Atranka į 2023 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

Pirmoji diena, 2023-05-05

1. Mikas užrašė baigtinę sveikųjų skaičių seką $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Čia $n \geqslant 1$, $a_n = 0$, o sekos pirmieji n narių yra didesni už 1. Kiekvieną narį a_{i+1}, kai $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, Mikas iš eilės gavo, iš skaičiaus a_i atėmęs skaičiaus a_i mažiausią pirminį daliklį. Kiekvienam skaičiui $k \in \mathbb{N}$ visų galimų skaičiaus a_0 reikšmių, kai $n = k$, aibę pažymėkime $M(k)$.
   a) Nustatykite visus aibės $M(386)$ elementus.
   b) Įrodykite, kad egzistuoja toks $k \in \mathbb{N}$, kuriam aibėje $M(k)$ yra lygiai 10 elementų.

2. Realieji skaičiai x, y, z tenkina sąlygas $0 \leqslant x < \frac{2z}{3}$, $0 \leqslant y < \frac{3}{2}$ ir
$$z^2 + y^2 = 1 + x^2 = (z-x)^2 + (1-y)^2.$$
   a) Raskite bent vieną galimą skaičiaus z reikšmę.
   b) Raskite didžiausią galimą skaičiaus z reikšmę.

3. Trikampio ABC kraštinėse AC ir BC atitinkamai pažymėti tokie taškai D ir E, kad $CD = CE$. Trikampio ABC pusiaukampinė iš A kerta atkarpą DE taške P. Tiesės AB ir DE kertasi taške F (taškas B yra tarp A ir F). Įrodykite: $AF \cdot BF + CP^2 = CF^2$ tada ir tik tada, kai $AD \cdot BE = DP^2$.

Atranka į 2023 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

Antroji diena, 2023-05-06

4. Apskritimas, einantis per trikampio ABC kraštinės AC vidurio tašką M ir liečiantis tiesę BC taške B, kerta atkarpą AB jos vidaus taške P. Įrodykite, kad $AB \cdot BP = 2BM^2$.

5. Duotas natūralusis skaičius n. Auksė ir Baltrus žaidžia tokį žaidimą, pakaitomis atlikdami ėjimus. Ėjimo metu žaidėjas turi pasirinkti bet kurį iš skaičių 1, 2, 3, 4, 5 ir užrašyti jį lentoje. Pirmąjį ėjimą atlieka Auksė. Žaidimas baigiamas, abiem žaidėjams atlikus iš viso n ėjimų. Jei užrašytųjų n skaičių suma dalijasi iš 9, tai laimi Baltrus; priešingu atveju laimi Auksė. Nustatykite visas skaičiaus n reikšmes, kurioms Auksė turi pergalės strategiją.

6. Kiekvienam natūraliajam n visų teigiamų racionaliųjų skaičių x, išskyrus natūraliuosius skaičius, n-tųjų laipsnių x^n aibę pažymėkime A_n. Taigi $A_n = \{x^n \ : \ x > 0,\, x \in \mathbb{Q},\, x \notin \mathbb{N}\}$.
   a) Įrodykite, kad kiekvienam nelyginiam $n \geqslant 3$ yra be galo daug sveikųjų skaičių, kuriuos galima užrašyti dviejų skirtingų aibės A_n elementų suma.
   b) Nustatykite, ar egzistuoja sveikasis skaičius, kurį galima užrašyti tiek dviejų skirtingų aibės A_3 elementų suma, tiek dviejų skirtingų sveikųjų skaičių kubų suma.