Atranka į 2023 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

Sprendimai

Artūras Dubickas ir Aivaras Novikas

1. Mikas užrašė baigtinę sveikųjų skaičių seką $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Čia $n \geqslant 1$, $a_n = 0$, o sekos pirmieji n narių yra didesni už 1. Kiekvieną narį a_{i+1}, kai $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, Mikas iš eilės gavo, iš skaičiaus a_i atėmęs skaičiaus a_i mažiausią pirminį daliklį. Kiekvienam skaičiui $k \in \mathbb{N}$ visų galimų skaičiaus a_0 reikšmių, kai $n = k$, aibę pažymėkime $M(k)$.
   a) Nustatykite visus aibės $M(386)$ elementus.
   b) Įrodykite, kad egzistuoja toks $k \in \mathbb{N}$, kuriam aibėje $M(k)$ yra lygiai 10 elementų.

Sprendimas. Nagrinėkime bet kokį skaičių $a \in \mathbb{N}$, didesnį už 1, ir jo mažiausią pirminį daliklį p. Pastebėkime, kad jų skirtumas $a - p$ visada yra lyginis: arba skaičius a lyginis ir tada $p = 2$, arba skaičius a nelyginis ir tada skaičius p nelyginis. Pradėkime nuo skaičiaus a ir konstruokime skaičių seką, kaskart iš paskutinio gauto jos nario atimdami to nario mažiausią pirminį daliklį. Taip gausime vienintelę seką $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, kurioje $a_0 = a$ ir kuri tenkina uždavinio sąlygą:

$$a_0 = a, \qquad a_1 = a - p \text{ (lyginis skaičius) ir, jei } a_1 > 0, \text{ tai}$$

$$a_2 = a - p - 2 \text{ (lyginis skaičius)}, \quad a_3 = a - p - 2 - 2 \text{ (lyginis skaičius)},$$

$$\dots, \qquad a_n = a - p - 2 - 2 - \dots - 2 - 2 = 0.$$

Čia $a_n = a - p - 2(n-1)$ ir

$$a - p = 2(n-1).$$

Vadinasi, skaičius a priklauso lygiai vienai aibei $M(k)$, o reikiamas k randamas pagal formulę $a - p = 2(k-1)$.

a) Tarkime, kad $a \in M(386)$. Tada $a - p = 2 \cdot 385$. Skaičius a dalijasi iš p, todėl ir $a - p = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ dalijasi iš p. Taigi $p = 2$, 5, 7 arba 11 bei atitinkamai $a = 772$, 775, 777 arba 781. Reikšmę $a = 777$ turime atmesti, nes ji dalijasi iš 3, tad $p = 7$ nėra mažiausias pirminis jos daliklis. Likusios reikšmės $a = 772$, 775, 781 tinka, nes jų mažiausias pirminis daliklis iš tiesų atitinkamai lygus $p = 2$, 5 ir 11 ir visais trimis atvejais turime $a - p = 2 \cdot 385$. Vadinasi, $M(386) = \{772, 775, 781\}$.

b) Imkime, pavyzdžiui,

$$k = k_0 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 + 1.$$

Čia $3, 5, 7, \ldots, 29$ yra devyni mažiausi nelyginiai pirminiai skaičiai. Lygybė $a - p = 2(k_0 - 1)$ parodo, kad jei $a \in M(k_0)$, tai skaičiaus a mažiausias pirminis daliklis p dalija skačių $2(k_0 - 1)$. Taigi tinkamos gali būti tik 10 reikšmių

$$a = p + 2(k_0 - 1) = p + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29,$$

kur $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. Jos visos tinka, nes kiekviena iš jų dalijasi iš atitinkamo p, bet nesidalija jokio pirminio skaičiaus, kuris priklauso aibei $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\} \setminus \{p\}$. Vadinasi, kiekvienas toks p tikrai yra mažiausias atitinkamo a pirminis daliklis ir tenkina lygybę $a - p = 2(k_0 - 1)$. Visos 10 skirtingų skaičiaus a reikšmių sudaro aibę $M(k_0)$.

Atsakymas: a) $M(386) = \{772, 775, 781\}$.

2. Realieji skaičiai x, y, z tenkina sąlygas $0 \leqslant x < \frac{2z}{3}$, $0 \leqslant y < \frac{3}{2}$ ir

$$z^2 + y^2 = 1 + x^2 = (z - x)^2 + (1 - y)^2.$$

a) Raskite bent vieną galimą skaičiaus z reikšmę.
b) Raskite didžiausią galimą skaičiaus z reikšmę.

Sprendimas. a) Pavyzdžiui, imkime porą $(x, y) = (0, \frac{1}{2})$. Tada duotosios nelygybės galioja su kiekvienu $z > 0$, o duotąsias lygybes galima užrašyti pavidalu $z^2 + \frac{1}{4} = 1 = z^2 + \frac{1}{4}$. Vadinasi, tinka reikšmė $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Akivaizdu, kad $z > 0$. Kadangi

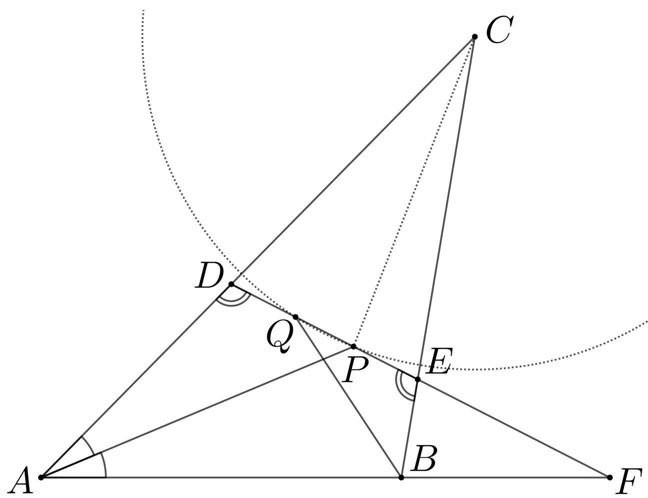
$$(z - x)^2 + (1 - y)^2 = z^2 + x^2 + 1 + y^2 - 2zx - 2y,$$

tai $z^2 + y^2 = 2zx + 2y$. Iš pastarosios lygybės ir $2y \geqslant y^2$ išplaukia, kad $z^2 \geqslant 2zx$. Vadinasi, $x \leqslant \frac{z}{2}$. Taigi $z^2 \leqslant z^2 + y^2 = 1 + x^2 \leqslant 1 + \frac{z^2}{4}$, $z^2 \leqslant \frac{4}{3}$ ir $z \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Kita vertus, $z = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ kartu su $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $y = 0$ tenkina uždavinio sąlygą, nes $\frac{4}{3} + 0^2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + 1$, $0 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}$ bei $0 \leqslant 0 < \frac{3}{2}$.

Atsakymas: b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. Trikampio ABC kraštinėse AC ir BC atitinkamai pažymėti tokie taškai D ir E, kad $CD = CE$. Trikampio ABC pusiaukampinė iš A kerta atkarpą DE taške P. Tiesės AB ir DE kertasi taške F (taškas B yra tarp A ir F). Įrodykite: $AF \cdot BF + CP^2 = CF^2$ tada ir tik tada, kai $AD \cdot BE = DP^2$.

Sprendimas. Atkarpoje DE pažymėkime tokį tašką Q, kad $EQ = DP$ (žr. pav.). Taškai P ir Q simetriški atkarpos DE vidurio taško atžvilgiu.



Be to, $CD = CE$, taigi dėl simetrijos apskritimas su centru C ir spinduliu CP eina per Q (jei $Q = P$, tai jis liečia atkarpą DE jos vidurio taške). Taško F laipsnis šio apskritimo atžvilgiu lygus $CF^2 - CP^2$ ir tuo pat metu $FP \cdot FQ$. Iš eilės gauname tokių teiginių ekvivalentumą:

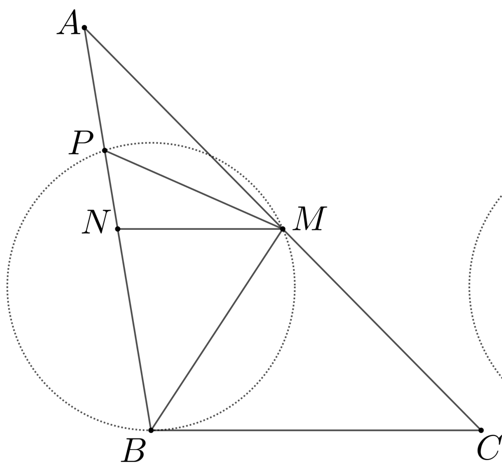
1) $AF \cdot BF + CP^2 = CF^2$;
2) $FP \cdot FQ = FA \cdot FB$;
3) taškai A, B, P, Q priklauso vienam apskritimui;
4) $\angle BQP = \angle BAP$;
5) $\angle BQE = \angle PAD$;
6) $\triangle BQE \sim \triangle PAD$ (atsižvelgiant į $\angle ADP = \angle QEB$);
7) $\frac{AD}{PD} = \frac{QE}{BE}$ (atsižvelgiant į $\angle ADP = \angle QEB$);
8) $AD \cdot BE = DP^2$.

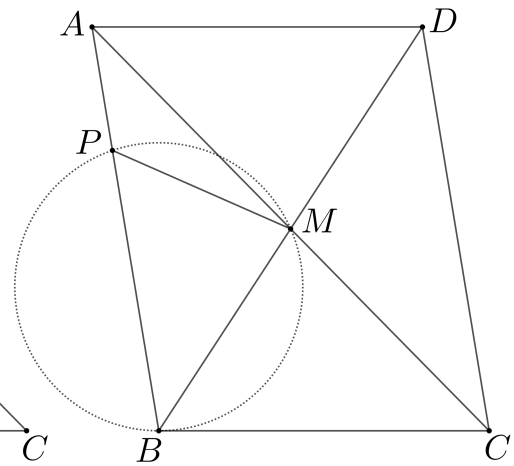
Vadinasi, teiginiai 1) ir 8) ekvivalentūs. Tai ir reikėjo įrodyti.

4. Apskritimas, einantis per trikampio ABC kraštinės AC vidurio tašką M ir liečiantis tiesę BC taške B, kerta atkarpą AB jos vidaus taške P. Įrodykite, kad $AB \cdot BP = 2BM^2$.

Pirmas sprendimas. Išveskime trikampio ABC vidurio liniją MN, lygiagrečią su kraštine BC (žr. pav. kairėje). Tada $\angle BMN = \angle CBM$ (priešiniai kampai) $= \angle BPM$ (apskritimo liestinė BC). Taip gauname $\triangle BMN \sim \triangle BPM$ (pagal du kampus) ir

$$\frac{BN}{BM} = \frac{BM}{BP}, \qquad 2BN \cdot BP = 2BM^2, \qquad AB \cdot BP = 2BM^2.$$





Antras sprendimas. Pažymėkime tokį tašką D, kuriam keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis (žr. pav. dešinėje). Jo įstrižainės AC vidurio taškas M dalija pusiau ir įstrižainę BD. Lygybę $AB \cdot BP = 2BM^2$ galima perrašyti pavidalu $BA \cdot BP = BM \cdot BD$. Taigi pakanka įrodyti, kad taškai A, P, M, D priklauso vienam apskritimui. Tai išplaukia iš kampų:

$$\angle ADM = \angle ADB = \angle CBD \text{ (priešiniai kampai) } =$$

$$= \angle BPM \text{ (apskritimo liestinė } BC) = 180^\circ - \angle APM.$$

5. Duotas natūralusis skaičius n. Auksė ir Baltrus žaidžia tokį žaidimą, pakaitomis atlikdami ėjimus. Ėjimo metu žaidėjas turi pasirinkti bet kurį iš skaičių 1, 2, 3, 4, 5 ir užrašyti jį lentoje. Pirmąjį ėjimą atlieka Auksė. Žaidimas baigiamas, abiem žaidėjams atlikus iš viso n ėjimų. Jei užrašytųjų n skaičių suma dalijasi iš 9, tai laimi Baltrus; priešingu atveju laimi Auksė. Nustatykite visas skaičiaus n reikšmes, kurioms Auksė turi pergalės strategiją.

Sprendimas. Skaičiaus n dalybos iš 6 dalmenį ir liekaną atitinkamai pažymėkime q ir r. Čia $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ir $n = 6q + r$.

Tarkime, kad skaičius n nelyginis, t. y. $r = 1$, 3 arba 5. Tada paskutinį ėjimą atlieka Auksė. Ji gali laikytis tokios strategijos: iki paskutinio ėjimo Auksė skaičius renkasi bet kaip; paskutinio ėjimo metu ji pasirenka skaičių 1, jei užrašytųjų skaičių suma tuo metu dalijasi iš 3, ir pasirenka skaičių 3 priešingu atveju. Tada pasibaigus žaidimui užrašytųjų skaičių suma nesidalys iš 3 nei tuo labiau iš 9, o Auksė laimės.

Tarkime, kad $r = 2$ arba 4. Tada paskutinį ėjimą atlieka Baltrus. Auksė gali laikytis tokios strategijos: pirmojo ėjimo metu ji pasirenka skaičių 3; toliau kaskart Baltrui pasirinkus skaičių a, Auksė kitu ėjimu pasirenka skaičių $6 - a$. Prieš paskutinį Baltraus ėjimą bus atliktas pirmasis Auksės ėjimas ir dar $\frac{n-2}{2}$ ėjimų porų, tad skaičių suma tuo metu bus $3 + \frac{n-2}{2} \cdot 6 = 3n - 3 = 18q + 3r - 3$. Jei $r = 2$, tai Baltrui užbaigus žaidimą užrašytųjų skaičių suma bus vienas iš 5 skaičių $18q+4$, $18q + 5$, $18q + 6$, $18q + 7$, $18q + 8$. O jei $r = 4$, tai 5 galimos sumos lygios $18q+10$, $18q+11$, $18q+12$, $18q+13$, $18q+14$. Jokiu iš 10 atvejų užrašytųjų skaičių suma nesidalys iš 9, taigi Auksė laimės.

Tarkime, kad $r = 0$. Tada paskutinį ėjimą atlieka Baltrus. Jis gali laikytis tokios strategijos: kaskart Auksei pasirinkus skaičių a, Baltrus kitu ėjimu pasirenka skaičių $6-a$. Pasibaigus žaidimui užrašytųjų skaičių suma bus lygi $\frac{n}{2} \cdot 6 = 3n = 18q$ ir dalysis iš 9, o Auksė garantuotai pralaimės.

Vadinasi, Auksė turi pergalės strategiją tada ir tik tada, kai n nesidalija iš 6.

Atsakymas: visi natūralieji skaičiai, nedalūs iš 6.

6. Kiekvienam natūraliajam n visų teigiamų racionaliųjų skaičių x, išskyrus natūraliuosius skaičius, n-tųjų laipsnių x^n aibę pažymėkime A_n. Taigi $A_n = \{x^n \ : \ x > 0, x \in \mathbb{Q}, x \notin \mathbb{N}\}$.
   a) Įrodykite, kad kiekvienam nelyginiam $n \geqslant 3$ yra be galo daug sveikųjų skaičių, kuriuos galima užrašyti dviejų skirtingų aibės A_n elementų suma.
   b) Nustatykite, ar egzistuoja sveikasis skaičius, kurį galima užrašyti tiek dviejų skirtingų aibės A_3 elementų suma, tiek dviejų skirtingų sveikųjų skaičių kubų suma.

Sprendimas. Imkime du teigiamus racionaliuosius skaičius
$$x = 2^m - \frac{1}{2} \quad \text{ir} \quad y = 2^m + \frac{1}{2},$$
kur $m \in \mathbb{N}$. Čia $x, y \notin \mathbb{N}$, taigi $x^n, y^n \in A_n$. Kadangi $n \geqslant 3$ yra nelyginis, tai
$$x^n + y^n = \left(2^m - \frac{1}{2}\right)^n + \left(2^m + \frac{1}{2}\right)^n = 2\sum_{k=0}^{(n-1)/2} C_n^{2k}\, 2^{m(n-2k)} 2^{-2k}.$$
Su kiekvienu natūraliuoju $m \geqslant n-2$ ši suma yra sveikasis skaičius, nes $2k \leqslant n-1$ ir todėl kiekvienas dvejeto laipsnis $2 \cdot 2^{m(n-2k)} 2^{-2k}$ turi neneigiamą rodiklį:
$$1 + m(n-2k) - 2k \geqslant 1 + m(n-(n-1)) - (n-1) = m - n + 2 \geqslant 0.$$
Be to, kai m prabėga aibę $\{n-2, n-1, n, \dots\}$, tai suma $x^n + y^n$ didėja ir įgyja be galo daug skirtingų sveikųjų reikšmių. Vadinasi, sveikųjų skaičių, išreiškiamų dviejų skirtingų aibės A_n elementų suma, yra be galo daug. Tai įrodo a) dalį.

Atskiru atveju imkime $n = 3$ ir $m = 1$. Gauname
$$\left(2 - \frac{1}{2}\right)^3 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} + \frac{125}{8} = \frac{152}{8} = 19.$$
Kita vertus, $19 = 3^3 + (-2)^3$. Vadinasi, skaičius 19 yra ir dviejų skirtingų aibės A_3 elementų suma, ir dviejų skirtingų sveikųjų skaičių, 3 ir -2, kubų suma.

Atsakymas: b) egzistuoja; pavyzdžiui, skaičius 19.