio plotas lygus $S_{pusskritulio} = \frac{\pi R^2}{2}$, tai iš čia seka, kad pusskritulio dalis, kurią riboja lankas BC ir atkarpos AB, AC sudaro trečdalį pusskritulio ploto. Tuomet likusios dalies plotas $S_2 = \frac{2}{3} S_{pusskritulio}$ taigi sąlygoje nurodytos figūros plotas sudaro $\frac{2}{3}$ pusskritulio ploto.

11 pavyzdys. Į skritulį įbrėžtas lygiašonis trikampis, kurio kraštinių ilgiai $1\,cm$, $1\,cm.$, $\sqrt{3}cm.$ Raskite skritulio nuopjovos, kurios pagrindas yra šoninė kraštinė, plotą.



18 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad lygiašonis trikampis ABC, kuriame $AB = AC = 1$, $BC = \sqrt{3}$, įbrėžtas į apskritimą, kurio centras yra taškas O. Nubrėžkime aukštinę AH, tada $\cos\angle B = \cos\angle C = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, todėl $\angle B = \angle C = 30^0$, o $\angle A = 120^0$ (18 pav.). Kadangi tiesė AH yra trikampio ABC simetrijos ašis, tai ji eina per tašką O. Vadinasi, $\angle OAB = \frac{1}{2}\angle COB = 60^0$. Lygiašonio trikampio AOB vienas kampas lygus 60^0, todėl šis trikampis yra lygiakraštis, $OA = OB = AB = 1$, $\angle AOB = 60^0$, todėl išpjovos AOB plotas $S_{išpjovosAOB} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 60}{360} = \frac{\pi}{6}$. Lygiakraščio trikampio AOB

plotas $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Kadangi ieškomasis nuopjovos plotas S lygus išpjovos AOB ir trikampio AOB plotų skirtumui, tai $S = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Trikampio ABC kampas A lygus 45^0, kraštinė $BC = 10$ cm, o aukštinė BD dalija kraštinę AC į dalis $AD = 6$ cm, $DC = 8$ cm. Raskite aukštinės AH ilgį.

2. Trikampio ABC kraštinės $AB = 17$ cm, $BC = 25$ cm, aukštinė $BH = 15$ cm. Raskite trikampio ABC plotą.

3. Per lygiagretainio $ABCD$ viršūnę B nubrėžta tiesė l_1, kertanti kraštinę AD taške E, o per viršūnę C nubrėžta lygiagreti su tiese l_1 tiesė l_2, kertanti kraštinės AD tęsinį taške T. Iš taškų C ir T nubrėžti statmenys CC' ir TT' į tiesę BE. Raskite lygiagretainio $ABCD$ plotą, jei trikampio $C'T'T$ plotas lygus S.

4. Trikampio ABC kraštinėse pažymėti taškai $K \in BC$, $M \in AC$, $N \in AB$, atkarpos AK, BM ir CN susikerta viename taške L, trikampių ALN, BLN, BLK ir MCL plotai atitinkamai lygūs 40 cm^2, 30 cm^2, 35 cm^2, ir 84 cm^2. Raskite trikampio ABC plotą.

5. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis yra 9 cm, kvadrato $AEFG$ kraštinės ilgis yra 3 cm, jo viršūnė E yra kraštinėje AB, o viršūnė G – kraštinės DA tęsinyje už taško A. Atkarpa CG kerta atkarpą AB taške M. Raskite trikampio BMC plotą.

6. Trapecijos $ABCD$ pagrindų ilgiai $AD = a$, $BC = b$. Atkarpos BC tęsinyje už taško C pažymėtas taškas M taip, kad tiesė AM nukerta nuo trapecijos trikampį, kurio plotas lygus $\frac{1}{4}$ trapecijos $ABCD$ ploto. Raskite atkarpos CM ilgį.

7. Taškas F yra stačiakampio $ABCD$ kraštinėje CD, atkarpa FB kerta įstrižainę AC taške E, trikampių FEC ir BEC plotai atitinkamai lygūs 4 cm^2 ir 6 cm^2. Raskite keturkampio $AEFD$ plotą.

8. Trikampio ABC plotas lygus 50 cm^2, taškai D, E, F yra atitinkamai kraštinėse AC, AB, BC, be to, $AD = 9$ cm, $DC = 6$ cm, atkarpos EC ir DF susikerta taške G, o trikampių CDG ir EFG plotai vienodi. Raskite trikampio BCE plotą.

9. Atkarpa AB yra pusskritulio skersmuo, taškas O yra pusskritulio centras, pusskritulio plotas lygus 9π cm^2. Taškai C ir D lanką AB dalija į tris lygias dalis. Apskaičiuokite plokštumos dalies, apribotos atkarpomis AC ir AD bei lanku CD, plotą.

10. Į skritulį įbrėžtas statusis trikampis, kurio statiniai lygūs 1 cm ir $\sqrt{3}$ cm. Raskite skritulio nuopjovos, kurios pagrindas yra statinis, lygus 1 cm, plotą.

VI. NEPRIKLAUSOMI IR PRIKLAUSOMI ATSITIKTINIAI ĮVYKIAI

Teorinę medžiagą parengė bei šeštąją užduotį sudarė dr. (HP) Eugenijus Stankus

Mus supa daugybė atsitiktinių reiškinių – metę monetą, nežinome, kuria puse ji atsivers; metę lošimo kauliuką, nežinome, kiek akučių atsivers ir pan. Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad mes visai nieko nežinome ir gyvename atsitiktinumų pasaulyje, kuriame vis dėlto gebame išgyventi, netgi planuojame savo, šalies ar pasaulio ateitį. Taip yra todėl, kad ir tarp atsitiktinių reiškinių galima įžiūrėti dėsningumų. Tikimybių teorija ir tiria tokius dėsningumus. Žinoma, remdamiesi ja negalime nustatyti ar įvyks mus dominantis įvykis, tačiau galime įvertinti šio įvykio pasirodymo galimybę, t. y. apskaičiuoti tokių įvykių tikimybes.

Taip pat dažnai yra svarbu nustatyti kokią įtaką turi vieno įvykio pasirodymas kito įvykio pasirodymui. Kartais vieno įvykio pasirodymas nelemia kito įvykio pasirodymo – tuomet sakoma, kad įvykiai yra nepriklausomi, o kartais įvykiai yra susiję – tada sakoma, kad jie yra priklausomi. O kaip nustatyti ar tiriamieji įvykiai yra nepriklausomi ar priklausomi, kaip įvertinti įvykių priklausomumo laipsnį? Tokio pobūdžio klausimams nagrinėti ir skirta ši tema.

Pradėkime nuo pagrindinių tikimybių teorijos sąvokų bei įvykių tikimybių skaičiavimo.

Bandymas ir su juo susiję įvykiai. *Bandymu* arba *eksperimentu* vadiname sąlygų, sudarančių galimybę įvykti stebimajam įvykiui, visumą. Pavyzdžiui, tai – sąlygos, kurioms esant metame monetą ir stebime kuria puse ji atsivers. Eksperimentu galime vadinti lošimo kauliuko metimą stebint kiek akučių atvirs. Sąlygų (meteorologinių, laikotarpio, vietos ir pan.) visumą stebint autoavarijų skaičių magistralėje – taip pat galima laikyti eksperimentu. Sąlygos, kuriose mes gyvename, jeigu stebėtume žmogaus ūgį, svorį ar gyvenimo trukmę – irgi eksperimentas.

Kiekvieną kartą atlikdami bandymą nežinome, ar įvyks stebimasis įvykis, nors bandymo sąlygos yra tokios pat arba labai panašios. Ką galime padaryti atsakant į šį klausimą – tai išvardyti visas šio bandymo baigtis ir iš jų sudaryti *bandymo baigčių aibę*. Paprasčiausias pavyzdys – simetriško lošimo kauliuko vieno metimo bandymo baigtys yra šešios (laikoma, kad lošimo kauliukas negali atsistoti ant briaunos ar viršūnės) – gali atsiversti bet kuri iš šešių lošimo kauliuko sienelių. Taigi su šiuo bandymu susieta baigčių aibė $E=\{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6\}$. Jeigu nagrinėtume dviejų simetriškų skirtingų spalvų lošimo kauliukų metimą, tai bandymo baigčių aibę $E=\{e_{ij}, i=1,2,...,6, j=i=1,2,...,6\}$ būtų sudaryta iš 36 baigčių; čia e_{ij} yra baigtis, reiškianti, kad pirmasis kauliukas atsivertė i akutėmis, o antrasis – j akutėmis. Atkreipkime dėmesį, kad šešias simetriško lošimo kauliuko metimo baigtis galime laikyti *vienodai galimomis* – nė viena iš jų neturi daugiau šansų pasirodyti, negu bet kuri kita. Taip pat vienodai galimos yra ir dviejų lošimo kauliukų metimo 36 baigtys.

Žinoma, ne visi bandymai tokie patogūs ir lengvai aprašomi. Daugelio bandymų vienodai galimų baigčių aibę sudaryti neįmanoma. Pavyzdžiui, kai stebima įmonės akcijų kaina, negalime teigti, kad baigtys, jog po mėnesio kaina sumažės, nepakis ir padidės, yra vienodai galimos. Baigtys, kad tam tikroje kelio atkarpoje per tam tikrą laikotarpį įvyks 0, 1, 2, 3 ar daugiau kaip 3 autoavarijos, tikriausiai irgi nėra vienodai galimos.

Iš bandymo baigčių aibės elementų galima sudaryti įvairius poaibius, kurie sutapatinami su atitinkamais įvykiais (kurie gali įvykti atlikus šį bandymą). Pavyzdžiui, simetriško lošimo kauliuko vieno metimo baigčių aibės $E=\{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6\}$ poaibis $A=\{e_2; e_4; e_6\}$ reiškia įvykį A, kad, metus lošimo kauliuką, jis atsivers lyginiu akučių skaičiumi. Poaibis $B=\{e_1; e_3; e_5\}$ yra įvykis, kad atsivers nelyginis akučių skaičius, o $E_6=\{e_6\}$ – įvykis, kad atsivers šešios akutės. Įvykiai, sudaryti iš vienos baigties, vadinami *elementariaisiais įvykiais*. Taigi įvykiai $E_1=\{e_1\}, E_2=\{e_2\}$ ir t. t. yra elementarieji. Įvykis $E=\{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6\}$ yra *būtinasis*, o dėl įvykių aibės pilnumo įvedamas ir *negalimasis* įvykis, žymimas tuščios aibės simboliu $\varnothing$. Pabandykite apskaičiuoti kiek iš viso įvykių sudaro simetriško lošimo kauliuko vieno metimo bandymo įvykių aibę.

Baigtys, sudarančios įvykį A, vadinamos *palankiomis* šiam įvykiui, visos kitos – *nepalankiomis* įvykiui A. Šių baigčių aibė sudaro *priešingąjį įvykį* $\overline{A}$, kalbant aibių terminais $\overline{A} = E \setminus A$. Negalimasis įvykis neturi nė vienos baigties.

Įvykių veiksmai. Kadangi įvykius sutapatinome su baigčių aibėmis, tai su jais, kaip ir su bet kuriomis aibėmis, galimi įprastiniai aibių, dabar – įvykių, veiksmai.

Įvykių A ir B *sąjunga* (žymima $A \cup B$) yra įvykis, kuriam palankių baigčių aibę sudaro baigtys, palankios bent vienam iš įvykių A ir B.

Įvykių A ir B *sankirta* (žymima $A \cap B$) yra įvykis, kuriam palankių baigčių aibę sudaro palankios abiem įvykiams – ir A, ir B, baigtys.

Įvykių A ir B *skirtumu* (žymima $A \setminus B$) vadinamas įvykis, kuriam palankių baigčių aibę sudaro įvykiui A palankios, bet įvykiui B nepalankios baigtys.

Įvykiai A ir B vadinami *nesutaikomaisiais*, jei $A \cap B = \varnothing$, kitaip tariant, kai įvykiai A ir B negali įvykti kartu.

Įvykio tikimybė. Paprasčiausia įvykio tikimybę apibrėžti bandymams, kurių baigtys yra vienodo galimumo. Jeigu taip nėra, apibrėžiant tikimybę reikėtų gilesnių tikimybių teorijos studijų. Vienodą baigčių galimumą suvokiame kaip ir kai kurias kitas pirmines matematines sąvokas (pavyzdžiui, skaičius, taškas, tiesė ir pan.). Dažniausiai teigiama – jeigu nė viena baigtis atlikus bandymą neturi daugiau galimybių pasirodyti negu bet kuri kita, tai tokios baigtys laikomos *vienodai galimomis*.

1 *apibrėžimas (klasikinis tikimybės apibrėžimas)*. Tarkime, bandymo baigčių aibė yra sudaryta iš n vienodai galimų baigčių. Įvykio A, kuriam palankių baigčių yra m, *tikimybe* vadinamas skaičius $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

Skaičiuojant tikimybę pagal klasikinį apibrėžimą svarbu įsitikinti baigčių vienodu galimumu, nors tai ne visada paprasta.

1 *pavyzdys*. Simetriško lošimo kauliuko vieno metimo įvykio $A = \{e_2; e_4; e_6\}$ tikimybė yra $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, įvykio $E_6 = \{e_6\}$ tikimybė $P(E_6) = \dfrac{1}{6}$, $P(\{e_1, e_2\}) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

2 *pavyzdys*. Simetrinės monetos vieno metimo įvykio atsiversti herbui tikimybė yra $\dfrac{1}{2}$, nes bandymo baigčių aibę sudaro dvi vienodai galimos baigtys, o iš jų palankių nagrinėjamam įvykiui – viena.

Įvykio tikimybę galima įvertinti ir remiantis statistiniais duomenimis. Jeigu atlikus vienodomis sąlygomis N bandymų, stebimasis įvykis A įvyko M kartų, tai santykis $\dfrac{M}{N}$ yra įvykio A *santykinis dažnis.* Yra įrodyta, kad didinant bandymų skaičių santykinis dažnis yra stabilus ir apytikriai lygus stebimojo įvykio tikimybei. Ši santykinio dažnio savybė yra bendresnio tikimybių teorijos teiginio, vadinamo *didžiųjų skaičių dėsniu*, atskiras atvejis. Didžiųjų skaičių dėsnis patvirtinamas eksperimentiškai – literatūroje galime rasti pavyzdžių, kai monetą metus 6000 ar 12000 kartų herbo atsivertimo santykinio dažnio reikšmė apytikriai lygi 0,5, t. y. šio įvykio tikimybei.

Paprasčiausios tikimybių savybės.

Tegu bandymo baigčių aibę sudaro n vienodai galimų baigčių, o įvykiui A palankių baigčių yra m.

1. Kadangi $0 \le m \le n$, tai $0 \le \dfrac{m}{n} \le 1$, taigi $0 \le P(A) \le 1$. Be to $P(\varnothing) = 0$, $P(E) = 1$.

2. Jei įvykiui A palankių baigčių yra m, tai jam priešingojo įvykio $\overline{A}$ baigčių aibę sudaro $n - m$ baigčių. Vadinasi, $P(\overline{A}) = \dfrac{n-m}{n} = 1 - \dfrac{m}{n} = 1 - P(A)$. Taigi

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \qquad (1)$$

3. Jeigu įvykiai A ir B yra nesutaikomieji, tai pasinaudoję klasikiniu tikimybės apibrėžimu lengvai gausime, kad

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \qquad (2)$$

4. Galioja bendra formulė įvykių sąjungos tikimybei apskaičiuoti:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\,. \qquad (3)$$

Šią savybę, kaip ir ankstesnes, galima įrodyti taikant klasikinį tikimybės apibrėžimą ir operuojant bandymo baigčių skaičiais (pabandykite įrodyti savarankiškai). Tačiau galima samprotauti ir kitaip.

Tegu A ir B yra bet kurie įvykiai. Tuomet teisingos lygybės

$$A\cup B=A\cup(B\setminus A),\;\; B=(A\cap B)\cup(B\setminus A)\,.$$

Kadangi abiejų lygybių dėmenys yra nesutaikomieji įvykiai, tai

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B\setminus A),\;\; P(B)=P(A\cap B)+P(B\setminus A).$$

Iš pirmosios lygybės atėmę antrąją gauname:

$$P(A\cup B)-P(B)=P(A)-P(A\cap B)\;\;\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

Pastaba. Jeigu įvykiai A ir B yra nesutaikomieji, tai iš (3) išplaukia (2) formulė, nes šiuo atveju $P(A\cap B)=0$.

Operuodami baigčių aibėmis taip pat galime įsitikinti, kad teisingas toks teiginys.

5. Jeigu $B\subseteq A$, t. y. B yra aibės A poaibis arba sutampa su A (kitaip – iš to, kad įvyko B, išplaukia, kad įvyko A), tai

$$P(A\setminus B)=P(A)-P(B) \qquad (4)$$

3 *pavyzdys*. Simetriškas lošimo kauliukas metamas du kartus. Apskaičiuokime tikimybę, kad nors kartą atsivers arba penkios, arba šešios akutės.

Sprendimas. Tegu A – įvykis, kad nors kartą atsivers šešios akutės, B – nors kartą atsivers penkios akutės, C – nors kartą atsivers arba penkios, arba šešios akutės: $C=A\cup B$. Pastebėję, kad įvykiai A ir B gali įvykti kartu (nėra nesutaikomieji), įvykio C tikimybę rasime pagal (3) formulę. Apskaičiuojame $P(A)=\dfrac{11}{36},\; P(B)=\dfrac{11}{36},\; P(A\cap B)=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$. Čia įvykiams A ir B palankių baigčių yra po 11, o įvykiui $A\cap B$ – 2 iš 36 vienodai galimų baigčių. Siūlome šias tikimybes apskaičiuoti savarankiškai. Tuomet gauname, kad

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{11}{36}+\frac{11}{36}-\frac{1}{18}=\frac{5}{9}.$$

Įvykių nepriklausomumas ir priklausomumas. Jei vieno iš įvykių tikimybė nepriklauso nuo to, ar įvyko, ar ne, kitas įvykis, tai jie yra nepriklausomi. Jeigu taip nėra, tai jie – priklausomi.

Įvykio A sąlyginę tikimybę su sąlyga, kad įvykis B įvykęs (ją žymėsime $P(A\mid B)$), galima išreikšti formule

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\text{ kai }\; P(B)>0\,. \qquad (5)$$

Ši išraiška dažnai laikoma sąlyginės tikimybės apibrėžimu.

Įdomu, kad šioje formulėje sąlyginė tikimybė išreikšta „besąlyginėmis“ tikimybėmis $P(B)$ ir $P(A\cap B)$. Taip yra todėl, kad skaičiuojant įvykio A sąlyginę tikimybę, kai įvykis B įvykęs, galimų baigčių aibė yra sudaryta tik iš įvykiui B palankių baigčių, o įvykiui A iš jų palankios tik tos, kurios priklauso šių įvykių sankirtai. Pailiustruosime tai paprastu lošimo kauliuko metimo pavyzdžiu.

4 *pavyzdys.* Jonas ir Petras žaidžia mėtydami lošimo kauliuką. Kauliuką meta užsimerkęs Jonas, o Petras stebi rezultatą. Po Jono metimo Petras jam pasakė, kad atsivertė ne mažiau kaip dvi akutės (įvykis B). Jonas, remdamasis šia informacija, bando atspėti ar atsivertė nelyginis akučių skaičius (įvykis A). Kokia tikimybė, kad Jonas atspės?

Sprendimas. Turime apskaičiuoti sąlyginę tikimybę $P(A\mid B)$. Kadangi įvykis B yra įvykęs, tai baigčių aibę sudaro įvykiui $B=\{e_2;e_3;e_4;e_5;e_6\}$ palankios 5 baigtys, o iš jų palankių įvykiui A yra dvi: e_3 ir e_5 . Todėl $P(A|B)=\dfrac{2}{5}$. Jeigu pastarosios trupmenos skaitiklį ir vardiklį padalinsime iš 6, tai gausime $P(A|B)=\dfrac{2}{5}=\dfrac{2/6}{5/6}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, t. y. galioja sąlyginės tikimybės (5) išraiška.

Ats. $P(A\mid B)=\dfrac{2}{5}$.

Jeigu $P(A \mid B) = P(A)$, tai įvykiai A ir B vadinami *nepriklausomais*. Taip bus tik tuomet, kaip išplaukia iš (4) formulės, kai

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (6)$$

Bendruoju atveju ši formulė taip pat laikoma įvykių A ir B nepriklausomumo apibrėžimu.

Taigi jei

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B),$$

tai A ir B – *priklausomi* įvykiai.

O kaip apskaičiuoti įvykių sankirtos tikimybę, kai šie įvykiai yra priklausomi, išplaukia iš (5) formulės:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B). \qquad (7)$$

Atkreipkime dėmesį, kad įvykių nepriklausomumo ir priklausomumo matematinės sąvokos neprieštarauja gyvenimiškai šių terminų sampratai.

Galima įrodyti: kai viena iš nepriklausomų įvykių porų A ir B, A ir $\overline{B}$, $\overline{A}$ ir B, $\overline{A}$ ir $\overline{B}$ yra nepriklausomi įvykiai, tai ir visos kitos šios poros yra nepriklausomi įvykiai.

5 *pavyzdys*. Įrodysime teiginį: jei įvykiai A ir B yra nepriklausomi, tai ir įvykiai A ir $\overline{B}$ taip pat yra nepriklausomi.

Įrodymas. Įvykiai A ir B yra nepriklausomi, todėl $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Turime įrodyti, kad galioja lygybė $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B})$.

Pirmiausia atkreipkime dėmesį, kad minimiems įvykiams galioja lygybė $A \cap \overline{B} = A \setminus (A \cap B)$. Šios lygybės teisingumu galima įsitikinti vaizduojant įvykius kaip baigčių aibes geometriškai Veno diagramomis (John Venn – anglų filosofas, 1834-1883). Tuomet pasinaudoję (4) lygybe gauname:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B}).$$

Teiginys įrodytas.

Iki šiol pateikti pavyzdžiai dažniausiai buvo susiję su lošimo kauliuko ar monetos mėtymo bandymų įvykių tikimybių skaičiavimais. Tačiau aukščiau minėtos tikimybės savybės leidžia išplėsti tikimybinius skaičiavimus ir nagrinėjant realius mūsų gyvenimo reiškinius, pavyzdžiui, ekonominius.

6 *pavyzdys*. Stebima dviejų **nepriklausomų** įmonių akcijų kaina. Žinoma, kad pirmosios įmonės akcijų pabrangimo po mėnesio (įvykis A) tikimybė yra 0,8, o tikimybė, kad antrosios įmonės akcijos po mėnesio brangs (įvykis B), lygi 0,7. Apskaičiuokime tikimybę, kad po mėnesio bent vienos iš šių įmonių akcijos brangs.

Sprendimas. Tikimybė, kad abiejų įmonių akcijų kaina po mėnesio padidės yra $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 + 0{,}7 = 0{,}56$, nes pagal sąlygą įvykiai A ir B gali būti laikomi nepriklausomais. Tuomet pagal (3) formulę tikimybė, kad po mėnesio bent vienos iš šių įmonių akcijos brangs, lygi $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}94$.

Ats. 0,94.

7 *pavyzdys*. Bankas investavo į dvi **priklausomas** ūkio šakas, žinodamas tokią informaciją: investicija į pirmąją šaką bus pelninga (įvykis A) su tikimybe 0,8; investicija į antrąją šaką bus pelninga (įvykis B) su tikimybe 0,9; jeigu investicija į antrąją ūkio šaką būtų pelninga, tai investicija į pirmąją šaką būtų pelninga su tikimybe 0,95. Apskaičiuokime tikimybę, kad bent viena iš šių investicijų bus pelninga.

Sprendimas. Tikimybė, kad investicijos į abi ūkio šakas bus pelningos, pagal (7) formulę yra $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B) = 0{,}9 \cdot 0{,}95 = 0{,}855$. Tuomet

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}855 = 0{,}845.$$

Ats. 0,845.

Šiuo pavyzdžiu ir baigiame pažintį su tikimybių teorijos pradiniais elementais, tarp jų ir su įvykių nepriklausomumo ir priklausomumo sąvokomis bei jų iliustracijomis. Linkime sėkmingai išspręsti šeštąją užduotį!

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Taisyklingas lošimo kauliukas metamas du kartus. Apskaičiuokite tikimybę, kad atsivertusių akučių suma bus nelyginė neviršijanti 5.
2. Moneta metama 3 kartus. Apskaičiuokite tikimybę, kad bent vieną kartą atsivers herbas.
3. Taisyklingas lošimo kauliukas metamas du kartus. Apskaičiuokite sąlyginę tikimybę bent kartą atsiversti 6 akutėmis, jeigu pirmuoju metimu atsivertė ne mažiau kaip 3 akutės.
4. Įvykiai A ir B yra nepriklausomi. Įrodykite, kad įvykiai $\overline{A}$ ir $\overline{B}$ yra nepriklausomi.
5. Žinomos šios tikimybės: $P(A)=0{,}8$, $P(B)=0{,}6$, $P(A\cup B)=0{,}9$. Apskaičiuokite $P(A\cap B)$, sąlygines tikimybes $P(A\,|\,B)$ ir $P(B\,|\,A)$ bei nustatykite ar įvykiai A ir B yra priklausomi.
6. Tikimybė laimėti įsigijus vieną loterijos A bilietą lygi 0,005, o loterijos B laimingo bilieto tikimybė yra 0,001. Apskaičiuokite tikimybę, kad įsigijus po vieną loterijos A ir loterijos B bilietą, bent vienas bus laimingas.
7. Krepšininkas Audrius baudos metimą pataiko su tikimybe 0,85, o Balio tikslaus baudos metimo tikimybė yra 0,75. Audrius ir Balys meta po vieną baudos metimą. Apskaičiuokite tikimybę, kad: a) abiejų krepšininkų baudos metimai bus tikslūs; b) bus tikslus lygiai vienas metimas; c) bus tikslus bent vienas metimas; d) abu krepšininkai nepelnys taškų.
8. Gydytojas žino, kad skirtingų ligų požymiai gali būti vienodi. Iš tyrimų nustatyta: tikimybė, lygi 0,3, kad ligoniui bus aptiktas požymis A; sąlyginė tikimybė 0,9 sirgti liga B, kai aptiktas požymis A. Apskaičiuokite tikimybę, kad ligoniui bus aptiktas požymis A ir jis sirgs liga B.
9. Šaulys šauna į taikinį du kartus. Pirmojo šūvio pataikymo tikimybė yra 0,7. Kai pirmasis šūvis taiklus, antrasis šūvis taiklus su tikimybe 0,8. O jei pirmasis šūvis netaiklus, tai tikimybė pataikyti į taikinį antruoju šūviu lygi 0,6. Apskaičiuokite: a) tikimybę, kad šaulys pataikys į taikinį abiem šūviais; b) tikimybę, kad pirmasis šūvis bus netaiklus, o antrasis – taiklus; c) tikimybę, kad antrasis šūvis bus taiklus.
10. Dvejos automatinės staklės gamina vienodas detales. Tolesniame gamybos procese jos sumaišomos, todėl atsitiktinai paimta detalė su vienoda tikimybe 0,5 gali būti pagaminta bet kuriomis iš dviejų staklių. Žinoma, kad pirmosiomis staklėmis pagaminta atsitiktinai paimta detalė bus brokuota su tikimybe 0,15. Ši tikimybė antrosioms staklėms lygi 0,045. Apskaičiuokite tikimybę, kad atsitiktinai pasirinkus detalę iš abejomis staklėmis pagamintos produkcijos ji bus brokuota.

VII. FUNKCIJOS IR LYGTYS

Teorinę medžiagą parengė ir septintąją užduotį sudarė mokytojas ekspertas Antanas Skūpas

1. Trumpai prisiminsime kai kurias mums svarbias sąvokas.

Sakykime, X ir Y yra dvi aibės. Dėsnis (taisyklė), pagal kurį kiekvienam aibės X elementui priskiriamas vienintelis aibės Y elementas, vadinamas *funkcija*.

Funkcija dažniausiai žymima $y = f(x)$.

Aibė X vadinama funkcijos f *apibrėžimo sritimi*, žymima D_f. Aibė, sudaryta iš visų $f(x)$ reikšmių, kai x prabėga visą D_f, vadinama *funkcijos f reikšmių sritimi*, žymima E_f. Taigi $E_f \subset Y$.

Atkreipsime dėmesį, kad funkciją nusako du dalykai: dėsnis ir jo apibrėžimo sritis. Todėl dvi funkcijos, nusakomos tuo pačiu dėsniu, bet turinčios skirtingas apibrėžimo sritis, laikomos skirtingomis.

Mokykliniame matematikos kurse aibės X ir Y dažniausia būna skaičių aibės, todėl ir funkcijos vadinamos skaitinėmis funkcijomis. Jos dažniausiai nusakomos reiškiniais, formulėmis. Funkcijos apibrėžimo sritimi, jeigu nėra nurodyta kitaip, laikoma atitinkamo reiškinio apibrėžimo sritis.

Sakykime, turime dvi funkcijas f ir g su apibrėžimo sritimis D_f ir D_g. Dažnai susiduriame su tokiu uždaviniu: reikia rasti tas funkcijų kintamųjų reikšmes, su kuriomis tos funkcijos įgyja tas pačias reikšmes. Toks uždavinys užrašomas lygybe

$$f(x) = g(x).$$

Šią lygybę ir vadiname lygtimi. Kintamojo x reikšmių aibę, kurioje apibrėžtos abi funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ natūralu laikyti lygties apibrėžimo sritimi D_l. Taigi, jei nėra atskirai nurodyta,

$$D_l = D_f \cap D_g.$$

Funkcijų f ir g kintamieji dažnai vadinami lygties nežinomaisiais. Nežinomojo reikšmės, kurias įrašius lygtyje, gaunamos teisingos lygybės, vadinamos lygties sprendiniais. Išspręsti lygtį – reiškia rasti visus jos sprendinius arba įrodyti, kad jų nėra.

Spręsdami lygtis, stengiamės sudėtingesnes lygtis pertvarkyti į paprastesnes, turinčias tuos pačius sprendinius, taigi *ekvivalenčias* lygtis.

Nagrinėjant lygtį kai kada naudinga nubraižyti funkcijų f ir g grafikus. Jų sankirtos taškų abscisės ir yra lygties sprendiniai. Tada galima susidaryti vaizdą apie sprendinių egzistavimą, jų skaičių.

2. Akivaizdu, kad lygtis $f(x) = g(x)$ gali turėti sprendinių tik tada, kai $D_l = D_f \cap D_g \neq \emptyset$ ir $E_f \cap E_g \neq \emptyset$.

Pavyzdžiai. a) $\sqrt{4-x} = \sqrt{x-5} - 3$.

Sprendimas. Funkcija $f(x) = \sqrt{4-x}$ apibrėžta, kai $4 - x \geq 0$, vadinasi, $D_f = (-\infty; 4]$. O $g(x) = \sqrt{x-5} - 3$ apibrėžta, kai $x - 5 \geq 0$; $D_g = [5; +\infty)$. Taigi $D_l = (-\infty; 4] \cap [5; +\infty) = \emptyset$.

Ats.: lygtis sprendinių neturi.

b) $\lg\big((x-3)(1-x)\big) - \lg(1-x^2) = 1$.

Sprendimas. Ieškodami lygties apibrėžimo srities, sudarome nelygybių sistemą

$$\begin{cases} (x-3)(1-x) > 0, \\ \quad 1 - x^2 > 0. \end{cases}$$

Iš jos gauname, kad $D_l = (1; 3) \cap (-1; 1) = \emptyset$.

Ats.: lygtis sprendinių neturi.

c) $\sqrt{x-3} - \sqrt{x+9} = \sqrt{x-2}$.

Sprendimas. Sudarę sistemą $\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x+9 \geq 0, \\ x-2 \geq 0, \end{cases}$ randame lygties apibrėžimo sritį $D_l = [3; +\infty)$. Tačiau $x - 3 < x + 9$, o tada ir $\sqrt{x-3} < \sqrt{x+9}$ ($h(x) = \sqrt{x}$ – didėjanti!). Todėl $f(x) = \sqrt{x-3} - \sqrt{x+9} < 0$, o $g(x) = \sqrt{x-2} > 0$. Vadinasi, $E_f \cap E_g = \emptyset$, ir lygtis sprendinių neturi.

Ats.: lygtis sprendinių neturi.

d) Išspręskime dar vieną, gana neįprastą lygtį

$$2 \sin x = 5x^2 + 2x + 3.$$

Sprendimas. Akivaizdu, kad $D_l = \mathbf{R}$. Rasime lygties kairiosios ir dešiniosios pusių reikšmių sritis. Kairioji: $-2 \le 2\sin x \le 2$, $E_f = [-2; 2]$. Pertvarkysime dešiniąją, išskirdami pilną kvadratą:

$$5x^2 + 2x + 3 = 5\left(x^2 + 2x \cdot \tfrac{1}{5}\right) + 3 = 5\left(x^2 + 2x \cdot \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{25} - \tfrac{1}{25}\right) + 3 = 5\left(x + \tfrac{1}{5}\right)^2 - \tfrac{1}{5} + 3 =$$
$$= 5\left(x + \tfrac{1}{5}\right)^2 + 2\tfrac{4}{5}.$$

Matome, kad $E_g = \left[2\tfrac{4}{5}; +\infty\right)$. Taigi $E_f \cap E_g = [-2; 2] \cap \left[2\tfrac{4}{5}; +\infty\right) = \emptyset$.

Ats.: lygtis sprendinių neturi.

3. Nustatyti, kad lygtis turi sprendinių, gali padėti tokia teorema.

Jei funkcija $h(x)$, apibrėžta ir tolydi uždarame intervale $[a; b]$, jo galuose įgyja skirtingo ženklo reikšmes, tai tame intervale yra bent vienas taškas, kuriame $h(x) = 0$.

Šios (Bolcano-Koši) teoremos įrodymas išeina už mokyklinės matematikos kurso ribų, nors pats tvirtinimas ir lengvai suprantamas.

Pavyzdys. Įrodysime, kad intervale [0; 2] lygtis

$$e^{-x} = 2x - 3$$

turi sprendinių.

Įrodymas. Nagrinėkime funkcijos $h(x) = e^{-x} - 2x + 3$ reikšmes intervalo galuose:

$$h(0) = e^{-0} - 2 \cdot 0 + 3 = 4, \quad h(2) = e^{-2} - 2 \cdot 2 + 3 = e^{-2} - 1 < 0.$$

Funkcija *h* intervale [0; 2] tolydi, vadinasi, šio intervalo viduje ji virsta nuliu. Lygtis turi sprendinių. Suprantama, intervalą galima siaurinti. Pavyzdžiui iš to, kad $h(1) = e^{-1} - 2 + 3 = 1 + e^{-1} > 0$ galima daryti išvadą, kad sprendiniai yra intervale $[1; 2]$. Toliau siaurindami intervalą, galime sprendinius įvertinti kiek norima tiksliai. Tačiau kiek jų yra, lieka neaišku.

Kad lygtis $f(x) = g(x)$ turi vienintelį sprendinį intervale $[a; b] \subset D_l$, kartais leidžia nustatyti ši teorema.

Jei funkcija yra didėjanti intervale [a; b], o $g(x)$ jame mažėjanti, tai lygtis $f(x) = g(x)$ jame turi ne daugiau kaip vieną sprendinį.

Atkreipsime dėmesį, kad teorema sprendinio egzistavimo negarantuoja. Pagalvokite – kodėl?

Įrodymas. Sakykime, lygtis be sprendinio x_1 turi dar vieną sprendinį x_2 ir $x_1 < x_2$. Tuomet iš funkcijų *f* ir *g* monotoniškumo išplaukia, kad $f(x_2) > f(x_1)$ ir $g(x_1) > g(x_2)$. Bet $f(x_1) = g(x_1)$, todėl $f(x_2) > f(x_1) = g(x_1) > g(x_2)$. Vadinasi, $f(x_2) > g(x_2)$, ir x_2 sprendiniu būti negali. Analogiškai galima įrodyti, kad ir x_3 ($x_3 < x_1$) nebus sprendiniu.

Dabar jau nesunku įsitikinti, kad lygtis $e^{-x} = 2x - 3$ gali turėti tik vieną sprendinį.

Pasitaiko, kad lygties sprendinį pavyksta pastebėti. Tada teorema gali pasitarnauti įrodant, kad kitų sprendinių lygtis neturi.

Pavyzdžiai. a) Išspręsime lygtį

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

Sprendimas. Pastebėsime, kad $x = 2$ tenkina lygtį ($3^2 + 4^2 = 5^2$ – žinomo Pitagoro trikampio lygybė). Padalinę abi lygties puses iš 4^x ($4^x > 0$!), gauname:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^x.$$

$f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1$ yra mažėjanti, o $g(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ didėjanti funkcijos. Vadinasi, lygtis turi vienintelį sprendinį $x = 2$.

Ats.: $x = 2$.

b) Išspręsime lygtį

$$\ln x = x - 1.$$

Sprendimas. Lygtis apibrėžta intervale $(0; +\infty)$.

Nesunku pastebėti, kad $x = 1$ yra lygties sprendinys. Įrodysime, kad kitų sprendinių lygtis neturi. Deja, šį kartą teorema nepadės – abi lygties pusės yra monotoniškai didėjančios funkcijos.

Sudarykime funkciją $h(x) = \ln x - x + 1$. Jos išvestinė lygi $h'(x) = \frac{1}{x} - 1$. Ji virsta nuliu, kai $\frac{1}{x} - 1 = 0$, t. y. kai $x = 1$. Tai yra vienintelis kritinis taškas. Jame *h* įgyja maksimumą, nes, praeinant kritinį tašką, $h'(x)$ reikšmės keičia ženklą iš teigiamų į neigiamas. Vadinasi, visoje apibrėžimo srityje $h(x) = 0$ vienintelį kartą, kai $x = 1$. Taigi, lygtis $\ln x = x - 1$ turi vienintelį sprendinį $x = 1$.

Ats.: $x = 1$.

4. Dažniausiai lygtys sprendžiamos jas įvairiai pertvarkant, naudojant keitinius.

Pavyzdžiai. a) Išspręsime lygtį

$$\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} = \sqrt[3]{3x-12} + 2.$$

Sprendimas. Lygties apibrėžimo sritis $D_l = [4; +\infty)$, nes iš sąlygos $x - 4 \geq 0$ išplaukia, kad $x \geq 4$, o tuomet ir $x + 4\sqrt{x-4} > 0$. Dešinioji lygties pusė apibrėžta visoje **R**.

Pertvarkome kairiąją lygties pusę:

$$\sqrt{(x-4) + 2\sqrt{x-4}\cdot 2 + 4} = \sqrt[3]{3x-12} + 2, \qquad \sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2} = \sqrt[3]{3x-12} + 2.$$

Turime $\sqrt{x-4} + 2 > 0$, todėl $\sqrt{x-4} + 2 = \sqrt[3]{3x-12} + 2$, $\sqrt{x-4} = \sqrt[3]{3x-12}$. Abi puses keldami šeštuoju laipsniu, gausime

$$(x-4)^3 = 9(x-4)^2, \qquad (x-4)^3 - 9(x-4)^2 = 0, \qquad (x-4)^2(x-4-9) = 0,$$

iš kur $x_1 = 4$, $x_2 = 13$. Galima patikrinti, kad ir 4, ir 13 tenkina lygtį.

Ats.: $x_1 = 4$, $x_2 = 13$.

b) Išspręsime lygtį

$$\sqrt{-2x - \sqrt{5}} + 5x = 4x^3.$$

Sprendimas. Iš nelygybės $-2x - \sqrt{5} \geq 0$ randame $D_l = \left(-\infty; -\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. Duotąją lygtį perrašę $\sqrt{-2x-\sqrt{5}} = 4x^3 - 5x$, matome, kad dešinioji šios lygties pusė bus neneigiama, kai

$$4x^3 - 5x \geq 0, \qquad 4x\left(x^2 - \frac{5}{4}\right) \geq 0, \qquad 4x\left(x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \geq 0.$$

Intervalų metodu randame, kad ši nelygybė teisinga aibėje $A = \left[-\frac{\sqrt{5}}{2}; 0\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$. Matome, kad $A \cap D_l = \left\{-\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$. Vadinasi, tik šis skaičius galėtų būti sprendiniu. Įrašę jį lygtyje, įsitikiname, kad $x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ tikrai ją tenkina.

Ats.: $x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

c) Išspręsime lygtį

$$(x^2 - 4x)^2 + 3(x-2)^2 = 12.$$

Sprendimas. Lygtis apibrėžta visoje **R**. Pertvarkysime kairiąją lygties pusę:

$$(x^2-4x)^2 + 3(x^2-4x+4) = 12, \quad (x^2-4x)^2 + 3(x^2-4x) = 0,$$

$$(x^2-4x)^2(x^2-4x+3) = 0, \quad x(x-4)(x^2-4x+3) = 0.$$

Lygtis $x^2 - 4x + 3 = 0$ turi sprendinius $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Taigi pradinė lygtis turi keturis sprendinius: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$.

Ats.: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$.

d) Išspręsime dar vieną lygtį

$$(x^2 + 4x + 7)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 21x = 0.$$

Sprendimas. Lygtis apibrėžta visoje **R**. Pertvarkome:

$$(x^2 + 4x + 7)^2 + 3x(x^2 + 7) + 14x^2 = 0.$$

Įrašę lygtyje įsitikiname, kad $x = 0$ nėra jos sprendinys, todėl abi puses dalindami iš x^2 sprendinio neprarasime:

$$\left(\frac{x^2+4x+7}{x}\right)^2 + 3\,\frac{x^2+7}{x} + 14 = 0, \ \text{arba} \ \left(x + 4 + \frac{7}{x}\right)^2 + 3\left(x + 4 + \frac{7}{x}\right) - 12 + 14 = 0.$$

Pažymėję $x + 4 + \frac{7}{x} = t$, gauname lygtį $t^2 + 3t + 2 = 0$, turinčią sprendinius $t_1 = -2$, $t_2 = -1$.

Spręskime lygtį $x+4+\frac{7}{x}=-2$: $\quad x+6+\frac{7}{x}=0,\ |\cdot x \quad x^2+6x+7=0$. Gauname sprendinius $x_1=-3-\sqrt{2}$ ir $x_2=-3+\sqrt{2}$.

Lygtis $x+4+\frac{7}{x}=-1$, pertvarkyta į $x^2+5x+7=0$, sprendinių neturi (diskriminantas -3).

Ats.: $x_1=-3-\sqrt{2}$, $x_2=-3+\sqrt{2}$.

5. Teorema. Sakykime, funkcija *f* yra monotoniškai didėjanti (arba mažėjanti), o funkcijų *g* ir *h* reikšmių sritys $E_g \subset D_f$ ir $E_h \subset D_f$. Tuomet lygtys

$$f(g(x))=f(h(x)) \qquad (*)$$

ir

$$g(x)=h(x) \qquad (**)$$

yra ekvivalenčios.

Įrodymas. a) Jei x_0 yra lygties (**) sprendinys, t. y. $g(x_0)=h(x_0)$, tai $f(g(x_0))=f(h(x_0))$, jis tenkina ir lygtį (*).

b) Jei tartume, kad x_0 yra (*) lygties sprendinys, bet netenkina (**), pvz., $g(x_0)<h(x_0)$, tai iš funkcijos *f* monotoniškumo išplauktų, kad $f(g(x_0))<f(h(x_0))$, kai *f* didėjanti arba $f(g(x_0))>f(h(x_0))$, kai *f* mažėjanti. Analogiškai prieštaras gautume ir tardami, kad $g(x_0)>h(x_0)$.

Šia teorema iš tikro remiamasi, jos neminint, sprendžiant lygtis

$$2^{2x+1}=2^{3x},\quad \lg(x+3)=\lg(2x+1) \text{ ir pan.}$$

Pavyzdžiai: a) Išspręsime lygtį

$$(x^2-2x)^3+x^2-3x=x^3.$$

Sprendimas. Lygtis apibrėžta visoje **R**. Prie abiejų lygties pusių pridėję *x*, gausime:

$$(x^2-2x)^3+x^2-2x=x^3+x.$$

Įvedę funkciją $f(x)=x^3+x$, lygtį galėsime perrašyti taip: $f(x^2-2x)=f(x)$.

Ir funkcija *f*, ir funkcijos $g(x)=x^2-2x$, $h(x)=x$ apibrėžtos visoje **R**. Be to, *f* yra monotoniškai didėjanti, nes $f'(x)=3x^2+1>0$ visoje **R**. Vadinasi, gautoji lygtis ekvivalenti lygčiai $x^2-2x=x$. Toliau spręsdami, gausime $x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$.

Ats.: $x_1=0$, $x_2=3$.

b) Išspręsime lygtį

$$(3x+2)\sqrt{(3x+2)^2+3}+2x\sqrt{4x^2+3}=0.$$

Sprendimas. Pastebėję, kad $4x^2=(2x)^2$, matome, kad lygtį galima užrašyti taip:

$$f(3x+2)+f(2x)=0,\ \text{kai } f(x)=x\sqrt{x^2+3}.$$

Be to, visos funkcijos *f*, $g(x)=3x+2$, $h(x)=2x$ ir pati lygtis apibrėžtos **R**. Funkcija *f* yra monotoniškai didėjanti, nes $f'(x)=\sqrt{x^2+3}+x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\sqrt{x^2+3}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}>0$.

Perrašykime dabar lygtį taip: $f(3x+2)=-f(2x)$. Bet $-f(2x)=f(-2x)$ su visais $x\in\mathbf{R}$, nes *f* nelyginė: $f(-x)=(-x)\sqrt{(-x)^2+3}=-\left(x\sqrt{x^2+3}\right)=-f(x)$. Vadinasi, dabar lygtį galime užrašyti $f(3x+2)=f(-2x)$ ir, remdamiesi teorema, gauname jai ekvivalenčią lygtį $3x+2=$ $=-2x$, $5x=-2$, kurios vienintelis sprendinys $x=-\frac{2}{5}$.

Ats.: $x=-\frac{2}{5}$.

6. Teorema. Jei *f* yra monotoniškai didėjanti funkcija, tai lygtys

$$f(x)=x \qquad (*)$$

ir

$$f(f(x))=x \qquad (**)$$

yra ekvivalenčios.

Įrodymas. Jei x_0 yra (*) lygties sprendinys, tai $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$ – išeina, kad x_0 tenkina ir (**) lygtį.

Dabar tarkime, kad x_0 yra (**) lygties sprendinys, t. y., $f(f(x_0))=x_0$, bet nėra (*) lygties sprendinys, $f(x_0)\neq x_0$.

Sakykime, kad $f(x_0)>x_0$. Tuomet iš to, kad *f* monotoniškai didėjanti, išplaukia:

$$f(f(x_0))>f(x_0)>x_0.$$

Vadinasi, x_0 negali būti lygties (**) sprendiniu. Visai panašiai, jei būtų $f(x_0) < x_0$, gautume
$$f(f(x_0)) < f(x_0) < x_0.$$
Gauta prieštara rodo, kad x_0 yra ir (*) lygties sprendinys.

Pastaba. Teoremos sąlyga, kad f būtų monotoniškai didėjanti, yra esminė. Pavyzdžiui, funkcija $f(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ yra monotoniškai mažėjanti. Lygtis $\left(\frac{1}{16}\right)^x = x$ gali turėti tik vieną sprendinį (pagalvokite kodėl), o lygtis $f(f(x)) = x$, t. y. $\left(\frac{1}{16}\right)^{\left(\frac{1}{16}\right)^x} = x$, dar turi sprendinius $x_2 = \frac{1}{4}$ ir $x_3 = \frac{1}{2}$.

Pavyzdžiai. a) Išspręskime lygtį
$$\sqrt{2 + \sqrt{x}} = x - 2.$$

Sprendimas. Lygtis apibrėžta, kai $x \in [0; +\infty)$. Parašykime lygtį taip: $2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}} = x$. Įvedę funkciją $f(x) = 2 + \sqrt{x}$, matome, kad lygtis užrašoma $f(f(x)) = x$. Funkcija f yra monotoniškai didėjanti (kodėl?), todėl gautoji lygtis ekvivalenti lygčiai $f(x) = x$, t. y. $2 + \sqrt{x} = x$. Pažymėję $\sqrt{x} = t$ $(t > 0)$, gauname lygtį $t^2 - t - 2 = 0$, turinčią sprendinį $t_1 = 2$; $t_2 = -1 < 0$.

Iš lygties $\sqrt{x} = 2$ gauname $x = 4$.

Ats.: $x = 4$.

b) Išspręsime lygtį
$$2\sqrt[3]{2x+1} = x^3 - 1.$$

Sprendimas. Pertvarkome lygtį: $2\sqrt[3]{2x+1} + 1 = x^3$, $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2x+1} + 1} = x$. Įvedus funkciją $g(x) = \sqrt[3]{2x+1}$, lygtis įgyja pavidalą $g(g(x)) = x$.

Funkcija g yra monotoniškai didėjanti. Todėl gautoji lygtis ekvivalenti lygčiai $g(x) = x$, t. y. $\sqrt[3]{2x+1} = x$, $2x + 1 = x^3$, $x^3 - 2x - 1 = 0$. Pastebėję sprendinį $x_1 = -1$, pertvarkykim lygtį: $x^3 + x^2 - x^2 - x - x - 1 = 0$, $x^2(x+1) - x(x+1) - (x+1) = 0$, $(x+1)(x^2 - x - 1) = 0$. Gautoji (o kartu ir pradinė) lygtis turi sprendinius $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ats.: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Pastaba. Lygtį buvo galima pertvarkyti ir kitaip: į lygtį $\frac{\left(\frac{x^3-1}{2}\right)^3 - 1}{2} = x$, ir įvesti funkciją $f(x) = \frac{x^3-1}{2}$. Pabandykite.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

Išspręskite lygtis:

1. $(x+1)(5-x)\left(\sqrt{x-8} + 2\right) = 4$;

2. $\sqrt{3+x} = 3 - x\sqrt{x}$;

3. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = -x^2 + 2x - 1$;

4. $\sqrt{2x + 2\sqrt{2x-1}} = \sqrt[3]{14x - 7} + 1$;

5. $(x^2 + x)^2 - 21x^2 + 3(x-3)^2 = 27$;

6. $(x^2 + 3x - 4)^2 + 2x^3 + 3x^2 - 8x = 0$;

7. $x^2 - 2x - 1 + \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{x+2}$;

8. $3^{x^2-3x} + 3x^2 - 15x + 12 = 3^{2(x-2)}$;

9. $\sqrt[3]{6+x} = x^3 - 6$;

10. $2\sqrt{1 + 2\sqrt{x}} = x - 1$.

Sprendimų užuominos: **1-3** uždavinius spręskite, remdamiesi teorinės medžiagos 2 ir 3 skyrių idėjomis, **4-6** uždavinius – 4 skyriaus idėjomis, **7-10** uždavinius – 5 ir 6 skyrių idėjomis.

VIII. LIEKANŲ ARITMETIKA

Teorinę medžiagą parengė bei aštuntąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis (Vilniaus universitetas)

Gerai žinome, kad sudauginus du sveikuosius skaičius ar sudėjus juos bei vieną iš kito atėmus, gaunamas sveikasis skaičius. Tačiau dalijant vieną sveikąjį skaičių iš kito, ne visada gaunamas sveikasis skaičius, o iš nulio net nedalijama.

Sakoma, kad sveikasis skaičius *a* dalijasi iš sveikojo skaičiaus *b*. Jeigu yra toks sveikasis skaičius *k*, kuriam esant galioja lygybė

$$a = k \cdot b.$$

Skaičius *b* yra vadinamas skaičiaus *a daliklu*, o *k* vadinamas *dalmeniu.*

Kai skaičius *a* nesidalija iš skaičiaus *b*, visada galima rasti tokį sveikąjį skaičių *k*, kad galiotų lygybė

$$a = k \cdot b + r, \quad r \in \{1; 2; \ ...; b-1\}.$$

Skaičius *r* čia vadinamas dalybos *liekana*.

Abu atvejus – dalumo ir nedalumo – galima sujungti tokia formule:

$$a = k \cdot b + r, \quad r \in \{0; 1; 2; \ ...; b-1\}. \tag{1}$$

Skaičius *k* čia vadinamas dalmeniu, o *r* – liekana. Aišku, kad skaičius $r = 0$ tik formaliai yra skaičiaus *a* dalybos iš *b* liekana. Skaičius *b* vadinamas skaičiaus *a* dalikliu tik kai $r = 0$.

Gebėjimas nagrinėti ir spręsti sveikųjų skaičių dalumo uždavinius bei apskaičiuoti dalybos liekanas yra naudingas ne tik dalyvaujant matematikos uždavinių sprendimo konkursuose, bet ir sprendžiant rimtas matematikos ir jos taikymo problemas.

Šioje jauniesiems matematikams skirtoje temoje skaičių dalumą bei dalybos liekanų skaičiavimą nagrinėsime spręsdami uždavinius, visai nesileisdami į gilesnius teorinius samprotavimus bei apibendrintą metodų analizę. Bet iš pradžių susipažinkime su sveikųjų skaičių dalybos liekanų aritmetika.

Tegu a_1 ir a_2 yra bet kurie sveikieji skaičiai, o *b* yra teigiamas sveikasis skaičius. Nagrinėkime skaičių a_1 ir a_2 sumos $a_1 + a_2$ bei sandaugos $a_1 \cdot a_2$ dalybos iš skaičiaus *b* liekanų (jas pažymėkime $r(a_1 + a_2)$ ir $r(a_1 a_2)$) ryšį su a_1 ir a_2 dalybos iš *b* liekanomis $r_1 = r(a_1)$ ir $r_2 = r(a_2)$.

Tarę, kad

$$a_1 = k_1 b + r_1 \quad \text{ir} \quad a_2 = k_2 b + r_2,$$

$r_1, r_2 \in \{0; 1; 2; \ ...; b-1\}$, gausime:

1) $a_1 + a_2 = (k_1 b + r_1) + (k_2 b + r_2) = (k_1 + k_2) b + (r_1 + r_2)$

ir

2) $a_1 \cdot a_2 = (k_1 b + r_1) \cdot (k_2 b + r_2) = (k_1 k_2 b + r_1 k_2 + r_2 k_1) b + r_1 \cdot r_2$.

Iš čia išplaukia, kad:

$$r(a_1 + a_2) = r(r_1 + r_2) \tag{2}$$

ir

$$r(a_1 \cdot a_2) = r(r_1 \cdot r_2). \tag{3}$$

Šios sveikųjų skaičių sumos ir sandaugos dalybos iš to paties sveikojo skaičiaus savybės yra gana paprastos, bet labai svarbios sprendžiant uždavinius. Dar daugiau, jos galioja ne tik dviejų, bet ir bet kurio baigtinio skaičiaus sveikųjų dėmenų ir dauginamųjų atveju. Čia pat norėtume atkreipti dėmesį į tai, kad bet kurį sveikąjį skaičių *a* dalyti galima tiek iš teigiamo, tiek iš neigiamo sveikojo skaičiaus – svarbu, kad jis nebūtų nulis. Bet apibrėžime esanti sąlyga $b > 0$ nė kiek neapriboja dalybos taikymo galimybių, nes ir šiuo atveju dalmuo gali būti tiek teigiamas, tiek neigiamas.

Esant sąlygai $b > 0$, lygybę

$$\frac{a}{b} = k + \frac{r}{b}, \quad r \in \{0; 1; 2; \ ...; b-1\}, \tag{4}$$

gaunamą iš (1) išraiškos, galima suvokti kaip skaičiaus $\frac{a}{b}$ išraišką sveikąja dalimi k ir trupmenine dalimi $\frac{r}{b}$, nes $\frac{r}{b} \in [0; 1)$.

1 pavyzdys. Apskaičiuokime skaičiaus

$$a = 2020 \cdot 2021 \cdot 2022 + 2023^3$$

dalybos iš 7 liekaną.

Sprendimas. Kadangi $2020 = 288 \cdot 7 + 4$, tai

$$a = (288 \cdot 7 + 4) \cdot (288 \cdot 7 + 5) \cdot (288 \cdot 7 + 6) + (289 \cdot 7 + 0)^3,$$

todėl (pagal (2) ir (3))

$$r(a) = r(4 \cdot 5 \cdot 6 + 0) = r(120).$$

Vadinasi,

$$120 = 17 \cdot 7 + 1 \Rightarrow r(120) = 1 \Rightarrow r(a) = 1.$$

Ats.: 1.

2 pavyzdys. Raskime skaičiaus 3^{2023} paskutinį skaitmenį.

Sprendimas. Aišku, kad ieškomas skaitmuo yra skaičiaus 3^{2023} dalybos iš 10 liekana $r(3^{2023})$. Pabandykime išsiaiškinti, kokia ji. Kadangi

$$3^{2023} = 3^{4 \cdot 505 + 3} = 81^{505} \cdot 27, \quad 81^{505} = (8 \cdot 10 + 1)^{505}, \quad r(81^{505}) = r(1^{505}) = 1, \quad r(27) = 7,$$

tai $r(3^{2023}) = r(1 \cdot 7) = 7$.

Vadinasi, skaičiaus 3^{2023} paskutinis skaitmuo yra 7.

Ats.: 7.

3 pavyzdys. Įrodykime, kad skaičius $a_n = 13^{2n+1} + 1$, $n \in \mathbf{N}$, dalijasi iš 7.

Įrodymas. Kadangi

$$a_n = 13^{2n+1} + 1 = 13^{2n} \cdot 13 + 1 = 169^n \cdot 13 + 1 = (7 \cdot 24 + 1)^n \cdot (7 \cdot 1 + 6) + 1,$$

tai skaičiaus a_n dalybos iš 7 liekana sutampa su skaičiaus $1^n \cdot 6 + 1$ dalybos iš 7 liekana, kuri lygi nuliui. O tai ir reiškia, kad a_n dalijasi iš 7 esant bet kuriam natūraliajam skaičiui n.

4 pavyzdys. Įrodykime, kad skaičius

$$a_n = 4^n + 15n - 1, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{5}$$

dalijasi iš 9.

Įrodymas. Iš pradžių įrodykime, kad a_n dalijasi iš 3. Kadangi

$$\begin{aligned} 4^n - 1 &= (4^n - 4^{n-1}) + (4^{n-1} - 4^{n-2}) + \ldots + (4^2 - 4) + (4 - 1) = \\ &= 4^{n-1} \cdot (4-1) + 4^{n-2} \cdot (4-1) + \ldots + 4 \cdot (4-1) + (4-1) = \\ &= 3(4^{n-1} + 4^{n-2} + \ldots + 4 + 1), \end{aligned}$$

tai $a_n = (4^n - 1) + 15n = 3 \cdot (4^{n-1} + 4^{n-2} + \ldots + 4 + 1 + 5n)$.

Iš šios išraiškos ir matome, kad a_n dalijasi iš 3, kai $n \in \mathbf{N}$.

Skliaustuose esantį reiškinį pažymėkime b_n. Jo dalumui iš 3 įrodyti taikykime dalybos iš 3 liekanų analizės metodą. Kadangi $4 = 3 \cdot 1 + 1$, tai skaičiaus

$$b_n = (4^{n-1} + 4^{n-2} + \ldots + 4) + 1 + 5n$$

dalybos iš 3 liekana $r(b_n)$ sutampa su skaičiaus

$$(1^{n-1} + 1^{n-2} + \ldots + 1) + 1 + 5n = (n-1) + 1 + 5n = 6n$$

dalybos iš 3 liekana $r(6n)$:

$$r(b_n) = r(6n) = 0.$$

Tai ir reiškia, kad skaičius b_n dalijasi iš 3, o skaičius $a_n = 3b_n$ dalijasi iš 9.

5 pavyzdys. Įrodykime, kad bet kurių iš eilės einančių trijų natūraliųjų skaičių kubų suma dalijasi iš 9.

Įrodymas. Tegu n yra pirmas trejeto skaičius, o a_n yra skaičių n, $n+1$ ir $n+2$ kubų suma:

$$a_n = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3.$$

Sudarykime skaičių n, $n+1$ ir $n+2$ dalybos iš 9 liekanų $r(n)$, $r(n+1)$ ir $r(n+2)$ visus trejetus ($r(n)$; $r(n+1)$; $r(n+2)$) $r(n) \in \{0; 1; 2; ...; 8\}$. Gausime:

$$(0;\ 1;\ 2),\ \ (1;\ 2;\ 3),\ \ (2;\ 3;\ 4),$$
$$(3;\ 4;\ 5),\ \ (4;\ 5;6),\ \ (5;\ 6;\ 7),$$
$$(6;\ 7;\ 8),\ \ (7;\ 8;\ 0),\ \ (8;\ 0;\ 1).$$

Visais atvejais skaičius

$$(r(n))^3 + (r(n+1))^3 + (r(n+2))^3$$

dalijasi iš 9. Vadinasi, skaičiaus

$$a_n = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$

dalybos iš 9 liekana $r(a_n)$ lygi nuliui, kai n yra bet kuris natūralusis skaičius.

6 pavyzdys. Įrodykime, kad nėra nė vieno natūraliųjų skaičių m, n ir k trejeto (m; n; k), kuriam esant galiotų lygybė

$$5^m + 9^n = 13^k. \qquad (6)$$

Įrodymas. Tegu m, n ir k yra natūralieji skaičiai. Dalydami iš 4 gausime, kad

$$r(5^m) = 1, \quad r(9^n) = 1 \quad \text{ir} \quad r(13^k) = 1, \quad \text{nes} \quad 5 = 4+1, \quad 9 = 2\cdot 4+1, \quad 13 = 3\cdot 4+1.$$

Todėl

$$r(5^m + 9^n) = r(1+1) = 2.$$

Vadinasi, sumos $5^m + 9^n$ dalybos iš 4 liekana nesutampa su skaičiaus 13^k dalybos iš 4 liekana, kad ir koks būtų natūraliųjų skaičių m, n ir k trejetas (m; n; k). Šios išvados pakanka teiginiui pagrįsti.

7 pavyzdys. Įrodykime, kad skaičius

$$a_n = n^2 - 5n + 29, \quad n \in \mathbf{N},$$

nesidalija iš 169.

Įrodymas. Kad skaičius a_n dalytųsi iš 169, jis būtinai turi dalytis iš 13.

Natūralųjį skaičių n užrašę pavidalu $n = 13k + r$, $r \in \{0; 1; 2; ...; 12\}$, gausime, kad

$$a_n = (13k + r)^2 - 5(13k + r) + 29 = 13k(13k + 2r - 5) + (r^2 - 5r + 29).$$

Kad a_n dalytųsi iš 13, skaičius $r^2 - 5r + 29$ turi dalytis iš 13. Tiesiogiai tikrindami gauname, kad gali būti tik $r = 9$ $(9^2 - 5\cdot 9 + 29 = 65)$.

Šiuo atveju

$$a_n = 13k(13k + 2\cdot 9 - 5) + 65 = 169k(k+1) + 65.$$

Matome, kad jis nesidalija iš 169. Vadinasi, nėra tokio natūraliojo skaičiaus n, kad a_n dalytųsi iš 169.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Raskite skaičiaus $a = 3\cdot 11^{31} + 5\cdot 31^{11} + 17$ dalybos iš 12 liekaną.

2. Raskite skaičiaus $a = 2^{222} + 3^{333} + 5^{555}$ dalybos iš 7 liekaną.

3. Įrodykite, kad skaičius $a = 23^{17} + 17^{23}$ dalijasi iš 8, bet nesidalija iš 6.

4. Įrodykite, kad skaičius $a = 12^{169} - 155$ dalijasi ir iš 13, ir iš 143.

5. Apskaičiuokite skaičiaus $a = (77 + 11^{121})^{71}$ dalybos iš 6 liekaną.

6. Įrodykite, kad nėra nė vieno natūraliojo skaičiaus *n*, kad $a_n = n^2 + 7n + 2$ dalytųsi iš 13.

7. Raskite skaičiaus 2^{123} paskutinį skaitmenį.

8. Nustatykite, ar yra bent vienas natūralusis skaičius *n*, kad $a_n = 14n^3 + 9n^2 + n$ nesidalytų iš 3.

9. Nustatykite, kokias reikšmes gali įgyti skaičiaus $a = 3xy(x^4 - y^4)$ dalybos iš 5 liekana, jei x ir y yra didesni už 4 natūralieji skaičiai ir $x > y$.

10. Įrodykite, kad nėra tokio natūraliojo skaičiaus *n*, kad jo kvadrato n^2 paskutiniai du skaitmenys būtų 75.

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

1. Vario ir alavo lydinio masė lygi 12 kg, šiame lydinyje yra 45% vario. Kiek gryno alavo reikia pridėti į šį lydinį, kad vario jame būtų 40%?
2. Raskite sekos (x_n) bendrojo nario formulę, jei $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n,\ x_1 = 2,\ x_2 = 5$.
3. Stačiojo trikampio ABC statinis $BC = 5$, įžambinėje AB yra taškas E ir $AE = 6,\ EB = 7$. Iš taško E iškeltas statmuo atkarpai AB kerta statinį AC taške F. Raskite keturkampio $BCFE$ plotą.
4. Raskite skaičiaus 7^{2023} paskutinį skaitmenį.

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tuo pačiu laiko momentu iš punkto A ta pačia kryptimi išvažiavo du dviratininkai, o po valandos – ir automobilis. Pirmo dviratininko greitis 24 km/h, o antro dviratininko greitis 18 km/h. Automobilis važiuodamas pastoviu greičiu antrą dviratininką pasivijo 10 minučių anksčiau, negu pirmą dviratininką. Raskite automobilio greitį.

Sprendimas. Tegu v yra automobilio greitis (km/h), o t laikas (h), per kurį automobilis pasivijo antrą automobilį. Pagal sąlygą, turi būti

$$vt = 18(1+t) \text{ ir } v\left(t+\frac{1}{6}\right) = 24\left(\frac{7}{6}+t\right).$$

Iš pirmos lygties gauname, kad

$$v = \frac{18(1+t)}{t}.$$

Šią išraišką įrašę į antrą lygtį gauname:

$$\frac{18(1+t)}{t}\cdot\left(t+\frac{1}{6}\right) = 24\left(\frac{7}{6}+t\right),$$

$$\frac{3(1+t)(6t+1)}{t} = 4(7+6t),$$

$$3(6t^2+7t+1) = 28t+24t^2,$$

$$6t^2+7t-3=0.$$

Ši lygtis turi tik vieną teigiamą sprendinį $t=\frac{1}{3}$. Vadinasi,

$$v = \frac{18\left(1+\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} = 72 \text{ (km/h)}.$$

Ats.: 72 km/h.

2. Išspręskite lygtį $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55.$

Sprendimas. Pažymėkime $t=(x^2+2x)^2$. Tada gausime:

$$(x^2+2x)^2-(x^2+2x+1)=55 \Rightarrow t^2-(t+1)=55 \Rightarrow t^2-t-56=0.$$

Ši lygtis turi du sprendinius: $t_1=-7$, $t_2=8$.

Toliau:

1) $x^2+2x=-7 \Rightarrow x^2+2x+7=0 \Rightarrow (x+1)^2+6=0 \Rightarrow \varnothing$**;**

2) $x^2+2x=8 \Rightarrow (x+1)^2=9 \Rightarrow x+1=\pm 3 \Rightarrow x=-4$ arb*a* $x=2.\varnothing$**;**

Ats.:–4; 2.

3. Parduotuvė pardavė 50 skaičiuotuvų su 12 % antkainiu. Kiek daugiausiai skaičiuotuvų ji galėtų parduoti su 8 % nuolaida (nuo pradinės kainos), kad nepatirtų nuostolių?

Sprendimas. Tegu p yra pradinė skaičiuotuvo kaina, pavyzdžiui, eurais. Už parduotus 50 skaičiuotuvų su 12 % antkainiu parduotuvė gavo $50\cdot 0{,}12=6$ eurus papildomų pajamų.

Parduodama x skaičiuotuvų su 8 % nuolaida parduotuvė patirtų $x\cdot 0{,}08=0{,}08x$ eurų nuostolių.

Skaičiui x rasti reškia išspręsti nelygybę $0{,}08x\le 6$. Gauname, kad $x\le 75$.

Ats.: 75.

4. Raskite mažiausią realųjį skaičių x, tenkinantį nelygybę $\frac{9x-68-3x^2}{x^2+25} \geq -2.$

Sprendimas. Reiškinys $\frac{9x-68-3x^2}{x^2+25}$ yra apibrėžtas visoje realiųjų skaičių aibėje.

Kadangi $x^2+25>0$, kai $x \in (-\infty; \infty)$, tai nelygybė $\frac{9x-68-3x^2}{x^2+25} \geq -2$ yra ekvivalenti nelygybei $9x-68-3x^2 \geq -2(x^2+25)$. Spręsdami ją gauname:

$9x-68-3x^2 \geq -2x^2-50 \Rightarrow x^2-9x+18 \leq 0 \Rightarrow (x-4{,}5)^2-2{,}25 \leq 0 \Rightarrow (x-4{,}5)^2 \leq 2{,}25 \Rightarrow$
$\Rightarrow -1{,}5 \leq x-4{,}5 \leq 1{,}5 \Rightarrow 3 \leq x \leq 6.$

Vadinasi, 3 yra mažiausias nelygybės sprendinys.

Ats.: 3.

5. Statinėje, įpylus į ją vandens tiek, kad dar liktų 30% laisvo jos tūrio, būtų 30 litrų vandens daugiau, negu į ją įpylus 30% jos tūrio. Kokia statinės talpa?

Sprendimas. Tarkime, kad statinės talpa yra x litrų. Kai pripilta vandens, kad dar liktų 30% laisvo jos tūrio, tai yra pripilta $0{,}7x$ litrų vandens, o kai pripilta 30% statinės tūrio, tai pripilta $0{,}3x$ litrų vandens. Pagal sąlygą $0{,}7x - 0{,}3x = 30,\ x = 75.$

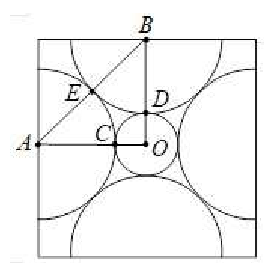
Ats.: 75 ltr.

6. Išspręskite nelygybę $\frac{|x|x-\frac{|x|}{x}}{x-1} < x-1$

Sprendimas. Akivaizdu, kad $x \neq 0$ ir $x \neq 1$. Jei $x < 0$, tai nelygybė tampa tokia: $\frac{-x^2+1}{x-1} < x-1$, t. y. $-(x+1) < x-1$, iš kur gauname, kad $x > 0$, taigi šiuo atveju sprendinių nėra. Kai $x > 0$, tai $\frac{x^2-1}{x-1} < x-1,\ \ x+1 < x-1$, o ši nelygybė neturi sprendinių. Taigi duotoji nelygybė sprendinių neturi.

Ats.: sprendinių nėra

7. Į kvadratą įbrėžti keturi besiliečiantys pusapskritimiai (žr. pav.), kurių centrai – kvadrato kraštinių vidurio taškai, o spinduliai lygūs 1 cm. Apskaičiuokite apskritimo, esančio kvadrato viduryje ir liečiančio visus keturis pusapskritimius, spindulį.



Sprendimas. Sakykime, kad taškas O yra apskritimo, esančio kvadrato viduje ir liečiančio visus keturis pusapskritimius, centras, taškai A ir B yra dviejų gretimų kvadrato kraštinių vidurio taškai, iš jų centrų nubrėžti pusapskritimiai liečiasi taške E ir liečia kvadrato viduje esantį apskritimą atitinkamai taškuose C ir D (žr. pav.). Sakykime, kad r yra ieškomasis spindulys. Kadangi taškai A, C, O yra vienoje tiesėje, statmenoje kvadrato kraštinei, o taškai B, D, O yra vienoje tiesėje, statmenoje kitai kvadrato kraštinei, tai trikampis AOB yra statusis lygiašonis trikampis, kurio statinių ilgiai yra $1 + r.$ Kadangi taškai A, E, B yra vienoje tiesėje, tai šio stačiojo trikampio įžambinė $AB = 2.$ Iš Pitagoro teoremos turime, kad $(1 + r)^2 + (1 + r)^2 = 4.$ Teigiama šios lygties šaknis yra $r = \sqrt{2} - 1.$

Ats.: $\sqrt{2}-1$.

8. Išspręskite lygtį $x(x+4)+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+4\right)=0.$

Sprendimas. Sudauginę gauname lygtį $x^2+\frac{1}{x^2}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)=0.$ Pažymėję $t=x+\frac{1}{x}$ gauname kvadratinę lygtį $t^2+4t-2=0,$ kuri turi du sprendinius $t_1=-2-\sqrt{6}$ ir $t_2=-2+\sqrt{6}.$ Belieka išspręsti dvi lygtis: $x+\frac{1}{x}=-2-\sqrt{6}$ ir $x+\frac{1}{x}=-2+\sqrt{6}.$ Gausime:

1) $x+\frac{1}{x}=-2-\sqrt{6}\Rightarrow x^2+(2+\sqrt{6})x+1=0$ (nes $x\neq 0$) $\Rightarrow x=\frac{-2-\sqrt{6}\pm\sqrt{\left(2+\sqrt{6}\right)^2-4}}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{-2-\sqrt{6}\pm\sqrt{6+4\sqrt{6}}}{2};$

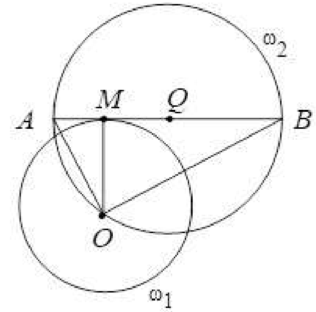
2) $x+\frac{1}{x}=-2+\sqrt{6}\Rightarrow x^2-(\sqrt{6}-2)x+1=0\Rightarrow\left(x-\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)^2+1-\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)^2=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(x-\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)^2+\frac{2\sqrt{6}-3}{2}=0\Rightarrow\varnothing$ (nes $2\sqrt{6}-3>0$).

Ats.: $\frac{-2-\sqrt{6}\pm\sqrt{6+4\sqrt{6}}}{2}.$

9. Apskritimo ω_1 centras yra kito apskritimo ω_2 taškas, apskritimas ω_1 liečia apskritimo ω_2 skersmenį AB taške M taip, kad $AM=m,\ BM=n.$ Raskite apskritimo ω_1 ilgį.

Sprendimas. Jei taškas O yra apskritimo ω_1 centras (žr. pav.), tai kampas AOB yra statusis, taigi apskritimo ω_1 spindulys lygus stačiojo trikampio AOB aukštinei. Iš trikampių AOM ir OBM panašumo turime, kad $\frac{AM}{OM}=\frac{OM}{BM}$, taigi $OM=\sqrt{AM\cdot BM}=\sqrt{mn}.$ Taigi apskritimo ω_1 ilgis lygus $2\pi\sqrt{mn}.$



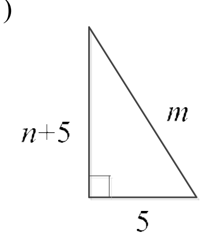
Ats.: $2\pi\sqrt{mn}.$

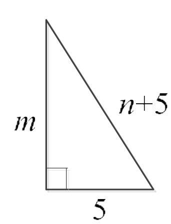
10. Trikampio kraštinių ilgiai yra 5, *m* ir *n*+5. Raskite visas natūraliųjų skaičių *m* ir *n* poras (*m*; *n*), kurioms esant šis trikampis yra statusis.

Sprendimas. Kad trikampis būtų statusis, ilgiausios jo kraštinės ilgis galėtų būti tik *m* arba *n*+5. Aišku, kad *m* ir *n* turi būti tokie natūralieji skaičiai (pagal sąlygą), kad tenkintų lygtį $m^2=(n+5)^2+25$ arba $(n+5)^2=m^2+25.$

Nagrinėkime du atvejus:

1) ir 2)





Pirmu atveju turi galioti šios sąlygos:

$m^2 = (n+5)^2 + 25$, $m > n+5$ ir $n+10 > m$.

Iš čia gauname, kad $n+5 < m < n+10$. Vadinasi, galėtų būti tik $m = n+5+k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Toliau:

$$(n+5+k)^2 = (n+5)^2 + 25 \Rightarrow n^2 + 25 + k^2 + 10n + 10k + 2nk = n^2 + 10n + 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2nk = 25 - k^2 - 10k \Rightarrow n = \frac{25 - k^2 - 10k}{2k}.$$

Taikydami perrankos metodą ($k = 1, 2, 3, 4$) gauname, jog $n = 7$. O tada $m = 13$.

Antru atveju turi būti $(n+5)^2 = m^2 + 25$, $m+5 > n+5$ ir $m < n+5$. Gauname, kad $n < m < n+5$ ir $m^2 = n^2 + 10n$.

Toliau:

$$m = n+k,\ \ k = 1, 2, 3, 4 \ \Rightarrow (n+k)^2 = n^2 + 10(n+k) \Rightarrow (10-2k)n = k^2 \Rightarrow n = \frac{k^2}{10-2k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 8 \ \ (\text{ka}i\ \ k = 4),\ \ m = 12.$$

Ats.: (13; 7), (12; 8).

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Iš verdančio virdulio nupilta $\frac{2}{3}$ vandens, o į likusį vandenį virdulyje pripilta tiek pat kiek nupilta 16°C temperatūros vandens. Raskite sumaišyto vandens temperatūrą virdulyje.

Sprendimas. Verdančio vandens virdulyje temperatūra yra 100°C. Tegu virdulio talpa yra a litrų. Nupylus $\frac{2}{3}$ virdulio, likęs virdulyje vanduo sudarė $\frac{a}{3}\cdot 100=\frac{100a}{3}$ šilumos vienetų. Papildžius virdulį $\frac{2a}{3}$ litro 16°C vandeniu, t. y. $\frac{2a}{3}\cdot 16=\frac{32a}{3}$ šilumos vienetų, virdulyje sumaišytas vanduo sudarė $\frac{100a}{3}+$ $+\frac{32a}{3}=\frac{132}{3}$ šilumos vienetų. Vadinasi, vandens mišinio virdulyje temperatūra buvo $\frac{132a}{3}:a=44$ (°C).

Ats.: 44°C.

2. 50 g 560-osios prabos aukso sulydyta su nežinomos prabos aukso lydiniu ir gauta 300 g. 760- osios prabos aukso lydinys. Raskite antrojo lydinio aukso prabą.

Sprendimas. Sakykime, kad antrojo lydinio aukso praba yra x, tai jo paimta $300-50=250$ (g) ir šiame lydinyje gryno aukso yra $\frac{250\cdot x}{1000}=\frac{x}{4}$ (g). Iš pirmojo lydinio gryno aukso paimta $\frac{50\cdot 560}{1000}=28$ (g). Kadangi naujame lydinyje yra $\frac{300\cdot 760}{1000}=228$ (g) gryno aukso, tai pagal sąlygą:

$$0{,}25x+28=228,\quad 0{,}25x=200,\quad x=800.$$

Ats.: 800-oji praba arba 800 ‰.

3. (Sąmojo uždavinys). Valstietis, važiuodamas į pievas šieno, pasiėmė tris sūnus: 15 metų, 12 metų ir 10 metų amžiaus. Grįždamas atgal su šienu, 13,5 km kelią berniukai iš eilės važiavo ant vežimo, kiekvienas savo amžiui atvirkščiai proporcingą nuotolį. Kiek kilometrų kiekvienas berniukas važiavo ant vežimo?

Sprendimas. Sprendžiant uždavinį reikia skaičių 13,5 padalinti atvirkščiai proporcingai skaičiams 15, 12 ir 10, t. y. santykiu $\frac{1}{15}:\frac{1}{12}:\frac{1}{10}$. Vadinasi, $\frac{1}{15}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{10}x=13{,}5$ ir $\frac{1}{4}x=13{,}5$, tai $x=54$.

15 metų sūnus gali važiuoti $54\cdot\frac{1}{15}=3{,}6$ (km), 12 metų – $54\cdot\frac{1}{12}=4{,}5$ (km), o 10 metų – $54\cdot\frac{1}{10}=5{,}4$ (km).

Ats.: 3,6 km, 4,5 km, 5,4 km.

4. Laikrodis rodo vidurdienį. Po kiek mažiausiai laiko valandinė rodyklė vėl sutaps su minutine rodykle?

Sprendimas. Tai tipinis dviejų objektų (laikrodžio minutinės ir valandinės rodyklių) judėjimo vienas paskui kitą, t. y. vijimosi, uždavinys:

1. Laikrodžio rodyklės vėl sutaps, kai minutinė rodyklė pasisuks 360° kampu.

2. Per 1 min. minutinė rodyklė pasisuka $360^{\circ}:60=6^{\circ}$ kampu, o valandinė – $30^{\circ}:60=0{,}5^{\circ}$ kampu, todėl per 1 min. minutinė rodyklė aplenkia valandinę $6^{\circ}-0{,}5^{\circ}=5{,}5^{\circ}$.

Pagal sąlygą minutinė rodyklė vėl sutaps su valandine po $360^{\circ}:5{,}5^{\circ}=\frac{720}{11}=65\frac{5}{11}$ (min.), t. y. po 1 h $5\frac{5}{11}$ min.

Ats.: 1 h $5\frac{5}{11}$ min.

5. Darbininko darbo našumas pakilo 20 %. Kiek procentų sutrumpės laikas tam pačiam darbui atlikti?

Sprendimas. Darbininko darbo našumas ir laikas tam pačiam darbui atlikti yra atvirkščiai proporcingi dydžiai.

Sakykime, esant tam tikram darbininko darbo našumui, t. y. 100 %, laikas yra t laiko vienetų, tai esant 120 % darbo našumui, laikas bus x laiko vienetų. Vadinasi,

100 % našumas – t laiko vienetų 120 % našumas – x laiko vienetų	$\Rightarrow\ \frac{x}{t}=\frac{100}{120},\ x=\frac{10t}{12}.$

Laikas sutrumpėjo $t-\frac{10t}{12}=\frac{2t}{12}=\frac{t}{6}$, t. y. $\frac{1}{6}$ buvusio laiko. Vadinasi, $100\,\%\cdot\frac{1}{6}=16\frac{2}{3}\,\%$.

Ats.: $16\frac{2}{3}\,\%$.

6. Naujai iškasta akmens anglis yra 2 % drėgnumo. Po tam tikro laiko anglis dar įsiurbia tam tikrą kiekį drėgmės ir jau yra 15 %. Kiek padidės, atsižvelgiant į tai, naujai iškastos $13\frac{3}{8}$ tonos anglies svoris (tūkstantosios tikslumu)?

Sprendimas. Kadangi $13\frac{3}{8}t=13{,}375t$, tai naujai iškastoje akmens anglyje sausųjų medžiagų yra $13{,}375\cdot(1-0{,}02)=13{,}1075\,(t)$. Kadangi padidėjus drėgnumui sausosios medžiagos sudaro $100-15=85\,(\%)$, tai

$13{,}1075\ t\ -\ 85\ \%$ $x\ \ t\ -\ 100\ \%$	$\Rightarrow$	$1\,\%=\frac{13{,}1075}{85}$ $1\,\%=\frac{x}{100}$	$\Rightarrow$	$\frac{x}{100}=\frac{13{,}1075}{85}$ ir $x=\frac{13{,}1075\cdot100}{85}=15{,}420588,$

Vadinasi, padidėjimas $15{,}420588-13{,}375=2{,}045588\approx2{,}046\,(t)$.

Ats.: 2,046 *t.*

7. Miško sklype medienos prieaugis per metus sudarė 10 %. Medienos kiekis sklype dabar apytiksliai lygus $8{,}50\ 10^4$ m^3. Kiek kubinių metrų medienos šiame sklype

a) buvo prieš 4 metus?

b) bus po 5 metų?

Nurodymas. Atsakymus pateikite standartine skaičiaus išraiška $a\cdot10^n$, skaičių a parašę šimtosios tikslumu.

Sprendimas. Turime reikalą su sudėtiniais procentais.

a) Tegu prieš 4 metus medienos kiekis miško sklype buvo x m^3, tai

$$x\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)^4=8{,}50\cdot10^4,\quad x\cdot1{,}1^4=8{,}50\cdot10^4,$$

$$x=\frac{8{,}50\cdot10^4}{1{,}1^4}=\frac{8{,}50\cdot10^4}{1{,}4641}=5{,}8056143...\cdot10^4\approx5{,}81\cdot10^4\,(\text{m}^3).$$

b) Po 5 metų medienos kiekis miško sklype bus:

$$8{,}50\cdot10^4\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)^5=8{,}50\cdot10^4\cdot1{,}1^5=13{,}689335...\cdot10^4=1{,}3689335...\cdot10^5\approx1{,}37\cdot10^5$$

(m^3).

Ats.: a) $\approx5{,}81\cdot10^4$ (m^3); b) $\approx1{,}37\cdot10^5$ (m^3).

8. Po aštuonerių metų iš 8 000 Eur palikimo sumos buvo likę 31,25 Eur. Po kiek tų pačių procentų likutinės sumos išleido kasmet paveldėtojas?

Sprendimas. Turime vėl sudėtinių procentų uždavinį, kai žinodami pradinę ir likutinę pinigų sumas, taip pat laikotarpio trukmę, norime surasti procentų reikšmę. Remdamiesi sudėtinių procentų skaičiavimais sudarome lygtį: $8000\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)^8=31{,}25$, tai $\left(1-\frac{p}{100}\right)^8=0{,}039062$ ir $\left(1-\frac{p}{100}\right)^4=\sqrt{0{,}039062}$, $\left(1-\frac{p}{100}\right)^4=0{,}00624995...$ Analogiškai: $\left(1-\frac{p}{100}\right)^2=0{,}2499989...$, o $1-\frac{p}{100}=0{,}4999988...$. Todėl $\frac{p}{100}=0{,}5000012...$ ir $p=50\,\%$.

Ats.: 50 %.

9. Trys seserys pintinaitę gautų slyvų pasidalijo šitaip: pirmoji pasiėmė $\frac{1}{3}$ visų slyvų ir dar 8 slyvas, antroji pasiėmė $\frac{1}{3}$ likusiųjų ir dar 8 slyvas, trečioji pasiėmė vėl $\frac{1}{3}$ antrą kartą likusių slyvų ir dar paskutines 8 likusias slyvas. Kiek slyvų gavo kiekviena sesuo?

Sprendimas. I būdas (Algebrinis).

Tegu pintinaitėje buvo x slyvų. Pirmoji sesuo pasiėmė $\left(\frac{x}{3}+8\right)$ slyvas ir pintinėje liko $x-\frac{x}{3}-8=\frac{2x}{3}-8$ (slyvos). Antroji sesuo pasiėmė $\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{3}-8\right)+8=\frac{2}{9}x-\frac{8}{3}+8=\frac{2}{9}x+\frac{16}{3}$ (slyvas), todėl slyvų pintinėje dar liko $\frac{2}{3}x-8-\frac{2}{9}x-\frac{16}{3}=\frac{4}{9}x-\frac{40}{3}$. Trečioji sesuo pasiėmė $\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}x-\frac{40}{3}\right)+8=\frac{4}{27}x-\frac{40}{9}+8=\frac{4}{27}x+\frac{32}{9}$ (slyvas). O tai likusios pintinaitėje slyvos. Vadinasi, pagal sąlygą:

$\frac{4}{27}x+\frac{32}{9}=\frac{4}{9}x-\frac{40}{3}$, tai $\frac{4}{9}x-\frac{4}{27}x=\frac{32}{9}+\frac{40}{3}$ ir $\frac{8}{27}x=\frac{152}{9}$. Todėl $x=57$.

Taigi pirmoji sesuo pasiėmė $57\cdot\frac{1}{3}+8=27$ (slyvas), antroji – $(57-27)\cdot\frac{1}{3}+8=30\cdot\frac{1}{3}+8=18$ (slyvų), o trečioji – $(57-27-18)\cdot\frac{1}{3}+8=12$ (slyvų).

II būdas (Aritmetinis).

Pradėkime nuo III sesers paimtų slyvų. Kadangi ši, pagal sąlygą, „pasiėmė $\frac{1}{3}$ likusių slyvų ir dar paskutines 8 slyvas“, tai reiškia, kad šios ir yra $\frac{2}{3}$ slyvų, tekusių mergaitei. Vadinasi, trečioji sesuo gavo $8:\frac{2}{3}=12$ (slyvų).

Spręskime „atgal“ toliau. Kai II sesuo paėmė 8 slyvas, tai pintinaitėje buvo likę $12+8=20$ (slyvų) ir šios sudarė $\frac{2}{3}$ likusių slyvų. Reiškia antroji sesuo paėmė $20:\frac{2}{3}-12=30-12=18$ (slyvų).

Kai I sesuo paėmė 8 slyvas, tai pintinaitėje buvo likę $12+18+8=38$ (slyvos) ir jos sudarė $\frac{2}{3}$ slyvų. Turime, kad pirmoji sesuo paėmė $38:\frac{2}{3}-(12+18)=57-30=27$ (slyvas).

Ats.: 27 slyvas, 18 slyvų ir 12 slyvų.

10. Išilgai geležinkelio sankasos eina takelis. 110 m ilgio traukinys važiavo 30 km/h greičiu. 14 val. 10 min. traukinys pasivijo einantį keleivį ir pravažiavo pro jį per 15 sekundžių. 14 val. 16 min. tas pats traukinys susitiko kitą keleivį ir pro jį pravažiavo per 12 sekundžių. Raskite kiekvieno keleivio greitį ir keleivių susitikimo laiką, jeigu keleiviai ėjo pastoviais greičiais.

Sprendimas. Traukinio greitis yra $30\frac{\text{km}}{\text{h}}=500\frac{\text{m}}{\text{min}}=\frac{25}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}=8\frac{1}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}}$. 110 m ilgio traukinys pro stovintį žmogų būtų pravažiavęs per $110:\frac{25}{3}=\frac{66}{5}=13\frac{1}{5}$ (s), o kadangi važiavo pro keleivį 15 s, tai reiškia, kad keleivis ėjo traukinio judėjimo kryptimi ir traukinio pravažiavimas pro keleivį truko $15-13\frac{1}{5}=1\frac{4}{5}$ (s) ilgiau. Per tą laiką traukinys nuvažiavo, t. y. keleivis nuėjo, $8\frac{1}{3}\cdot 1\frac{4}{5}=15$ (m). Vadinasi, pirmojo keleivio greitis $15:15=1\left(\frac{m}{s}\right)=60\left(\frac{m}{\text{min}}\right)=3{,}6(\frac{km}{h})$,

Kadangi kitą keleivį traukinys pravažiavo per 12 s., tai šis ėjo kryptimi, priešinga traukinio judėjimo krypčiai, todėl traukinys, pravažiuodamas pro keleivį, truko $13\frac{1}{5}-12=1\frac{1}{5}\ (s)$ trumpiau. Per tą laiką traukinys nuvažiavo, t. y. keleivis nuėjo $8\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{5}=10\ (m)$. Taigi pravažiuoto antrojo keleivio greitis $\frac{10}{12}=\frac{5}{6}\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)=50\left(\frac{\text{m}}{\text{min}}\right)=3\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$.

Keleiviai eina priešingomis kryptimis takeliu pagal tą patį geležinkelį, tai jie susitiks. Kadangi keleivių artėjimo vienas prie kito greitis $60+50=110\left(\frac{\text{m}}{\text{min}}\right)$. Belieka išsiaiškinti atstumą tarp keleivių tuo momentu, kai traukinys pasivijo pirmąjį keleivį, t. y. 14 val. 10 min.

Per laiką nuo 14 val. 16 min. iki 14 val. 10 min., t. y. 6 minutes, traukinys nuvažiavo $500\frac{\text{m}}{\text{min}}\cdot 6\text{ min}=3000\text{ m}$, o antrasis keleivis nuėjo $50\frac{\text{m}}{\text{min}}\cdot 6\text{ min}=300\text{ m}$. Vadinasi, momentu 14 val. 10 min. tarp keleivių buvo $3000+300=3300$ (m). Keleiviai susitiko dar po $3300:110=30$ (min), o tai buvo 14 val. 10 min.+30 min.=14 val. 40 min.

Ats.: $3{,}6\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $3\frac{\text{km}}{\text{h}}$; 14 val. 40 min.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Nustatykite sandaugas $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ ir

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 3 & 12 & 5 & 10 & 2 & 11 & 7 & 9 & 1 & 14 & 4 & 6 & 8 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 4 & 13 & 14 & 6 & 9 & 10 & 2 & 11 & 5 & 12 & 8 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Abiem atvejais atsakymą užrašykite tiek lentele, tiek ciklais.

Ats.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 7\ \ 2\ \ 5\ \ 6\ \ 4)$,

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 14 & 3 & 9 & 12 & 13 & 8 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 10 & 11 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 14)(2\ \ 3\ \ 9\ \ 4\ \ 12\ \ 10\ \ 7)(5\ \ 13\ \ 11\ \ 6\ \ 8)$.

2. Nustatykite sandaugą $a^3 \cdot b^2 \cdot a^{-1}$, kur $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 10 & 8 & 7 & 9 & 1 & 5 & 11 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$,

$b = (1\ \ 6\ \ 3\ \ 11)(2\ \ 7\ \ 5\ \ 8)(4\ \ 10\ \ 9)$. Atsakymą užrašykite tiek lentele, tiek ciklais.

Sprendimas. $a^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 11 & 7 & 6 & 9 & 10 & 8 & 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (1\ \ 11\ \ 3\ \ 6\ \ 8)(2\ \ 7)(4\ \ 9)(5\ \ 10)$,

$b^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 5 & 1 & 9 & 2 & 11 & 8 & 7 & 10 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (1\ \ 3)(2\ \ 5)(4\ \ 9\ \ 10)(6\ \ 11)(7\ \ 8)$,

$a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 6 & 9 & 1 & 10 & 7 & 11 & 4 & 3 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} = (1\ \ 6\ \ 11\ \ 8\ \ 3)(2\ \ 9\ \ 5\ \ 7\ \ 4\ \ 10)$.

Ats.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 11 & 3 & 8 & 2 & 10 & 4 & 7 & 1 & 5 & 9 & 6 \end{pmatrix} = (1\ \ 11\ \ 6\ \ 4\ \ 2\ \ 3\ \ 8)(5\ \ 10\ \ 9)(7)$.

3. Duoti keitiniai $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Nustatykite keitinio $u \in S_6$ eilę, jei $a \cdot u \cdot b = c$.

Sprendimas. Keitinio

$$u = a^{-1} \cdot c \cdot b^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 5\ \ 3\ \ 4)(6)$$

eilė lygi $\mathrm{MBK}(5, 1) = 5$.

Ats.: 5.

4. Duotas keitinys $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 13 & 11 & 9 & 1 & 14 & 3 & 8 & 4 & 2 & 10 & 15 & 5 & 7 & 12 & 6 \end{pmatrix}$. Nustatykite keitinį a^{5678}. Atsakymą užrašykite lentele.

Sprendimas. $a = (1\ \ 13\ \ 7\ \ 8\ \ 4)(2\ \ 11\ \ 15\ \ 6\ \ 3\ \ 9)(5\ \ 14\ \ 12)(10)$, skaičius 5678 dalijasi iš 5, 6, 3 atitinkamai su liekana 3, 2, 2, taigi

$$a^{5678} = (1\ \ 8\ \ 13\ \ 4\ \ 7)(2\ \ 15\ \ 3)(6\ \ 9\ \ 11)(5\ \ 12\ \ 14)(10).$$

Ats.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 8 & 15 & 2 & 7 & 12 & 9 & 1 & 13 & 11 & 10 & 6 & 14 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Nustatykite keitinį u^{100}, jei $u \cdot a^{444} = b^{-1}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 4 & 7 & 1 & 10 & 2 & 3 & 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ir

$b = (1\ \ 5\ \ 6\ \ 4\ \ 9)(2\ \ 10\ \ 7)(3\ \ 8)$. Atsakymą užrašykite ciklais.

Sprendimas. $a = (1\ \ 8\ \ 9\ \ 5\ \ 10\ \ 6\ \ 2\ \ 4)(3\ \ 7)$, skaičius 444 dalijasi iš 8 ir 2 atitinkamai su liekana 4 ir 0, taigi $c = a^{444} = (1\ \ 10)(2\ \ 9)(4\ \ 5)(6\ \ 8)(3)(7)$.

$u = b^{-1} \cdot c^{-1} = (9 \quad 4 \quad 6 \quad 5 \quad 1)(7 \quad 10 \quad 2)(8 \quad 3) \cdot (10 \quad 1)(9 \quad 2)(5 \quad 4)(8 \quad 6)(3)(7) =$ $= (1 \quad 2 \quad 7)(3 \quad 6 \quad 4 \quad 8)(5 \quad 10 \quad 9)$. Skaičius 100 dalijasi iš 3 ir 4 atitinkamai su liekana 1 ir 0, tad $u^{100} = (1 \quad 2 \quad 7)(3)(6)(4)(8)(5 \quad 10 \quad 9)$.

Ats.: $(1 \quad 2 \quad 7)(3)(6)(4)(8)(5 \quad 10 \quad 9)$.

6. Nustatykite keitinio $(a^{201} \cdot b^{210})^{102} \cdot c$ eilę, kai $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 4 & 11 & 5 & 1 & 13 & 7 & 8 & 2 & 3 & 12 & 10 & 9 & 6 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 4 & 3 & 6 & 11 & 10 & 9 & 1 & 13 & 7 & 8 & 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}$, $c = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5)(6 \quad 7 \quad 11 \quad 12)(8)(9)(10)(13)$.

Sprendimas. $a = (1 \quad 4)(2 \quad 11 \quad 10 \quad 12 \quad 9 \quad 3 \quad 5 \quad 13 \quad 6 \quad 7 \quad 8)$, skaičius 201 dalijasi iš 2 ir 11 atitinkamai su liekana 1 ir 3, taigi $a^{201} = (1 \quad 4)(2 \quad 12 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 9 \quad 13 \quad 8 \quad 10 \quad 3 \quad 6)$.

$b = (1 \quad 4 \quad 11 \quad 2 \quad 3 \quad 6 \quad 9 \quad 7)(5 \quad 10 \quad 8 \quad 13 \quad 12)$, skaičius 210 dalijasi iš 8 ir 5 atitinkamai su liekana 2 ir 0, taigi $b^{210} = (1 \quad 11 \quad 3 \quad 9)(2 \quad 6 \quad 7 \quad 4)(5)(10)(8)(13)(12)$.

$a^{201} \cdot b^{210} = (1 \quad 2 \quad 12 \quad 5 \quad 4 \quad 11)(3 \quad 7)(6)(8 \quad 10 \quad 9 \quad 13)$, skaičius 102 dalijasi iš 6, 2, 4 atitinkamai su liekana 0, 0, 2, taigi

$$(a^{201} \cdot b^{210})^{102} = (8 \quad 9)(10 \quad 13)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(11)(12),$$

Keitinio $(a^{201} \cdot b^{210})^{102} \cdot c = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5)(6 \quad 7 \quad 11 \quad 12)(8 \quad 9)(10 \quad 13)$ eilė lygi $\text{MBK}(5,\ 4,\ 2,\ 2) = 20$.

Ats.: 20.

7. Nustatykite, kiek grupėje S_{10} yra keitinių, kurių eilė lygi 14.

Sprendimas. Jei keitinio $a \in S_{10}$ eilė yra 14, tai jo ciklų ilgiai tegali būti 1, 2, 7, 14, o visų ilgių suma lygi 10. Taigi ciklų ilgiai tegali būti 1, 2, 7. Jei ciklų ilgiai tėra lygūs 1 arba 2, tai ir šių ilgių mažiausias bendras kartotinis yra 1 arba 2. Taigi bent vieno ciklo ilgis turi būti 7. Analogiškai, bent vieno ciklo ilgis yra 2. Vadinasi, $2 + 7 = 9$ iš 10 skaičių sudaro du tokius ciklus, ir dar vienas skaičius sudaro vienetinį ciklą. Kiekvienas toks keitinys tinka, nes $\text{MBK}(7, 2, 1) = 14$.

Taigi $a = (a_1)(a_2 \quad a_3)(a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10})$. Pirmąjį ciklą sudaryti yra 10 būdų, tada antrąjį – $9 \cdot 8$ būdų, tada trečiąjį – $7!$ būdų. Kai kurie iš taip sudarytų ciklų $(a_2 \quad a_3)$ sutampa: $(x \quad y) = (y \quad x)$ – gauname lygių ciklų poras, o $(a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10})$ atveju – ciklų septynetus. Vadinasi, tinkamų skirtingų keitinių a yra $10 \cdot \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot \frac{7!}{7} = 10 \cdot 36 \cdot 720 = 259\,200$.

Ats.: $259\,200$.

8. Nustatykite, kiek grupėje S_6 yra keitinių, kurių eilė lygi 2.

Sprendimas. Jei keitinio $a \in S_6$ eilė yra 2, tai jo ciklų ilgiai tegali būti 1 ir 2 (ir bent vieno ciklo ilgis yra 2), o visų ilgių suma lygi 6. Kai ciklų, kurių ilgis yra 2, yra vienas, du arba trys, atitinkamai gauname tinkamus keitinius 1) $(a_1 \quad a_2)(a_3)(a_4)(a_5)(a_6)$; 2) $(a_1 \quad a_2)(a_3 \quad a_4)(a_5)(a_6)$; 3) $(a_1 \quad a_2)(a_3 \quad a_4)(a_5 \quad a_6)$.

1) Sudaryti ciklą $(a_1 \quad a_2)$ galima $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ būdų (nepamirškime, kad $(x \quad y) = (y \quad x)$), o tada likę skaičiai a_3, a_4, a_5, a_6 sudaro vienetinius ciklus (nesvarbu kokia tvarka juos surašysime). Taigi, yra 15 tokių keitinių.

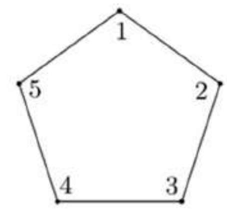
2) Sudaryti ciklus $(a_5)(a_6)$ galima $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ būdų (nepamirškime, kad $(x)(y) = (y)(x)$). Tada likusius 4 skaičius iš aibės $\{1, 2, \ldots, 6\}$ reikia suskirstyti į dvi poras (nei porų tvarka, nei skaičių tvarka porose nėra svarbi). Tai įmanoma padaryti 3 būdais: jei turime skaičius x, y, z, t, tai x galima poruoti su y, z arba t, o likusi pora atitinkamai bus z, t; y, t arba y, z. Taigi, yra $15 \cdot 3 = 45$ tokie keitiniai.

3) Nemažindami bendrumo, galime laikyti, kad $a_1 = 1$ (priešingu atveju galėtume pakeisti ciklų tvarką ir/arba skaičių tvarką cikluose). Skaičių a_2 galime pasirinkti 5 būdais. Tada likusius 4 skaičius iš aibės $\{1, 2, \ldots, 6\}$ reikia suskirstyti į dvi poras (nei porų tvarka, nei skaičių tvarka porose nėra svarbi). Tai įmanoma padaryti 3 būdais (kaip ir 2) atveju). Taigi, yra $5 \cdot 3 = 15$ tokių keitinių.

Iš viso gavome $15 + 45 + 15 = 75$ tinkamus keitinius.

Pastaba. Kiekvienu iš atvejų 1)-3) galima mąstyti ir kitaip: skaičius a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 galime parinkti 6! būdų, tačiau keitinys nepasikeis, jei bet kaip keisime vietomis 1) skaičius a_1, a_2 arba skaičius a_3, a_4, a_5, a_6; 2) skaičius a_1, a_2, skaičius a_3, a_4, skaičius a_5, a_6 arba ciklus $(a_1 \quad a_2)$, $(a_3 \quad a_4)$; 3) skaičius a_1, a_2, skaičius a_3, a_4, skaičius a_5, a_6 arba ciklus $(a_1 \quad a_2)$, $(a_3 \quad a_4)$, $(a_5 \quad a_6)$. Todėl tinkamų skirtingų keitinių iš viso yra $\frac{6!}{2\cdot 4!}+\frac{6!}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}+\frac{6!}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3!}=15+45+15=75$.

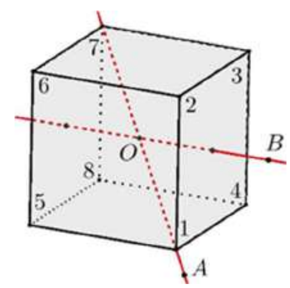
Ats.: 75.



9. Vieną pavaizduoto taisyklingojo penkiakampio (su centru O) simetriją galima apibūdinti tokia trijų veiksmų seka: pasukame penkiakampį $144°$ kampu aplink O pagal laikrodžio rodyklę; simetriškai atvaizduojame jį vertikalios tiesės, einančios per O, atžvilgiu; pasukame jį $72°$ kampu aplink O prieš laikrodžio rodyklę. Ciklais užrašykite grupės S_5 keitinius, kurie apibūdina šiuos tris veiksmus, ir šių keitinių sandaugą, kuri apibūdina duotąją penkiakampio simetriją. Kokiu vienu veiksmu (posūkio arba simetriško atvaizdavimo tiesės atžvilgiu) galima nusakyti šią simetriją?

Ats.: keitinys $(1 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \quad 4)\cdot(1)(2 \quad 5)(3 \quad 4)\cdot(1 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2)=(1 \quad 3)(2)(4 \quad 5)$ apibūdina penkiakampio simetriją tiesės, einančios per tašką O ir viršūnę 2 (pradinėje padėtyje), atžvilgiu.

10. Pavaizduotas kubas su centru O. Kubo simetriją U, kai šis pasukamas $120°$ kampu aplink tiesę OA pagal laikrodžio rodyklę, žiūrint iš taško A, apibūdina keitinys $a \in S_8$. Simetriją V, kai kubas pasukamas $90°$ kampu aplink tiesę OB (statmeną kubo sienai) pagal laikrodžio rodyklę, žiūrint iš taško B, apibūdina keitinys $b \in S_8$. Kubas transformuotas, simetrijas pritaikant tokia tvarka: UVUUVVUUUVVVUUUUUUVVVVVV. (Sukant kubą, tiesės OA ir OB nejuda.) Ši kubo transformacija W – vėlgi jo simetrija. Užrašykite jos keitinį c kaip keitinių a ir b laipsnių sandaugą. Ciklais užrašykite c bei įvardykite, kokiu vienu posūkio veiksmu galima nusakyti W.



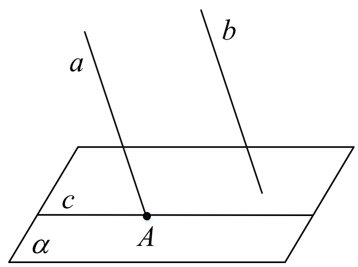
Sprendimas. Net neužrašius $a=(1)(2 \quad 4 \quad 5)(3 \quad 8 \quad 6)(7)$, $b=(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)(5 \quad 6 \quad 7 \quad 8)$, galima pastebėti, kad pritaikius simetriją U tris kartus arba pritaikius simetriją V keturis kartus gaunamas pradinis vaizdas ir todėl $a^3=b^4=e_8$. Taigi
$c=a\cdot b\cdot a^2\cdot b^2\cdot a^3\cdot b^3\cdot a^6\cdot b^6=a\cdot b\cdot a^2\cdot b^2\cdot e_8\cdot b^3\cdot e_8\cdot b^2=a\cdot b\cdot a^2\cdot b^7=a\cdot b\cdot a^2\cdot b^3$,
$c=(1)(2 \quad 4 \quad 5)(3 \quad 8 \quad 6)(7)\cdot(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)(5 \quad 6 \quad 7 \quad 8)\cdot(1)(2 \quad 5 \quad 4)(3 \quad 6 \quad 8)(7)\cdot$
$(1 \quad 4 \quad 3 \quad 2)(5 \quad 8 \quad 7 \quad 6)=(1 \quad 8 \quad 6)(2 \quad 4 \quad 7)(3)(5)$.

Ats.: keitinys $c=a\cdot b\cdot a^2\cdot b^2\cdot a^3\cdot b^3\cdot a^6\cdot b^6=(1 \quad 8 \quad 6)(2 \quad 4 \quad 7)(3)(5)$ apibūdina kubo posūkį aplink tiesę, einančią per viršūnes 3 ir 5 (jų pradinėje padėtyje), prieš laikrodžio rodyklę, žiūrint iš viršūnės 3.

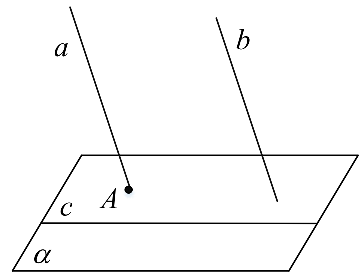
TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tiesės a ir b yra lygiagrečios, tiesė a kerta plokštumą α taške A, tiesė c yra lygiagreti su tiese b. Ar tiesė c gali priklausyti plokštumai α? Atsakymą pagrįskite.

Sprendimas. Kadangi $a \parallel b$, o $b \parallel c$, tai tiesės a ir c yra lygiagrečios (7 teorema). Jei tiesė a būtų plokštumoje, tai ji arba eitų per tašką A (1a pav.) arba neitų per tašką A (1b pav.). Pirmuoju atveju tiesės a ir c susikirstų taške A, o antruoju atveju tiesės a ir c būtų prasilenkiančios (5 teorema). Prieštara reiškia, kad tiesė c nėra plokštumoje α.



1a pav.

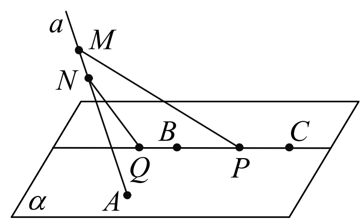


1b pav.

Ats.: negali.

2. Tiesė a kerta plokštumą, einančią per taškus A, B ir C, taške A. Taškai M ir N yra tiesėje a, o taškai P ir Q – tiesėje BC. Nustatykite tiesių MP ir NQ tarpusavio padėtį.

Sprendimas. Nubrėžkime plokštumą α, einančią per taškus A, B, C (2 pav.). Tiesė PQ yra plokštumoje α, o tiesė MN kerta šią plokštumą taške A, nepriklausančiame tiesei PQ, taigi tiesės PQ ir MN yra prasilenkiančios (5 teorema). Iš čia išplaukia, kad taškai M, N, P ir Q nėra vienoje plokštumoje, taigi tiesės MP ir NQ nepriklauso vienai plokštumai, todėl jos yra prasilenkiančios.

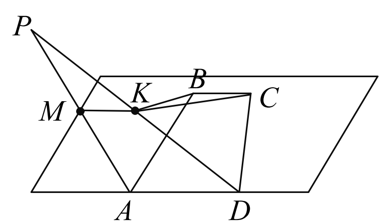


2 pav.

Ats.: prasilenkiančios.

3. Trikampis ADP ir trapecija $ABCD, BC \parallel AD$ yra skirtingose plokštumose, jie turi bendrą kraštinę AD. Per trapecijos pagrindą BC ir atkarpos PD vidurio tašką K išvesta plokštuma, kuri kerta atkarpą AP taške M. Raskite atkarpos MK ilgį, jei $AD = 10$.

Sprendimas. Plokštumoje, einančioje per taškus A, B, C (3 pav.) yra tiesė AD, lygiagreti su plokštumos, einančios per taškus B, C, K tiese BC, todėl pagal 9 teoremą tiesė AD lygiagreti su plokštuma, einančia per taškus B, C, K. Plokštumoje, einančioje per taškus A, D, P, yra tiesė AD, lygiagreti su plokštuma, einančia per taškus B, C, K, todėl pagal 10 teoremą šių plokštumų sankirtos tiesė MK yra lygiagreti su tiese BC, o tai reiškia, kad $MK \parallel AD$. Kadangi taškas K yra atkarpos PD vidurio taškas, tai atkarpa MK yra trikampio ADP vidurinė linija, todėl $MK = \frac{1}{2}AD = 5$.

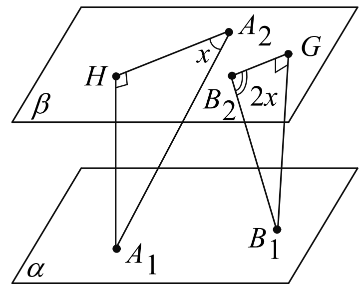


3 pav.

Ats.: 5.

4. Dviejų atkarpų, esančių tarp lygiagrečių plokštumų, ilgių santykis yra $2:3$, o kampų, kuriuos šios atkarpos sudaro su minėtomis plokštumomis, didumų santykis lygus $1:2$. Raskite tuos kampus.

Sprendimas. Sakykime, kad $\alpha \parallel \beta$ – dvi duotosios lygiagrečios plokštumos, taškai A_1 ir B_1 yra plokštumoje α, o taškai A_2 ir B_2 – plokštumoje β (4 pav.). Iš taškų A_1 ir B_1 nuleidžiame statnmenis A_1H ir B_1G į plokštumą β, atkarpos A_2H ir $B_2\,G$ yra atkarpų A_1A_2 ir B_1B_2 ortogonaliosios projekcijos plokštumoje β, todėl kampai A_1A_2H ir B_1B_2G yra kampai tarp atkarpų A_1A_2 ir B_1B_2 ir plokštumos β, akivaizdu, kad tokius kampus šios atkarpos sudaro ir su plokštuma α. Žymėdami $A_1H = B_1G = h, \angle A_1A_2H = x$, ir $\angle B_1B_2G = 2x$ iš stačiųjų trikampių A_1A_2H ir B_1B_2G randame, kad $A_1A_2 = \frac{h}{\sin}$, $B_1B_2 = \frac{h}{\sin 2x}$. Kadangi didesnį kampą su duotosiomis plokštumomis sudaro trumpesnioji atkarpa, tai iš sąlygos gauname trigonometrinę lygtį $\frac{h}{\sin 2x} : \frac{h}{\sin x} = 2 : 3$, t. y. $\frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{2}{3}$. Iš čia išplaukia, kad $\frac{\sin x}{2\sin x \cos x} = \frac{2}{3}$, $\cos x = \frac{3}{4}$. Taigi ieškomieji kampai yra $\arccos\frac{3}{4}$ ir $2\arccos\frac{3}{4}$.

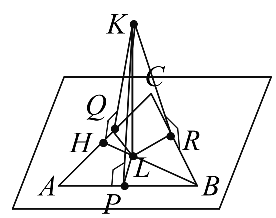


4 pav.

Ats.: $\arccos\frac{3}{4}$ ir $2\arccos\frac{3}{4}$.

5. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = BC = 10$, $AC = 12$, taškas K yra vienodai nutolęs nuo tiesių AB, BC, AC, jo atstumas iki trikampio plokštumos lygus 4. Raskite atstumą nuo taško K iki tiesių AB, BC, AC.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas L yra taško K ortogonalioji projekcija trikampio ABC plokštumoje (5 pav.), pagal sąlygą $KL = 4$. Iš aško K nuleiskime statmenis KP, KQ ir KR į tieses AB, AC ir BC. Atkarpos LP, LQ ir LR yra atkarpų KP, KQ ir KR ortogonaliosios projekcijos trikampio ABC plokštumoje, tai pagal trijų statmenų teoremą $LP \perp AB$, $LQ \perp AC$, $LR \perp BC$. Kadangi pagal sąlygą $KP = KQ = KR$, tai statieji trikampiai KPL, KQL ir KRL yra lygūs. Iš čia išplaukia, kad $LP = LQ = LR$, taigi taškas L yra vienodai nutolęs nuo trikampio ABC kraštinių, todėl jis yra į šį trikampį įbrėžto apskritimo centras. Įbrėžto apskritimo spindulį $r = LP = LQ = LR$ rasime iš formulės $S = pr$, čia S ir p yra atitinkamai trikampio ABC plotas ir pusperimetris. Nubrėžkime trikampio aukštinę į BH pagrindą AC, kadangi trikampis ABC yra lygiašonis, tai taškas H yra krašinės AC vidurio taškas. Iš Pitagoro teoremos trikampiui ABH turime $BH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$, todėl $S = \frac{1}{2}AC \cdot BH = 48$, $p = \frac{1}{2}(10 + 10 + 12) = 16, r = \frac{S}{p} = 3$. Iš stačiojo trikampio KPL randame ieškomąjį atstumą nuo taško K iki tiesių AB, AC, BC: $d = \sqrt{KL^2 + LP^2} = 5$.

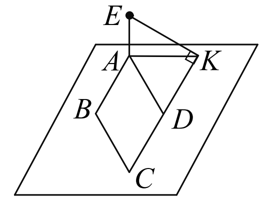


5 pav.

Ats.: 5.

6. Rombo $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 4, kampas A lygus 60^0. Nubrėžta rombo plokštumai statmena atkarpa AE, taško E atstumas iki tiesės CD lygus 4. Raskite atstumą nuo taško E iki rombo plokštumos.

Sprendimas. Iš taško E nubrėžkime statmenį EK tiesei CD, kadangi trikampis ADC yra bukasis, tai taškas K yra atkarpos CD tęsinyje už taško D (6 pav.), pagal sąlygą $EK = 4$. Kadangi tiesė AK yra tiesės EK ortogonalioji projekcija rombo plokštumoje ir $EK \perp CD$, tai pagal trijų statmenų teoremą tiesės AK ir CD yra statmenos, t. y. atkarpa AK yra rombo aukštinė. Dviem būdais skaičiuodami rombo plotą, gauname



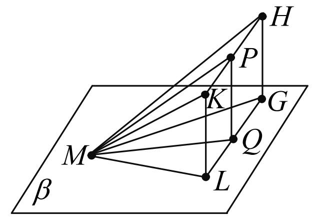
6 pav.

lygybę $AB^2 \sin 60^0 = CD \cdot AK$, iš kurios randame rombo aukštinę $AK = \frac{4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{4} = 2\sqrt{3}$ ir ieškomąjį atstumą nuo taško E iki rombo plokštumos $EA = \sqrt{EK^2 - AK^2} = 2$.

Ats.: 2

7. Per trikampio MHP viršūnę M išvesta plokštuma β lygiagreti su tiese HP ir nutolusi nuo šios tiesės atstumu lygiu $\sqrt{15}$. Taškai G ir Q yra atitinkamai taškų H ir P ortogonaliosios projekcijos plokštumoje β. Raskite trikampio MGQ plotą, jei $MH = 17, PM = 10, HP = 9$.

Sprendimas. Sakykime, kad atkarpa MK yra trikampio MHP aukštinė, o taškas L yra taško K ortogonalioji projekcija plokštumoje β (7 pav.). Kadangi tiesė HP yra lygiagreti su plokštuma β, tai $PQ = KL = \sqrt{15}$, $GQ = HP = 9$ ir $KL \perp GQ$. Tiesė ML yra tiesės MK ortogonalioji projekcija plokštumoje β, tai pagal trijų statmenų teoremą tiesės ML ir GQ yra statmenos. Todėl ieškomasis plotas $S = \frac{1}{2} GQ \cdot ML$. Iš stačiojo trikampio MKL turime $ML = \sqrt{MK^2 - KL^2}$. Rasime trikampio MHP aukštinę MK. Žymime $HK = x, KP = x - 9$ (nes trikampis MPH yra bukasis, todėl aukštinės pagrindas K yra kraštinės HP tęsinyje už taško P) ir taikydami Pitagoro teoremą trikampiams MHK ir MPK gauname, kad $MK^2 = 17^2 - x^2 = 10^2 - (x-9)^2$. Iš lygties $17^2 - x^2 = 10^2 - (x-9)^2$ randame $x = 15$, tuomet aukštinė $KM = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$, taigi $ML = \sqrt{8^2 - (\sqrt{15})^2} = 7$, ieškomasis plotas $S = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7 = \frac{63}{2}$.



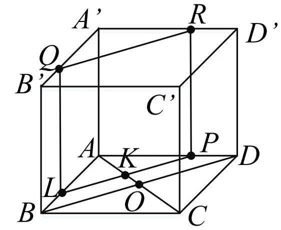
7 pav.

Ats.: $\frac{63}{2}$.

8. Stačiakampio gretasienio $ABCDA'B'C'D'$ pagrindas $ABCD$ yra kvadratas, kurio kraštinės ilgis lygus 4, gretasienio įstrižainės AC' ilgis lygus $4\sqrt{6}$. Pagrindo įstrižainėje AC yra taškas K toks, kad $AK : KC = 1 : 3$. Nubrėžkite gretasienio pjūvį plokštuma, einančia per tašką K ir statmena plokštumoms ABC ir $AA'C$ ir apskaičiuokite gautojo pjūvio plotą.

Sprendimas. Plokštumos $ABCD$ ir $AA'C'C$ yra statmenos, tiesė AC yra jų sankirtos tiesė. Kadangi pjūvio plokštuma yra statmena plokštumoms $ABCD$ ir $AA'C'C$, tai ši plokštuma turi būti statmena tiesei AC (14 teorema). Taigi pjūvio plokštumos ir gretasienio pagrindo plokštumos sankirtos tiesė yra statmena tiesei AC, taigi ji lygiagreti su tiese BD. Todėl pjūvio plokštuma kerta pagrindo plokštumą $ABCD$ tiese LP, lygiagrečia su kvadrato įstrižaine BD, čia $L \in AB$, $P \in$

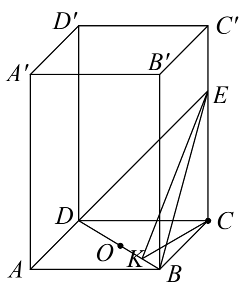
AD. Kadangi pjūvio plokštuma yra statmena gretasienio pagrindui $ABCD$, tai ji kerta sienas $ABB'A'$ ir $ADD'A'$ tiesėmis LQ ir PR, statmenomis plokštumai $ABCD$, čia $Q \in A'B'$, $R \in A'D'$ (8 pav.). Taigi ieškomasis pjūvis yra stačiakampis $LPRQ$. Iš stačiojo trikampio $AA'C$ randame vieną šio stačiakampio kraštinę $LQ = AA' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{(4\sqrt{6})^2 - (4\sqrt{2})^2} = 8$. Jei taške O susikerta pagrindo įstrižainės AC ir BD, o $AK{:}KC = 1 : 3$, tai $AK{:}AC = 1{:}4$, $AK{:}AO = AK{:}\frac{1}{2}AC = 1{:}2$. Iš trikampių AOD ir AKP panašumo gauname, kad $KP : OD = AK : AO = 1 : 2$, todėl $KP = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$, $LP = 2KP = 2\sqrt{2}$. Taigi ieškomasis plotas $S = 8 \cdot 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$.



8 pav.

Ats.: $16\sqrt{2}$.

9. Stačiakampio gretasienio pagrindo kraštinių ilgiai yra 1 ir 2, o gretasienio aukštinė lygi 3. Per pagrindo įstrižainę išvesta plokštuma, kuris su pagrindo plokštuma sudaro 60^0 kampą. Raskite gautojo pjūvio plotą.



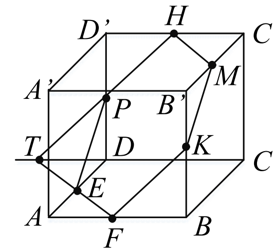
9 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad stačiakampio gretasienio $ABCDA'B'C'D'$ pagrindo $ABCD$ kraštinės $AB = 1$, $AD = 2$, aukštinė $AA' = 3$, pagrindo įstrižainė $AC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Sakykime, kad taškas O yra stačiakampio $ABCD$ centras, per įstrižainę BD einanti pjūvio plokštuma kerta tiesę CC' taške E. Iš taško E nuleiskime statmenį $EK, K \in BD$ į įstrižainę BD, tuomet atkarpa KC yra atkarpos KE ortogonalioji projekcija pagrindo plokštumoje. Iš to, kad $KC \perp BD$ pagal trijų statmenų teoremą išplaukia, kad $EK \perp BD$, taigi kampas EKC yra dvisienio kampo tarp pagrindo plokštumos ir pjūvio plokštumos tiesinis kampas, todėl $\angle EKC = 60^0$. Atkarpa KC yra stačiojo trikampio CBD aukštinė, todėl šio trikampio plotui turime lygybes $2S = BD \cdot CK = CD \cdot CB$, taigi $CK = \frac{CD \cdot CB}{BD} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Kadangi $EC = KC\ tg\ 60^0 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} < 3 = CC'$, tai taškas E yra kraštinės CC' taškas. (9 pav.). Taigi trikampis BDE yra ieškomasis pjūvis, jo aukštinė $KE = \frac{KC}{\cos 60^0} = \frac{4}{\sqrt{5}}$, todėl jo plotas $S = \frac{1}{2}BD \cdot KE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} = 2$.

Ats.: 2.

10. Kubo $ABCDA'B'C'D'$ įstrižainės AC' ilgis lygus $2\sqrt{3}$, taškai M, H ir P yra briaunų $B'C', D'C'$ ir DD' vidurio taškai. Nubrėžkite kubo pjūvį plokštuma, einančia per taškus M, H ir P ir suraskite šio pjūvio perimetrą.

Sprendimas. Kadangi $AB^2 + AD^2 + AA'^2 = AC'^2$, tai kubo briaunos ilgis $AB = 2$, o jo sienos įstrižainės ilgis $AC = 2\sqrt{2}$. Tiesių HP ir DC sankirtos taškas T (10 pav.) yra taškas, kuriame pjūvio plokštuma kerta tiesę DC. Lygiagrečias plokštumas $A'B'C'D'$ ir $ABCD$ pjūvio plokštuma kerta lygiagrečiomis tiesėmis (11 teorema), taigi per tašką T nubrėžę tiesę, lygiagrečią su tiese MH, jos susikirtimo su tiesėmis AD ir AB taškai E ir F yra pjūvio ir šių tiesių sankirtos taškai. Statieji trikampiai PDT ir $PD'H$ yra lygūs, nes $DP = D'P$, $\angle TPD = \angle HPD'$, todėl $PT = HP = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$, o $TD = HD' = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Statieji trikampiai TED ir HMC' yra lygūs, nes $TD = HC'$, o $\angle ETD = \angle MHC'$, kaip kampai su atitinkamai lygiagrečiomis kraštinėmis. Todėl $DE = C'M = 1$, taigi taškas E yra atkarpos AD vidurio taškas. Statieji trikampiai TED ir FEA yra lygūs, nes $ED = EA$, $\angle DET = \angle AEF$. Todėl $AF = DT = 1$, taigi taškas F yra briaunos AB vidurio taškas. Lygiagrečias plokštumas $DCC'D'$ ir $ABB'A'$ pjūvio plokštuma kerta lygiagrečiomis tiesėmis, todėl per tašką F nubrėžiame tiesę $FK \parallel HP$ ir randame pjūvio ir tiesės BB' sankirtos tašką K. Kadangi $FK \parallel HP$, o atkarpa HP yra trikampio $DD'C'$ vidurinė linija, tai $HP \parallel DC' \parallel AB'$, taigi $FK \parallel AB'$, t. y. atkarpa FK yra trikampio ABB' vidurinė linija, o taškas K yra briaunos BB' vidurio taškas. Gautasis šešiakampis $MHPEFK$ yra ieškomasis pjūvis, šio šešiakampio viršūnės yra kubo briaunų vidurio taškai, o kraštinių ilgiai lygūs pusei kubo sienos įstrižainės ilgio $\sqrt{2}$, todėl jo perimetras lygus $6\sqrt{2}$.



10 pav.

Ats.: $6\sqrt{2}$.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Parašykite pirmuosius 7 sekos (x_n),

$$x_n = \frac{1}{3 - x_{n-1}}, \quad n > 1,$$

narius, jei $x_1 = \frac{1}{2}$.

Sprendimas. Kadangi $x_1 = \frac{1}{2}$, pagal formulę

$$x_n = \frac{1}{3 - x_{n-1}}$$

gauname, kad:

$$x_2 = \frac{1}{3 - x_1} = \frac{1}{3 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{5};$$

$$x_3 = \frac{1}{3 - x_2} = \frac{1}{3 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{13};$$

$$x_4 = \frac{1}{3 - x_3} = \frac{1}{3 - \frac{5}{13}} = \frac{13}{34};$$

$$x_5 = \frac{1}{3 - x_4} = \frac{1}{3 - \frac{13}{34}} = \frac{34}{89};$$

$$x_6 = \frac{1}{3 - x_5} = \frac{1}{3 - \frac{34}{89}} = \frac{89}{233};$$

$$x_7 = \frac{1}{3 - x_6} = \frac{1}{3 - \frac{89}{233}} = \frac{233}{610}.$$

Ats.: $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{5}{13}$; $\frac{13}{34}$; $\frac{34}{89}$; $\frac{89}{233}$; $\frac{233}{610}$.

2. Parašykite pirmuosius 7 sekos (x_n),

$$x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}, \quad x_1 = \frac{1}{2},$$

narius ir nuspręskite, kokia turėtų būti bendrojo nario x_n formulė.

Sprendimas. Kadangi $x_1 = \frac{1}{2}$, pagal formulę $x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}$ gauname:

$$x_2 = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3};$$

$$x_3 = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{4};$$

$$x_4 = \frac{1}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{4}{5};$$

$$x_5 = \frac{1}{2 - \frac{4}{5}} = \frac{5}{6};$$

$$x_6 = \frac{1}{2 - \frac{5}{6}} = \frac{6}{7};$$

$$x_7 = \frac{1}{2 - \frac{6}{7}} = \frac{7}{8}.$$

Aišku, kad bendroji šios sekos narių formulė turėtų būti tokia:

$$x_n = \frac{n}{n+1}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

O įrodyti galima taikant, pavyzdžiui, matematinės indukcijos metodą (čia jį praleisime).

Ats.: 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{6}{7}$; $\frac{7}{8}$.

2) $x_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

3. Raskite mažiausią sekos (x_n) narį, jei

a) $x_n = n^2 - 5n + 1$; b) $x_n = \frac{n^3+1}{2n^3+3}$.

Sprendimas. a) Iš formulės

$$x_n = n^2 - 5n + 1, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

matyti, kad taškai $(n; x_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ yra parabolėje, kurios lygtis $y = x^2 - 5x + 1$. Šios parabolės šakos kyla į viršų, o viršūnė yra taške (2,5; –5,25). Vadinasi, taškuose $x = 2$ ir $x = 3$ funkcijos $y = x^2 - 5x + 1$ reikšmės yra vienodos ir lygios skaičiui –5. Darome išvadą, kad mažiausi sekos nariai yra $x_2 = -5$ ir $x_3 = -5$.

Ats.: $x_2 = x_3 = -5$.

b) Skaičiuodami pagal formulę

$$x_n = \frac{n^3+1}{2n^3+3}$$

gauname, kad $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{9}{19}$, $x_3 = \frac{28}{57}$, $x_4 = \frac{65}{131}$, $x_5 = \frac{126}{253}$.

Nesunku įsitikinti, kad $\frac{2}{5} < \frac{9}{19}$, $\frac{9}{19} < \frac{28}{57}$, $\frac{28}{57} < \frac{65}{131}$, $\frac{65}{131} < \frac{126}{253}$.

Bet to nepakanka, kad būtų galima tvirtinti, jog $x_1 = \frac{2}{5}$ yra mažiausias sekos narys.

Bendrojo nario formulę pertvarkykime taip:

$$x_n = \frac{n^3+1}{2n^3+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(n^3+1)}{2(n^3+1)+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2(n^3+1)+1)-1}{2(n^3+1)+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(2(n^3+1)+1)}{2(n^3+1)+1} - \frac{1}{2(n^3+1)+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n^3+3} \right).$$

Dabar jau pagrįstai galima teigti, kad $x_1 = \frac{2}{5}$ yra mažiausias šios sekos narys (nes kuo didesnis skaičius n, tuo mažesnė trupmenos $\frac{1}{2n^3+3}$ reikšmė).

Ats.: $x_1 = \frac{2}{5}$.

4. Įrodykite, kad (x_n) yra mažėjančioji seka, jei

$$x_n = \frac{n+3}{2n+1}.$$

Sprendimas. Aišku, kad pakanka įsitikinti, jog esant bet kuriam natūraliajam skaičiui n skirtumas $x_n - x_{n+1}$ yra teigiamas skaičius:

$$x_n - x_{n+1} = \frac{n+3}{2n+1} - \frac{n+4}{2n+3} = \frac{(n+3)(2n+3)-(n+4)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{(2n^2+9n+9)-(2n^2+9n+4)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{5}{(2n+1)(2n+3)} > 0.$$

5. Nustatykite, ar (x_n) yra monotoninė seka, jei

$$x_n = y_{n+2}, \quad y_n = \frac{2^n}{n!};$$

čia $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ (skaičiaus n faktorialas).

Sprendimas. Apskaičiuokime santykį $\frac{x_n}{x_{n+1}}$:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{y_{n+2}}{y_{n+3}} = \frac{2^{n+2} \cdot (n+3)!}{(n+2)! \cdot 2^{n+3}} = \frac{4 \cdot 2^n \cdot (n+2)! \cdot (n+3)}{(n+2)! \cdot 8 \cdot 2^n} = \frac{n+3}{2}.$$

Kadangi $\frac{n+3}{2} > 1$, kai $n = 1, 2, 3, ...$, tai $x_n > x_{n+1}$, kai $n = 1, 2, 3, ...$. Vadinasi, seka (x_n) yra mažėjančioji seka, o kartu ir monotoninė seka.

Ats.: Yra monotoninė (mažėjančioji) seka.

6. Raskite sekos (x_n) bendrąjį narį, jei

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n, \quad x_1 = 2 \text{ ir } x_2 = 5.$$

Sprendimas. Iš pradžių išspręskime charakteringąją lygtį $r^{n+2} = 5r^{n+1} - 6r^n$, kuri ekvivalenti (kai $r \neq 0$) kvadratinei lygčiai $r^2 = 5r - 6$. Gauname du sprendinius: $r = 2$ ir $r = 3$. Vadinasi, bendrasis rekurenčiosios lygties

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$$

sprendinys yra

$$x_n = 2^n \cdot C_1 + 3^n \cdot C_2$$

(čia C_1 ir C_2 – bet kurie realieji skaičiai).

Kadangi $x_1 = 2$ ir $x_2 = 5$, turi galioti lygybė

$$2C_1 + 3C_2 = 2$$

ir lygybė

$$4C_1 + 9C_2 = 5.$$

Iš lygčių sistemos

$$\begin{cases} 2C_1 + 3C_2 = 2, \\ 4C_1 + 9C_2 = 5 \end{cases}$$

gauname, kad $C_1 = \frac{1}{2}$ ir $C_2 = \frac{1}{3}$.

Vadinasi, sekos (x_n) bendrojo nario formulė yra

$$x_n = 2^n \cdot \frac{1}{2} + 3^n \cdot \frac{1}{3} = 2^{n-1} + 3^{n-1}.$$

Ats.: $x_n = 2^{n-1} + 3^{n-1}$.

7. Raskite sekos (x_n), tenkinančios rekurenčiąją lygtį $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ ir sąlygą $x_1 = x_2 = 1$, bendrojo nario formulę.

Sprendimas. Ieškodami sprendinių, kurių pavidalas $x_n = r^n$, sprendžiame charakteringąją lygtį

$$r^{n+2} = r^{n+1} + r^n, \quad r \neq 0.$$

Ji ekvivalenti kvadratinei lygčiai $r^2 = r + 1$ ir turi du sprendinius – $r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ir $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Todėl bendrasis rekurenčiosios lygties

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

sprendinys yra

$$x_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot C_1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot C_2$$

(čia C_1 ir C_2 – bet kurie realieji skaičiai).

Konkrečias C_1 ir C_2 reikšmes apskaičiuojame remdamiesi sąlygomis $x_1 = 1$ ir $x_2 = 1$:

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot C_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot C_2 = 1, \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot C_1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(1-\sqrt{5}\right)C_1 + \left(1+\sqrt{5}\right)C_2 = 2, \\ \left(3-\sqrt{5}\right)C_1 + \left(3+\sqrt{5}\right)C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(1-\sqrt{5}\right)C_1 + \left(1+\sqrt{5}\right)C_2 = 2, \\ 2\,C_1 + 2C_2 + \left(1-\sqrt{5}\right)C_1 + \left(1+\sqrt{5}\right)C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(1-\sqrt{5}\right)C_1 + \left(1+\sqrt{5}\right)C_2 = 2, \\ 2C_1 + 2C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2 = -C_1, \\ \left(1-\sqrt{5}\right)C_1 + \left(1+\sqrt{5}\right)\left(-C_1\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -C_1, \\ -2\sqrt{5}C_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}, C_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Taigi sekos (x_n) bendrojo nario x_n formulė yra tokia:

$$x_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Ats.: $x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$

8. Raskite rekurenčiosios lygties

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{1}{4}x_n$$

sprendinį, jei $x_1 = 1$ ir $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Sprendimas. Šios rekurenčiosios lygties charakteringoji lygtis yra

$$r^{n+2} = r^{n+1} - \frac{1}{4}r^n.$$

Atmetę sprendinį $r = 0$ (jis netenkina pradinių sąlygų $x_1 = 1$ ir $x_2 = -\frac{1}{2}$), gauname ekvivalenčią kvadratinę lygtį

$$r^2 = r - \frac{1}{4},$$

kuri turi vienintelį sprendinį $r = \frac{1}{2}$.

Šiuo atveju bendrojo sprendinio išraiška yra

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot C_1 + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot C_2$$

(C_1 ir C_2 yra bet kurie realieji skaičiai).

Remdamiesi sąlygomis $x_1 = 1$ ir $x_2 = -\frac{1}{2}$ apskaičiuojame konkrečias C_1 ir C_2 reikšmes:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 1, \\ \frac{1}{4}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ C_1 + 2C_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 2 - C_1, \\ C_1 + 2(2 - C_1) = -2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 6,\ C_2 = -4.$$

Vadinasi, ieškomas rekurenčiosios lygties sprendinys yra

$$x_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = (3 - 2n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{3 - 2n}{2^{n-1}}.$$

Ats.: $x_n = \dfrac{3 - 2n}{2^{n-1}}.$

9. Įrodykite, kad (x_n) yra nykstamoji seka, jei

$$x_n = \frac{7}{n+1}.$$

Sprendimas. Pagal nykstamosios sekos apibrėžimą, reikia įrodyti, kad $\lim \frac{7}{n+1} = 0.$

O pagal ribos apibrėžimą, reikia bet kuriam teigiamam skaičiui ε nurodyti tokį natūralųjį skaičių *E* (nebūtinai mažiausią!), kad nelygybė

$$\left| \frac{7}{n+1} - 0 \right| < \varepsilon$$

galiotų kiekvienam natūraliajam skaičiui *n*, didesniam už *E*.

Kadangi

$$\left| \frac{7}{n+1} - 0 \right| = \left| \frac{7}{n+1} \right| = \frac{7}{n+1} \quad \text{ir} \quad \frac{7}{n+1} < \frac{7}{n},$$

tai pakanka rasti natūralųjį skaičių *E*, kuriam esant nelygybė $\frac{7}{n} < \varepsilon$ galioja, kai $n > E$.

Spręsdami nelygybę $\frac{7}{n} < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, gauname, kad $n > \frac{7}{\varepsilon}$.

Jei $\varepsilon > 7$, tai $\left[\frac{7}{\varepsilon}\right] = 0$; jei $0 < \varepsilon \le 7$, tai $\left[\frac{7}{\varepsilon}\right]$ yra natūralusis skaičius. O skaičius $E = \left[\frac{7}{\varepsilon}\right] + 1$ yra natūralusis visais atvejais.

Vadinasi, laisvai pasirinkus ε, $\varepsilon > 0$, nelygybė $\frac{7}{n} < \varepsilon$, taigi ir nelygybė $\left| \frac{7}{n+1} - 0 \right| = \varepsilon$, galioja kiekvienam *n*, didesniam už natūralųjį skaičių *E*, kai $E = \left[\frac{7}{\varepsilon}\right] + 1$.

Apibendrinant galime pasakyti, kad bet kuriam ε, $\varepsilon > 0$, yra toks natūralusis skaičius *E*, kad nelygybė $\left| \frac{7}{n+1} - 0 \right| < \varepsilon$ galiotų kiekvienam *n*, didesniam už *E*.

10. Įrodykite, kad $\lim x_n = 0$, jei

$$x_n = \frac{1}{n^2 + 5}.$$

Sprendimas. Tegu ε yra bet kuris teigiamas skaičius. Iš nelygybės $\frac{1}{n} < \varepsilon$ išplaukia nelygybė $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Pasirinkus natūralųjį skaičių $E = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, galima padaryti išvadą, kad nelygybė $\frac{1}{n} < \varepsilon$ galioja kiekvienam n, didesniam už E.

Kadangi

$$\left|\frac{1}{n^2 + 5} - 0\right| = \frac{1}{n^2 + 5} < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n},$$

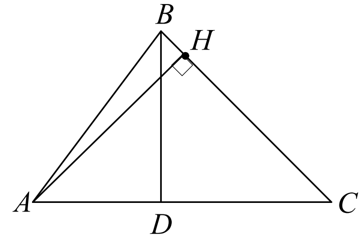
kai n yra bet kuris natūralusis skaičius, tai nelygybė $\left|\frac{1}{n^2 + 5} - 0\right| < \varepsilon$ tikrai galioja kiekvienam n, didesniam už E, kai $E = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$

Matome, kad ribos $\lim \frac{1}{n^2 + 5} = 0$ apibrėžimo sąlyga galioja (yra tenkinama).

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Trikampio ABC kampas A lygus 45^0, kraštinė $BC = 10\ cm.$, o aukštinė BD dalija kraštinę AC į dalis $AD = 6\ cm.$, $DC = 8\ cm.$ Raskite aukštinės AH ilgį.

Sprendimas. Kadangi stačiojo trikampio ABD smailusis kampas A lygus 45^0, tai trikampis ABD yra lygiašonis, $AD = BD = 6$ (1 pav.). Taigi trikampio ABC plotas $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot (6+8) \cdot 6 = 42$. Kita vertus, $S = \frac{1}{2}BC \cdot AH$, taigi $AH = \frac{2S}{BC} = \frac{2 \cdot 42}{10} = 8{,}4\ cm.$



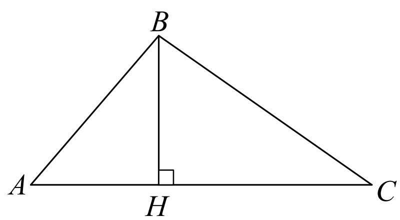
1 pav.

Ats.: 8,4 cm.

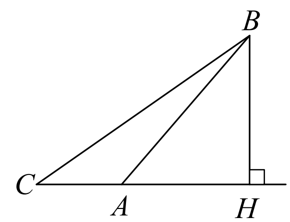
2. Trikampio ABC kraštinės $AB = 17\ cm.$, $BC = 25\ cm.$, aukštinė $BH = 15\ cm.$ Raskite trikampio ABC plotą.

Sprendimas. Iš stačiųjų trikampių ABH ir CBH randame $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$, $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$. Jei taškas H yra atkarpoje AC (2a pav.), tai $AC = AH + BH = 28$, todėl trikampio plotas $S = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 15 = 210\ cm^2$. Kai taškas H nėra kraštinėje AC (2b pav.), tai $AC = CH - AH = 12$, taigi šiuo atveju ieškomasis plotas $S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 15 = 90\ cm^2$.

Ats.: $210\ cm^2$ arba $90 cm^2$.



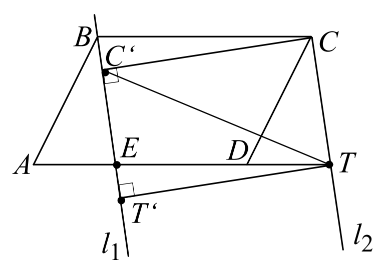
2a pav.



2b pav.

3. Per lygiagretainio $ABCD$ viršūnę B nubrėžta tiesė l_1, kertanti kraštinę AD taške E, o per viršūnę C nubrėžta lygiagreti su tiese l_1 tiesė l_2, kertanti kraštinės AD tęsinį taške T. Iš taškų C ir T nubrėžti statmenys CC' ir TT' į tiesę BE. Raskite lygiagretainio $ABCD$ plotą, jei trikampio $C'T'T$ plotas lygus S.

Sprendimas. Kaip ir 2 pavyzdyje pastebime, kad trikampiai ABE ir DCT yra lygūs (3 pav.), todėl lygiagretainių $ABCD$ ir $BETC$ plotai yra vienodi. Analogiškai trikampiai BCC' ir ETT' irgi lygūs, todėl lygiagretainio $BETC$ plotas lygus stačiakampio $CTT'C'$ plotui. Taigi lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus stačiakampio $CTT'C'$ plotui. Kadangi šio stačiakampio įstrižainė TC' dalija jį į du lygius trikampius CTC' ir $C'T'T$, tai stačiakampio $CTT'C'$ plotas (o tai reiškia, kad ir ieškomasis plotas) lygus dvigubam trikampio $C'T'T$ plotui.

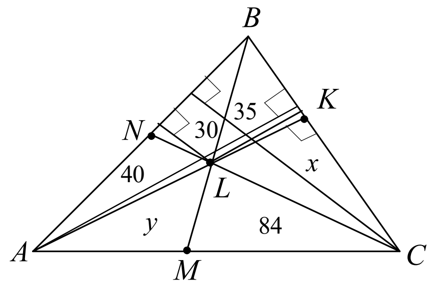


3 pav.

Ats.: $2S$.

4. Trikampio ABC kraštinėse pažymėti taškai $K \in BC$, $M \in AC$, $N \in AB$, atkarpos AK, BM ir CN susikerta viename taške L, trikampių ALN, BLN, BLK ir MCL plotai atitinkamai lygūs $40\ cm^2$, $30\ cm^2$, $35\ cm^2$, ir $84\ cm^2$. Raskite trikampio ABC plotą.

Sprendimas. Pažymėkime trikampių CLK ir ALM plotus atitinkamai x ir y (4 pav.). Kadangi trikampių ALN ir BLN aukštinė, nubrėžta iš viršūnės L yra ta pati, tai $AN : NB = S_{\Delta ALN} : S_{\Delta BLN} = 40 : 30 = 4 : 3$. Kadangi trikampių ACN ir BCN aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės C, sutampa, tai jų plotų santykis lygus atkarpų AN ir BN santykiui, todėl yra teisinga lygybė $\frac{4}{3} = \frac{40+y+84}{30+35+x}$, kurią pertvarkome ir gauname, kad $4x - 3y = 112$. Analogiškai trikampių LKB ir LKC aukštinė, nubrėžta iš viršūnės L, yra ta pati, todėl jų plotų santykis lygus atkarpų BK ir KC santykiui, taigi $BK : KC = 35 : x$. bet šis santykis lygus trikampių ABK ir ACK plotų santykiui, nes šių trikampių aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės A, sutampa. Iš čia gauname lygtį $\frac{35}{x} = \frac{40+30+35}{y+84+}$, kurią suprastiname ir turime $2x - y = 84$. Iš sistemos $4x - 3y = 112$, $2x - y = 84$ randame, kad $x = 70$, $y = 56$. Taigi trikampio ABC plotas $S = 40 + 30 + 35 + 56 + 84 + 70 = 315\ cm^2$.

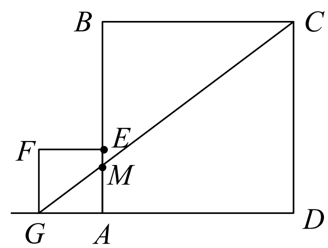


4 pav.

Ats.: $315\ cm^2$.

5. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis yra 9 cm., kvadrato $AEFG$ kraštinės ilgis lygus 3 cm., jo viršūnė E yra kraštinėje AB, o viršūnė G – kraštinės DA tęsinyje už taško A. Atkarpa CG kerta atkarpą AB taške M. Raskite trikampio BMC plotą.

Sprendimas. Kadangi $GD = 3 + 9 = 12$, (5 pav.), tai trikampio GDC plotas $S_{\Delta GDC} = \frac{1}{2} GD \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54$. Statieji trikampiai BMC ir GCD yra panašieji, nes jų smailieji kampai BCM ir CGD yra lygūs (vidaus priešiniai kampai tarp lygiagrečių tiesių $BC \parallel GD$ ir kirstinės GC), taigi $BM : CD = BC : GD = 9 : 12 = \frac{3}{4}$, todėl $BM = \frac{3}{4} CD = \frac{3}{4} \cdot 9 = \frac{27}{4} > 6 = BE$. Iš čia gauname, kad taškas M yra atkarpoje EA. Kadangi panašiųjų trikampių plotai sutinka kaip jų atitinkamų kraštinių kvadratai, tai $S_{\Delta BMC} : S_{\Delta GCD} = BC^2 : GD^2 = 9^2 : 12^2 = 9 : 16$, taigi ieškomasis plotas $S_{\Delta BMC} = \frac{9}{16} S_{\Delta GCD} = \frac{9}{16} \cdot 54 = \frac{243}{8}\ cm^2$.

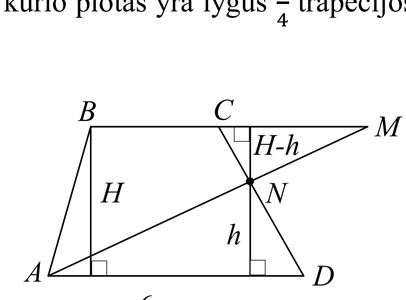


5 pav.

Ats.: $\frac{243}{8}\ cm^2$.

6. Trapecijos $ABCD$ pagrindų ilgiai $AD = a$, $BC = b$. Atkarpos BC tęsinyje už taško C pažymėtas taškas M taip, kad tiesė AM nukerta nuo trapecijos trikampį, kurio plotas yra lygus $\frac{1}{4}$ trapecijos $ABCD$ ploto. Raskite atkarpos CM ilgį.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesė AM kerta trapecijos šoninę kraštinę CD taške N. Sakykime, kad ieškomoji atkarpa $CM = x$, duotosios trapecijos aukštinė yra H, trikampio AND aukštinę, nubrėžtą iš viršūnės N, pažymėkime h, tuomet trikampio CNM aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės N, ilgis lygus $H - h$ (6 pav.). Iš sąlygos $S_{\Delta AND} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$ turime lygybę $\frac{ah}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot H$, iš kurios išplaukia, kad $H = \frac{4ah}{a+b}$. Kadangi $\angle AND = \angle CNM$ (kryžminiai kampai) ir $\angle NAD = \angle CMN$ (vidaus priešiniai kampai tarp lygiagrečių tiesių $AD \parallel MC$ ir kirstinės AM), tai trikampiai AND ir MNC



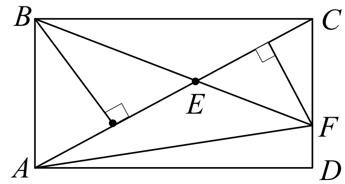
6 pav.

yra panašieji. Kadangi panašiųjų trikampių atitinkamų atkarpų santykiai yra vienodi, tai iš šių trikampių panašumo gauname lygybę $\frac{a}{x}=\frac{h}{H-h}$, kurią pertvarkius, turime $aH-ah=hx$. Į šią lygybę įrašome aukštinės H išraišką, gauname, kad $\frac{4a^2h}{a+b}-ah=hx$, todėl $x=\frac{4a^2}{a+b}-a=\frac{3a^2-ab}{a+b}$.

Ats.: $\frac{3a^2-ab}{a+b}$.

7. Taškas F yra stačiakampio $ABCD$ kraštinėje CD, atkarpa FB kerta įstrižainę AC taške E, trikampių FEC ir BEC plotai atitinkamai lygūs 4 cm^2 ir 6 cm^2. Raskite keturkampio $AEFD$ plotą.

Sprendimas. Kadangi $FD \parallel AB$, tai pagal 6 pavyzdžio rezultatą trikampių CEB ir AEF plotai yra lygūs 6 (7 pav.). Trikampių AEF ir CEF aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės F, yra lygios, tai tų trikampių plotai sutinka kaip atkarpų AE ie EC ilgiai: $AE : EC = S_{\Delta AEF} : S_{\Delta EFC} = 6 : 4 = 3 : 2$. Trikampių CEB ir AEB aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės B, yra vienodos, todėl $S_{\Delta AEB} : S_{\Delta BEC} = AE : EC = 3 : 2$, taigi $S_{\Delta AFB} = \frac{3}{2} S_{\Delta BEC} = \frac{3}{2}\cdot 6 = 9$. Taigi trikampio ABC plotas lygus trikampių AEB ir BEC plotų sumai, t. y. 15, toks pat yra ir trikampio ADC plotas, todėl ieškomasis plotas $S_{AEFD} = S_{\Delta ADC} - S_{\Delta EFC} = 15 - 4 = 11\ cm^2$.

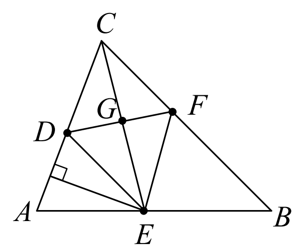


7 pav.

Ats.: 11 cm^2.

8. Trikampio ABC plotas lygus 50 cm^2, taškai D, E, F yra atitinkamai kraštinėse AC, AB, BC, be to, $AD = 9\ cm$, $DC = 6\ cm$., atkarpos EC ir DF susikerta taške G, o trikampių CDG ir EFG plotai vienodi. Raskite trikampio BCE plotą.

Sprendimas. Kadangi trikampių CDG ir EFG plotai yra lygūs, tai pagal 6 pavyzdžio rezultatą $FC \parallel ED$ (8 pav.). Trikampiai ABC ir AED yra panašieji, todėl jų plotai sutinka kaip atitinkamų kraštinių kvadratai: $\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta ABC}} = (\frac{AD}{AC})^2 = (\frac{9}{9+6})^2 = \frac{9}{25}$. Taigi $S_{\Delta AED} = \frac{9}{26}\cdot S_{\Delta ABC} = \frac{9}{25}\cdot 50 = 18$. Kadangi trikampių DCE ir AED aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės E, yra lygios, tai $\frac{S_{\Delta EDC}}{S_{\Delta AED}} = \frac{DC}{AD} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, taigi $S_{\Delta ECD} = \frac{2}{3} S_{\Delta AED} = \frac{2}{3}\cdot 18 = 12$. Ieškomąjį plotą gauname, iš trikampio ABC ploto atėmę trikampių AED ir ECD plotų sumą: $S_{\Delta BCE} = 50 - 18 - 12 = 20\ cm^2$.

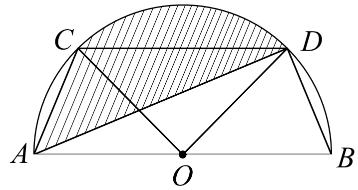


8 pav.

Ats.: 20 cm^2.

9. Atkarpa AB yra puskritulio skersmuo, taškas O yra puskritulio centras, puskritulio plotas lygus $9\pi\ cm^2$. Taškai C ir D lanką AB dalija į tris lygias dalis. Apskaičiuokite plokštumos dalies, apribotos atkarpomis AC ir AD bei lanku CD, plotą.

Sprendimas. Sujunkime taškus C ir D su centru O (9 pav.). Kadangi apskritimo lankai AC ir DB yra lygūs, tai stygos AB ir CD yra lygiagrečios. Todėl trikampių ACD ir OCD kraštinė CD yra bendra, o į ją nubrėžtos aukštinės yra lygios (jos lygios atstumui tarp lygiagrečių tiesių AB ir CD). Taigi trikampių ACD ir OCD plotai yra lygūs, todėl ieškomosios figūros plotas lygus



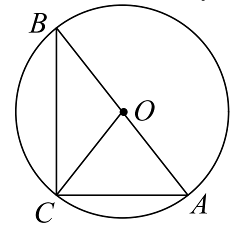
9 pav.

skritulio išpjovos OCD plotui. Kadangi $\angle COD = \frac{1}{3} \cdot 180^0 = 60^0$, tai šios išpjovos plotas yra lygus šeštadaliui skritulio ploto, t. y. trečdaliui pusskritulio ploto. Taigi ieškomasis plotas lygus $\frac{9}{3}\pi = 3\pi\ cm^2$.

Ats.: $3\pi\ cm^2$.

10. Į skritulį įbrėžtas statusis trikampis, kurio statiniai lygūs 1 cm. ir $\sqrt{3}$ cm. Raskite nuopjovos, kurios pagrindas yra statinis lygus 1, plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad trikampis ABC, $\angle C = 90^0$, $AC = 1, BC = \sqrt{3}$ įbrėžtas į apskritimą, trikampio įžambinė AB yra to apskritimo skersmuo, įžambinės vidurio taškas O yra apskritimo centras (10 pav.). Kadangi $AB = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$, tai $\angle B = 30^0$. Kadangi $AO = OC = OB$, tai $\angle OCB = \angle B = 30^0$, tai pagal trikampio priekampio savybę $\angle AOC = 30^0 + 30^0 = 60^0$, trikampis AOC yra lygiakraštis, jo plotas $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} \cdot OA^2 \cdot \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Išpjovos AOC plotas $S_{išpjovos\ AOC} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 60}{360} = \frac{\pi}{6}$. Taigi ieškomasis nuopjovos plotas lygus išpjovos AOB ir trikampio AOB plotų skirtumui, t. y. ieškomasis plotas lygus $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.



10 pav.

Ats.: $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Taisyklingas lošimo kauliukas metamas du kartus. Apskaičiuokite tikimybę, kad atsivertusių akučių suma bus nelyginė neviršijanti 5.

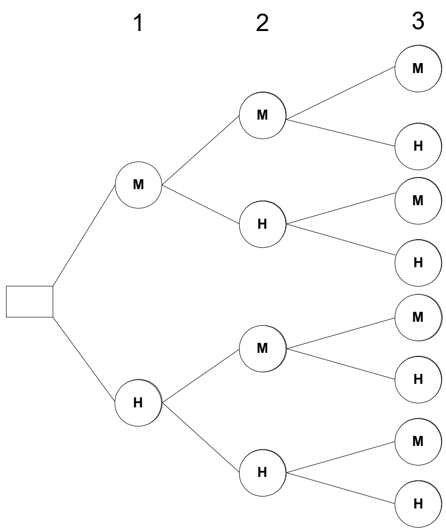
Sprendimas.

$$\begin{array}{cccccc}
e_{11} & \cancel{e_{12}} & e_{13} & \cancel{e_{14}} & e_{15} & e_{16} \\
\cancel{e_{21}} & e_{22} & \cancel{e_{23}} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\
e_{31} & \cancel{e_{32}} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \\
\cancel{e_{41}} & e_{42} & e_{43} & e_{44} & e_{45} & e_{46} \\
e_{51} & e_{52} & e_{53} & e_{54} & e_{55} & e_{56} \\
e_{61} & e_{62} & e_{63} & e_{64} & e_{65} & e_{66}
\end{array}$$

Čia išvardintos visos 36 vienodai galimos lošimo kauliuko dviejų metimų baigtys. Baigtys, kurios tenkina sąlygą „ atsivertusių akučių suma nelyginė ir neviršija 5“ baigčių sąraše užbrauktos. Jų yra 6. Taigi ieškomoji tikimybė lygi $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ats. $p = \frac{1}{6}$.

2. Moneta metama 3 kartus. Apskaičiuokite tikimybę, kad bent vieną kartą atsivers herbas.
Sprendimas.



Šioje schemoje, vadinamoje galimybių medžiu, matome išvardintas visas 8 trijų monetos metimų bandymo baigtis. Pavyzdžiui, (MMM) – visus tris kartus atsivertė moneta, (HMH) – pirmu metimu atsivertė herbas, antru - moneta, trečiu – herbas. Nesunku nustatyti, keliais atvejais bent vieną kartą iš trijų metimų atsivertė herbas, tokių atvejų yra 7. Vadinasi, ieškomoji tikimybė lygi $p = \frac{7}{8}$.

Ats. $p = \frac{7}{8}$.

3. Taisyklingas lošimo kauliukas metamas du kartus. Apskaičiuokite sąlyginę tikimybę bent kartą atsiversti 6 akutėmis, jeigu pirmuoju metimu atsivertė ne mažiau kaip 3 akutės.
Sprendimas.

$$\begin{array}{cccccc}
e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\
e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\
e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \\
e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} & e_{45} & e_{46} \\
e_{51} & e_{52} & e_{53} & e_{54} & e_{55} & e_{56} \\
e_{61} & e_{62} & e_{63} & e_{64} & e_{65} & e_{66}
\end{array}$$

Baigtys, rodančios, kad pirmuoju metimu atsivertė ne mažiau kaip 3 akutės (įvykis B) apvestos raudona stora linija. Jų yra 24.
Aibė baigčių, reiškiančių kad kauliukas bent kartą atsivertė 6 akutėmis (įvykis A) , apvesta juoda linija. Iš jų 9 priklauso įvykio B baigčių aibei. Taigi sąlyginė tikimybė lygi: $P(A\,|\,B) = \frac{9}{24}$.

Ats. $P(A\,|\,B) = \frac{9}{24}$.

4. Įvykiai A ir B yra nepriklausomi. Įrodykite, kad įvykiai $\overline{A}$ ir $\overline{B}$ yra nepriklausomi.

Įrodymas. Turime įrodyti, kad iš lygybės $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ išplaukia lygybė $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$.

Pasinaudosime lygybe tarp įvykių $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$. Tuomet

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-P(A)-P(B)+P(A)\cdot P(B)=$

$=1-P(A)-P(B)\cdot(1-P(A))=(1-P(A))\cdot(1-P(B))=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$. Teiginys įrodytas.

5. Žinomos šios tikimybės: $P(A)=0{,}8$, $P(B)=0{,}6$, $P(A\cup B)=0{,}9$. Apskaičiuokite $P(A\cap B)$, sąlygines tikimybes $P(A\,|\,B)$ ir $P(B\,|\,A)$ bei nustatykite ar įvykiai A ir B yra priklausomi.

Sprendimas.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\ \Rightarrow\ P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0{,}8+0{,}6-0{,}9=0{,}5$.

$P(A\,|\,B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0{,}5}{0{,}6}=\dfrac{5}{6}.\quad P(B\,|\,A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0{,}5}{0{,}8}=\dfrac{5}{8}.$

Matome, kad $P(A\cap B)=0{,}5$, o $P(A)\cdot P(B)=0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48$. Taigi $P(\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$. Vadinasi, įvykiai A ir B yra priklausomi.

Ats. $P(A\cap B)=0{,}5$, $P(A\,|\,B)=\dfrac{5}{6}$, $P(B\,|\,A)=\dfrac{5}{8}$, įvykiai A ir B yra priklausomi.

6. Tikimybė laimėti įsigijus vieną loterijos A bilietą lygi 0,005, o loterijos B laimingo bilieto tikimybė yra 0,001. Apskaičiuokite tikimybę, kad įsigijus po vieną loterijos A ir loterijos B bilietą, bent vienas bus laimingas.

Sprendimas. Tegu A- įvykis, kad įsigytas loterijos A bilietas laimės, B – įvykis, kad įsigytas loterijos B bilietas laimės. Tuomet $A\cup B$ - įvykis, kad bent vienas bilietas bus laimingas. Kadangi A ir B – nepriklausomi įvykiai, tai

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}005+0{,}001-0{,}005\cdot 0.001=0{,}005995$.

Ats. 0,005995.

7. Krepšininkas Audrius baudos metimą pataiko su tikimybe 0,85, o Balio tikslaus baudos metimo tikimybė yra 0,75. Audrius ir Balys meta po vieną baudos metimą. Apskaičiuokite tikimybę, kad: a) abiejų krepšininkų baudos metimai bus tikslūs; b) bus tikslus lygiai vienas metimas; c) bus tikslus bent vienas metimas; d) abu krepšininkai nepelnys taškų.

Sprendimas. Pažymėkime A – įvykį, kad Audrius baudos metimą pataiko, B – įvykį, kad Balys baudos metimą pataiko. Tuomet:

a) $A\cap B$ – įvykis, kad abiejų krepšininkų baudos metimai bus tikslūs ir $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}85\cdot 0{,}75=0{,}6375$ (įvykiai A ir B - nepriklausomi);

b) įvykis „bus tikslus lygiai vienas metimas“ užrašomas išraiška $(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$. Kadangi įvykiai $A\cap\overline{B}$ ir $\overline{A}\cap B$ yra nesutaikomieji, be to, įvykių poros A ir $\overline{B}$ bei $\overline{A}$ ir B yra nepriklausomų įvykių poros, tai $P((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=P(A)\cdot P(\overline{B})+P(\overline{A})\cdot P(B)=$ $=0{,}85\cdot 0{,}25+0{,}15\cdot 0{,}75=0{,}325$.

c) įvykis „bus tikslus bent vienas metimas“ yra $A\cup B$. Todėl

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}85+0{,}75-0{,}6375=0{,}9625.$$

d) įvykio „abu krepšininkai nepelnys taškų“ tikimybė lygi:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0{,}15\cdot 0{,}25=0{,}0375$$ (įvykiai $\overline{A}$ ir $\overline{B}$ – nepriklausomi).

Ats. a) 0,6375; b) 0,325; c) 0,9625; d) 0,0375.

8. Gydytojas žino, kad skirtingų ligų požymiai gali būti vienodi. Iš tyrimų nustatyta: tikimybė, lygi 0,3, kad ligoniui bus aptiktas požymis A; sąlyginė tikimybė 0,9 sirgti liga B, kai aptiktas požymis A. Apskaičiuokite tikimybę, kad ligoniui bus aptiktas požymis A ir jis sirgs liga B.

Sprendimas. Įvykį, kad ligoniui bus aptiktas požymis *A*, kad būtų paprasčiau taip pat pažymėkime *A*, taigi $P(A)=0,3$. Tikimybė įvykio susirgti liga *B*, kai aptiktas požymis *A*, yra $P(B\mid A)=0,9$. Tuomet įvykio „ligoniui bus aptiktas požymis *A* ir jis sirgs liga *B*“ tikimybė lygi: $P(B\cap A)=P(A)\cdot P(B\mid A)=0,3\cdot 0,9=0,27$.

Ats. 0,27.

9. Šaulys šauna į taikinį du kartus. Pirmojo šūvio pataikymo tikimybė yra 0,7. Kai pirmasis šūvis taiklus, antrasis šūvis taiklus su tikimybe 0,8. O jei pirmasis šūvis netaiklus, tai tikimybė pataikyti į taikinį antruoju šūviu lygi 0,6. Apskaičiuokite: a) tikimybę, kad šaulys pataikys į taikinį abiem šūviais; b) tikimybę, kad pirmasis šūvis bus netaiklus, o antrasis – taiklus; c) tikimybę, kad antrasis šūvis bus taiklus.

Sprendimas. Tegu *A* – įvykis pataikyti pirmu šūviu, *B* – įvykis pataikyti antru šūviu. Pagal sąlygą $P(A)=0,7$, $P(B\mid A)=0,8$, $P(B\mid \overline{A})=0,6$. Tuomet:

a) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\mid A)=0,7\cdot 0,8=0,56$; b) $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B\mid \overline{A})=0,3\cdot 0,6=0,18$.

c) Atkreipkime dėmesį, kad įvykį *B* galima išreikšti dviejų nesutaikomųjų įvykių sąjunga, t. y. lygybe $B=(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})$. Todėl $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\overline{A})=0,56+0,18=0,74$.

Ats. a) 0,56; b) 0,18; c) 0,74.

10. Dvejos automatinės staklės gamina vienodas detales. Tolesniame gamybos procese jos sumaišomos, todėl atsitiktinai paimta detalė su vienoda tikimybe 0,5 gali būti pagaminta bet kuriomis iš dviejų staklių. Žinoma, kad pirmosiomis staklėmis pagaminta atsitiktinai paimta detalė bus brokuota su tikimybe 0,15. Ši tikimybė antrosioms staklėms lygi 0,045. Apskaičiuokite tikimybę, kad atsitiktinai pasirinkus detalę iš abejomis staklėmis pagamintos produkcijos ji bus brokuota.

Sprendimas. Pažymėkime *A* – įvykį, kad atsitiktinai paimta detalė bus brokuota, B_1 – kad atsitiktinai paimta detalė bus pagaminta pirmosiomis staklėmis, B_2 – kad atsitiktinai paimta detalė bus pagaminta antrosiomis staklėmis. Tuomet $A=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)$ ir

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)\\ &= P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A\,/\,B_2)=0,5\cdot 0,15+0,5\cdot 0,045=0,0975.\end{aligned}$$

Ats. 0,0975.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Išspręskite lygtį $(x+1)(5-x)\left(\sqrt{x-8}+2\right)=4$.

Sprendimas. Įrodysime, kad lygtis

$$(x+1)(5-x)\left(\sqrt{x-8}+2\right)=4$$

sprendinių neturi.

Lygtis apibrėžta, kai $x-8\geq 0$, taigi $D_l=[8;+\infty)$. Tačiau joje $5-x<0$, o tada ir visa kairioji lygties pusė neigiama ir reikšmės 4 neįgyja.

Ats.: lygtis sprendinių neturi.

2. Išspręskite lygtį $\sqrt{3+x}=3-x\sqrt{x}$.

Sprendimas. Lygtis $\sqrt{3+x}=3-x\sqrt{x}$ apibrėžta intervale $[0;+\infty)$. Nesunku pastebėti, kad $x=1$ tenkina lygtį. Kairioji lygties pusė yra monotoniškai didėjanti, nes

$$\left(\sqrt{3+x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{3+x}}>0.$$

Dešinioji - monotoniškai mažėjanti, nes

$$\left(3-x\sqrt{x}\right)'=-\frac{3}{2}\sqrt{x}\leq 0.$$

Vadinasi, lygtis teturi vienintelį sprendinį.

Ats.: $x=1$.

3. Išspręskite lygtį $\sqrt{x^2-3x+2}=-x^2+2x-1$.

Sprendimas. Rasime lygties $\sqrt{x^2-3x+2}=-x^2+2x-1$ apibrėžimo sritį. Iš nelygybės $x^2-3x+2\geq 0$ išplaukia, kad $D_l=(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. Antra vertus, dešinioji lygties pusė turi būti neneigiama:

$$-x^2+2x-1\geq 0,$$
$$x^2-2x+1\leq 0,$$
$$(x-1)^2\leq 0.$$

Šią nelygybę tenkina tik $x=1$. Jis tenkina lygtį.

Ats.: $x=1$.

4. Išspręskite lygtį $\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}=\sqrt[3]{14x-7}+1$.

Sprendimas. Lygties apibrėžimo sritis $D_l=\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$, nes iš sąlygos $2x-1\geq 0$ išplaukia, kad $x\geq\frac{1}{2}$, o tuomet ir $2x+2\sqrt{2x-1}>0$. Dešinioji lygties pusė apibrėžta visoje ℝ.

Pertvarkome kairiąją lygties pusę:

$$\sqrt{(2x-1)+2\sqrt{2x-1}+1}=\sqrt[3]{14x-7}+1,\qquad \sqrt{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)^2}=\sqrt[3]{14x-7}+1.$$

Turime $\sqrt{2x-1}+1>0$, todėl $\sqrt{2x-1}+1=\sqrt[3]{14x-7}+1$, $\sqrt{2x-1}=\sqrt[3]{7(2x-1)}$. Abi puses keldami šeštuoju laipsniu, gausime

$$(2x-1)^3=49(2x-1)^2,\qquad (2x-1)^3-49(2x-1)^2=0,\qquad (2x-1)^2(2x-50)=0,$$

iš kur $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=25$. Galima patikrinti, kad šie skaičiai tenkina duotąją lygtį.

Ats.: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=25$.

5. Išspręskite lygtį $(x^2+x)^2-21x^2+3(x-3)^2=27$.

Sprendimas. Lygtis apibrėžta visoje ℝ. Pertvarkysime kairiąją lygties pusę:

$(x^2+x)^2-21x^2+3(x^2-6x+9)=27,\qquad (x^2+x)^2-18(x^2+x)=0,$
$(x^2+x)^2(x^2+x-18)=0,\qquad x(x+1)(x^2+x-18)=0.$

Lygtis $x^2+x-18=0$ turi sprendinius $x_1=\frac{-1+\sqrt{73}}{2}$, $x_2=\frac{-1-\sqrt{73}}{2}$. Taigi pradinė lygtis turi keturis sprendinius: $x_1=\frac{-1+\sqrt{73}}{2}$, $x_2=\frac{-1-\sqrt{73}}{2}$, $x_3=0$, $x_4=-1$.

Ats.: $x_1=\frac{-1+\sqrt{73}}{2}$, $x_2=\frac{-1-\sqrt{73}}{2}$, $x_3=0$, $x_4=-1$.

6. Išspręskite lygtį $(x^2+3x-4)^2+2x^3+3x^2-8x=0$.

Sprendimas. Lygtis apibrėžta visoje $\mathbb{R}$. Pertvarkome:

$$(x^2+3x-4)^2+2x(x^2-4)+3x^2=0.$$

Įrašę lygtyje $x=0$ įsitikiname, kad tai nėra jos sprendinys, todėl abi puses dalindami iš x^2 sprendinio neprarasime:

$\left(\frac{x^2+3x-4}{x}\right)^2+2\frac{x^2-4}{x}+3=0$, arba $\left(x+3-\frac{4}{x}\right)^2+2\left(x+3-\frac{4}{x}\right)-6+3=0.$

Pažymėję $x+3-\frac{4}{x}=t$, gauname lygtį $t^2+2t-3=0$, turinčią sprendinius $t_1=-3$, $t_2=1$.

Spręskime lygtį $x+3-\frac{4}{x}=-3$: $\quad x+6-\frac{4}{x}=0,\ |\cdot x\quad x^2+6x-4=0$. Gauname sprendinius $x_1=-3-\sqrt{13}$ ir $x_2=-3+\sqrt{13}$.

Lygtį $x+3-\frac{4}{x}=1$ pertvarkome į $x^2+2x-4=0$. Gauname sprendinius $x_3=-1-\sqrt{5}$, $x_4=-1+\sqrt{5}$.

Ats.: $x_1=-3-\sqrt{13}$, $x_2=-3+\sqrt{13}$, $x_3=-1-\sqrt{5}$, $x_4=-1+\sqrt{5}$.

7. Išspręskite lygtį $x^2-2x-1+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x+2}$.

Sprendimas. Rasime lygties $x^2-2x-1+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x+2}$ apibrėžimo sritį. Sudarome nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} x^2-x+1\geq 0,\\ x+2\geq 0.\end{cases}$$

Pirmoji nelygybė teisinga visoje $\mathbb{R}$, antroji – kai $x\geq -2$. Taigi $D_l=[-2;\ +\infty)$.

Pertvarkykime lygtį:

$$x^2-x-1+\sqrt{x^2-x+1}=x+2+\sqrt{x+2}\ . \qquad (*)$$

Nagrinėkime funkciją

$$f(x)=x+\sqrt{x},$$

t$\mathbb{R}$uomet $(*)$ lygtį galime perrašyti:

$$f(x^2-x+1)=f(x+2). \qquad (**)$$

Funkcija f yra monotoniškai didėjanti: $f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}>0,\ \ x>0$. Vadinasi, lygtis $(**)$ ekvivalenti lygčiai

$$x^2-x+1=x+2,$$
$$x^2-2x-1=0,$$
$$x_1=\frac{2-2\sqrt{2}}{2},\ x_2=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}.$$

Ats.: $x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=1+\sqrt{2}$.

8. Išspręskite lygtį $3^{x^2-3x}+3x^2-15x+12=3^{2(x-2)}$.

Sprendimas. Lygtis

$$3^{x^2-3x}+3x^2-15x+12=3^{2(x-2)}$$

apibrėžta visoje $\mathbb{R}$. Pertvarkykime ją taip:

$$3^{x^2-3x}+3x^2-9x=6x-12+3^{2(x-2)},$$
$$3^{x^2-3x}+3(x^2-3x)=3^{2(x-2)}+3\cdot 2(x-2).$$

Apibrėžkime funkciją

$$f(x) = 3^x + 3x.$$

Ji yra monotoniškai didėjanti, nes

$$f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 + 3 > 0.$$

Todėl lygtis

$$f(x^2 - 3x) = f(2x - 4)$$

ekvivalenti lygčiai

$$x^2 - 3x = 2x - 4,$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 4.$$

Ats.: $x_1 = 1, x_2 = 4.$

9. Išspręskite lygtį $\sqrt[3]{6+x} = x^3 - 6$.

Sprendimas. Lygtis $\sqrt[3]{6+x} = x^3 - 6$ apibrėžta visoje ℝ. Pertvarkysim ją:

$$6 + \sqrt[3]{6+x} = x^3,$$
$$\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6+x}} = x.$$

Apibrėžus funkciją $f(x) = \sqrt[3]{6+x},\ x \in \mathbb{R}$, lygtis užrašoma $f(f(x)) = x$.

Funkcija *f* yra monotoniškai didėjanti, todėl pakanka spręsti lygtį $f(x) = x$, t. y. ,

$$\sqrt[3]{6+x} = x,$$
$$6 + x = x^3,$$
$$x^3 - x - 6 = 0.$$

Nesunku pastebėti, kad šią lygtį tenkina $x = 2$. Pertvarkę lygtį

$$x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + 3x - 6 = 0,$$
$$x^2(x-2) + 2x(x-2) + 3(x-2) = 0,$$
$$(x-2)(x^2 + 2x + 3) > 0.$$

Trinaris $x^2 + 2x + 3 > 0$ visoje ℝ, todėl lygtis daugiau sprendinių neturi.

Ats.: $x = 2.$

10. Išspręskite lygtį $2\sqrt{1 + 2\sqrt{x}} = x - 1$.

Sprendimas. Lygtis $2\sqrt{1 + 2\sqrt{x}} = x - 1$ apibrėžta intervale [0; +∞). Ją perrašę

$$1 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{x}} = x,$$

įveskime funkciją

$$f(x) = 1 + 2\sqrt{x},\quad x \geq 0.$$

Tuomet lygtis gali būti užrašyta

$$f(f(x)) = x.$$

Funkcija *f* monotoniškai didėjanti, todėl gautoji lygtis ekvivalenti lygčiai

$$f(x) = x, \text{ t. y.,}$$
$$1 + 2\sqrt{x} = x,$$
$$x - 2\sqrt{x} - 1 = 0.$$

Pažymėję $\sqrt{x} = t > 0$, gausime

$$t^2 - 2t - 1 = 0,$$
$$t_1 = 1 - \sqrt{2} < 0,\ t_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

Gauname $x = t^2 = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2}.$

Ats.: $x = 3 + 2\sqrt{2}.$

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Raskite skaičiaus $a = 3 \cdot 11^{31} + 5 \cdot 31^{11} + 17$ dalybos iš 12 liekaną.

Sprendimas. Kadangi $11^{31} = 121^{15} \cdot 11 = (10 \cdot 12 + 1)^{15} \cdot 11$, tai $r(3 \cdot 11^{31}) = r(3 \cdot 1^{15} \cdot 11) = r(33) = 9$. Skaičiuodami antro dėmens dalybos iš 12 liekaną, gauname:

$$31^{11} = (2 \cdot 12 + 7)^{11} \Longrightarrow r(5 \cdot 31^{11}) = r(5 \cdot 7^{11}) = r(5 \cdot (48+1)^5 \cdot 7) = r((5 \cdot 1^5 \cdot 7) = 11.$$

Todėl $r(a) = r(9 + 11 + 17) = r(37) = 1$.

Ats.: 1.

2. Raskite skaičiaus $a = 2^{222} + 3^{333} + 5^{555}$ dalybos iš 7 liekaną.

Sprendimas. Iš pradžių apskaičiuokime skaičiaus a dėmenų dalybos iš 7 liekanas:

$$2^{222} = (2^3)^{74} = 8^{74} = (7+1)^{74} \Longrightarrow r(2^{222}) = r(1^{74}) = 1;$$

$$3^{333} = (3^2)^{166} \cdot 3 = 9^{166} \cdot 3 = (7+2)^{166} \cdot 3 \Longrightarrow r(3^{333}) = r(2^{166} \cdot 3) = r((2^3)^{55} \cdot 2 \cdot 3)$$
$$= r((7+1)^{55} \cdot 6) = r(1^{55} \cdot 6) = 6;$$

$$5^{555} = 25^{277} \cdot 5 = (3 \cdot 7 + 4)^{277} \cdot 5 \Longrightarrow r(5^{555}) = r(4^{277} \cdot 5) = r((4^3)^{92} \cdot 4 \cdot 5) = r((64^{92} \cdot 20)$$
$$= r((9 \cdot 7 + 1)^{92} \cdot 20) = r(1^{92} \cdot 20) = 6.$$

Vadinasi, $r(a) = r(1 + 6 + 6) = 6$.

Ats.: 6.

3. Įrodykite, kad skaičius $a = 23^{17} + 17^{23}$ dalijasi iš 8, bet nesidalija iš 6.

Sprendimas. Iš pradžių įrodykime, kad a dalijasi iš 8:

$$a = (2 \cdot 8 + 7)^{17} + (2 \cdot 8 + 1)^{23} \Longrightarrow r(a) = r(7^{17} + 1^{28}) = r((48+1)^8 \cdot 7 + 1)$$
$$= r(1^8 \cdot 7 + 1) = r(7 + 1) = 0.$$

Nagrinėjant skaičiaus a dalumo iš 6 problemą, pakanka įrodyti, kad a nesidalija iš 3. Skaičiuodami liekaną, gauname:

$$a = 23^{17} + 17^{23} = (7 \cdot 3 + 2)^{17} + (5 \cdot 3 + 2)^{23} \Longrightarrow r(a) = r(2^{17} + 2^{23}) = r(4^8 \cdot 2 + 4^{11} \cdot 2)$$
$$= r((3+1)^8 \cdot 2 + (3+1)^{11} \cdot 2) = r(1^8 \cdot 2 + 1^{11} \cdot 2) = r(2 + 2) = 1.$$

Matome, kad skaičius a nesidalija iš 3, todėl nesidalija iš 6.

4. Įrodykite, kad skaičius $a = 12^{169} - 155$ dalijasi ir iš 13, ir iš 143.

Sprendimas. Kadangi $143 = 11 \cdot 13$, tai galima elgtis dvejopai – arba iš karto įrodyti, kad a dalijasi iš 143, arba įrodyti, kad a dalijasi ir iš 11, ir iš 13.

Įrodykime, kad a dalijasi iš 143.

<u>1 būdas</u>. Skaičiaus a išraišką pertvarkykime taip:

$$a = 12^{169} - 155 = 12 \cdot 12^{168} + (-2 \cdot 143 + 131) = 12 \cdot 144^{84} + (-2 \cdot 143 + 131)$$
$$= 12 \cdot (143 + 1)^{84} + (-2 \cdot 143 + 131).$$

Skaičiuodami skaičiaus a dalybos iš 143 liekaną, gauname:

$$r(a) = r(12 \cdot 1^{84} + 131) = r(143) = 0.$$

Vadinasi, a dalijasi iš 143.

2 būdas. Kadangi

$$a = 12^{169} - 155 = 12 \cdot 12^{168} - 12 - 143 = 12(144^{84} - 1) - 143 = 12 \cdot (144 - 1)(144^{83} + 144^{82} + \cdots + 144 + 1) - 143 = 12 \cdot 143(143^{83} + 143^{82} + \cdots + 143 + 1) - 143 = 143(12(143^{83} + 143^{82} + \cdots + 143 + 1) - 1),$$

o skliaustuose gaunamas skaičius yra sveikasis, tai išvadą, jog a dalijasi iš 143, gauname tiesiogiai remdamiesi dalumo apibrėžimu.

5. Apskaičiuokite skaičiaus $a = (77 + 11^{121})^{71}$ dalybos iš 6 liekaną.

Sprendimas. Iš pradžių apskaičiuokime laipsnio pagrindo $77 + 11^{121}$ dalybos iš 6 liekaną:

$$77 + 11^{121} = (6 \cdot 12 + 5) + 121^{60} \cdot 11 = (6 \cdot 12 + 5) + (6 \cdot 20 + 1)^{60} \cdot (6 + 5)$$
$$\Rightarrow r(77 + 11^{121}) = r(5 + 1^{60} \cdot 5) = r(10) = 4.$$

Dabar apskaičiuokime $r(a)$:

$$r(a) = r(4^{71}) = r(64^{23} \cdot 16) = r(4^{23} \cdot 4) = r(4^{24}) = r(64^{8}) = r(4^{8}) = r(64^{2} \cdot 16)$$
$$= r(4^{2} \cdot 4) = r(64) = 4.$$

Ats.: 4.

6. Įrodykite, kad nėra nė vieno natūraliojo skaičiaus *n*, kad $a_n = n^2 + 7n + 2$ dalytųsi iš 13.

Sprendimas. Natūralųjį skaičių n užrašykime

$$n = 13m + r, \qquad r \in \{0, 1, \dots, 12\}.$$

Tada $a_n = (13m + r)^2 + 7(13m + r) + 2 = 13m(13m + 2r + 7) + r^2 + 7r + 2.$

Kad a_n dalytųsi iš 13, skaičius $r^2 + 7r + 2$, $r \in \{0, 1, 2, \dots, 12\}$, turėtų dalytis iš 13. Bet nė vienu atveju negauname dalaus iš 13 skaičiaus $r^2 + 7r + 2$.

7. Raskite skaičiaus 2^{123} paskutinį skaitmenį.

Sprendimas. Skaičiaus 2^{123} paskutinis skaitmuo yra šio skaičiaus dalybos iš 10 liekana. Gauname:

$$r(2^{123}) = r((2^5)^{24} \cdot 2^3) = r((30 + 2)^{24} \cdot 8) = r(2^{24} \cdot 8) = r((2^5)^5 \cdot 4) = r((30 + 2)^5 \cdot 4) = r(2^5 \cdot 4) = r(128) = 8.$$

Ats.: 8.

8. Nustatykite, ar yra bent vienas natūralusis skaičius *n*, kad $a_n = 14n^3 + 9n^2 + n$ nesidalytų iš 3.

Sprendimas. Tegu $n = 3m + r,\ r \in \{0, 1, 2\}$.

Tada $a_n = 14(3m + r)^3 + 9 \cdot (3m + r)^2 + 3m + r$. Skaičiaus a_n dalybos iš 3 liekana tokia pat kaip ir skaičiaus $2r^3 + r,\ r \in \{0, 1, 2\}$, dalybos iš 3 liekana, nes $14 = 4 \cdot 3 + 2$.

Jei $r = 0$, tai $2r^3 + r = 0$; jei $r = 1$, tai $2r^3 + r = 3$; jei $r = 2$, tai $2r^3 + r = 18$.

Matome, kad visais atvejais $2r^3 + r$ dalijasi iš 3, todėl nėra nė vieno natūraliojo skaičiaus n, kad $a_n = 14n^3 + 9n^2 + n$ nesidalytų iš 3.

Ats.: nėra.

9. Nustatykite, kokias reikšmes gali įgyti skaičiaus $a = 3xy(x^4 - y^4)$ dalybos iš 5 liekana, jei *x* ir *y* yra didesni už 4 natūralieji skaičiai ir $x > y$.

Sprendimas. Jei x arba y dalijasi iš 5, tai $r(a) = 0$.

Tarkime, kad nei x, nei y nesidalija iš 5 ir

$$x = 5m + r_1, \qquad y = 5k + r_2, \qquad r_1, r_2 \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Sudarykime skaičiaus x^4 dalybos iš 5 liekanų aibę. Kadangi $x^4 = (5m + r_1)^4,\ r_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$, tai $r(x^4) = (r_1)^4,\ r_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$. Visais atvejais $r(x^4) = 1$. Aišku, kad y^4 dalybos iš 5 liekana (kai $r_2 \neq 0$) taip pat lygi 1, bet $r(-y^4) = 4$.

Vadinasi, $r(a) = r(3xy(x^4 - y^4)) = r(3xy(x^4 + (-y^4))) = r(3xy(1 + 4)) = 0$. Kitaip sakant, skaičius a dalijasi iš 5, jei x ir y yra didesni už 4 natūralieji skaičiai ir $x > y$.

Ats.: $r(a) = 0$.

10. Įrodykite, kad nėra tokio natūraliojo skaičiaus *n*, kad jo kvadrato n^2 paskutiniai du skaitmenys būtų 75.

Sprendimas. Aišku, kad prasminga nagrinėti tik tuos natūraliuosius skaičius, kurių vienetų skaitmuo yra 5. Tegu $n = 10m + 5,\ m = 0, 1, 2, \ldots$. Tada $n^2 = (10m + 5)^2 = 100m^2 + 100m + 25 = 100 \cdot (m^2 + m) + 25$.

Matome, kad skaičiaus n^2 dalybos iš 100 liekana yra 25. O tai ir reiškia, kad paskutiniai du skaičiaus n^2 skaitmenys negali būti 75.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
1,5 kg	$x_n = \dfrac{2^n(3+n)}{4}$	22,5	3