LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

V. TRIGONOMETRIJA GEOMETRIJOS UŽDAVINIUOSE

(2022–2024)

Teorinę medžiagą parengė ir penktąją užduotį sudarė VU docentas Edmundas Mazėtis

Šiame darbe Jūs giliau susipažinsite su trigonometrijos taikymais geometrijoje, pakartosite žinomas trigonometrijos formules ir teoremas.

Priminsime geometrijos pamokose įrodytas sinusų ir kosinusų teoremas.

1 teorema (kosinusų teorema). Trikampio kraštinės kvadratas lygus kitų trikampio kraštinių kvadratų sumos ir dvigubos tų kraštinių sandaugos, padaugintos iš kampo tarp jų kosinuso, skirtumui:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos\angle C,$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B,$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A.$$

2 teorema (sinusų teorema). Trikampio kraštinės ir prieš ją esančio kampo sinuso santykis yra lygus apibrėžto apie trikampį apskritimo skersmeniui:

$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{BC}{\sin\angle A} = 2R.$$

3 teorema (trikampio ploto formulė). Trikampio plotas lygus dviejų trikampio kraštinių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei:

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin\angle A = \frac{1}{2}AC \cdot CB \sin\angle C = \frac{1}{2}AB \cdot BC\ sin\angle B$$

Pateiksime keletą šių teoremų taikymo geometrijos uždavinių sprendime pavyzdžių.

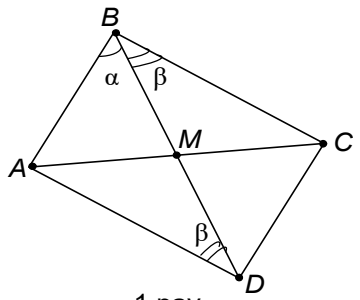
1 pavyzdys. Atkarpa BM yra trikampio ABC pusiaukraštinė, jos ilgis lygus m, ji su kraštinėmis BA ir BC sudaro kampus lygius α ir β. Rasime kraštinės AB ilgį.

Sprendimas. Pusiaukraštinės BM tęsinyje už taško M atidedame atkarpą $MD = BM$ (1 pav.). Kadangi keturkampio $ABCD$ įstrižainės AC ir BD susikirsdamos taške M dalijasi pusiau, tai šis keturkampis yra lygiagretainis, todėl $\angle ADB = \angle DBC = \beta$, o $\angle BAD = 180^0 - \angle ABC = 180^0 - (\alpha + \beta)$. Trikampiui ABD pritaikę sinusų teoremą gauname, kad $\frac{AB}{\sin\angle ADB} = \frac{BD}{\sin\angle BAD}$. Iš čia $AB = \frac{2m\sin\beta}{\sin(180^0-(\alpha+\beta))} = \frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

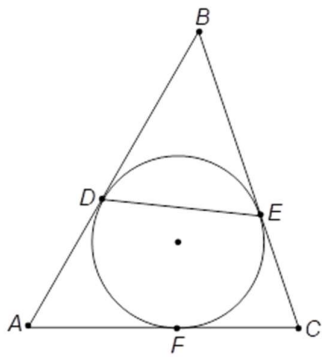
2 pavyzdys. Trikampio ABC kampo A didumas lygus 60^0, įbrėžtas į trikampį apskritimas liečia kraštines AB, BC, AC atitinkamai taškuose D, E, F, $AF = 3$, $FC = 2$ (2 pav.). Rasime atkarpos DE ilgį.

Sprendimas. Pagal apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško, savybes turime, kad $AD = AF = 3$, $CF = CE = 2$. Sakykime, kad $DB = BE = a$, $DE = x$. Taikydami kosinusų teoremą trikampiui ABC, gauname, kad $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A$, iš čia $(a+2)^2 = (3+a)^2 + 5^2 -$

$2(a+3)\cdot 5\cdot\frac{1}{2}$. Atlikę veiksmus gauname, kad $a^2+4a+4=9+6a+a^2+25-5a-15$, t. y. $a=5$. Taikydami kosinusų teoremą trikampiui ABC rasime kampo B kosinusą: $\cos\angle B=\frac{BA^2+B\ \ ^2-AC^2}{2\cdot BA\cdot BC}=\frac{(3+5)^2+(5+2)^2-5^2}{2\cdot(3+5)\cdot(5+2)}=\frac{11}{14}$. Dabar iš kosinusų teoremos trikampiui BED randame $ED^2=BE^2+BD^2-2BE\cdot BD\cos\angle B=5^2+5^2-2\cdot 5\cdot 5\cdot\frac{11}{14}=\frac{75}{7}$, taigi $ED=5\sqrt{\frac{3}{7}}$.



1 pav.

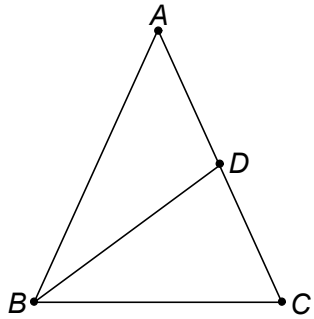


2 pav.

3 pavyzdys. Lygiašonio trikampio pagrindo ilgis yra a, kampas prie pagrindo lygus α. Rasime pusiaukraštinės, nubrėžtos į šoninę kraštinę, ilgį.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas D yra lygiašonio trikampio $ABC, AB=AC$ šoninės kraštinės AC vidurio taškas. (3 pav.). Kadangi $\angle BAC=180^0-2\alpha$, tai iš sinusų teoremos trikampiui ABC turime, kad $\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$, todėl $AB=\frac{a\sin\alpha}{\sin(180^0-2\alpha)}=\frac{a\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{a}{2\cos}$. Todėl $CD=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{4\cos\alpha}$. Trikampiui BCD pritaikę kosinusų teoremą gauname, kad $BD^2=BC^2+CD^2-2\cdot BC\cdot CD\cos\angle ACB=a^2+\left(\frac{a}{4\cos\alpha}\right)^2-2a\cdot\frac{a}{4\cos\alpha}.\cos\alpha=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{16cos^2\alpha}=\frac{a^2(8cos^2\alpha+1)}{16cos^2\alpha}$.

Taigi $BD=\frac{a}{4\cos\alpha}\sqrt{8cos^2\alpha+1}$.

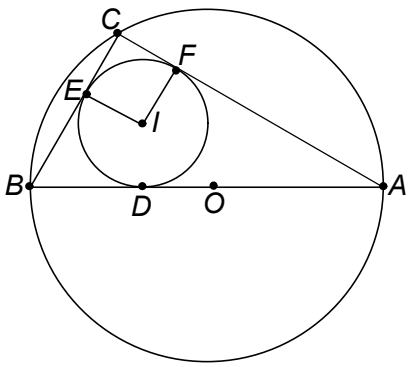


3 pav.

Dažnai geometrijos uždaviniuose reikia naudoti atvirkštines trigonometrines funkcijas, jų savybes. Priminkime, kad skaičiaus x, $|x|\le 1$ *arksinusu* yra vadinamas kampas iš intervalo $[-90^0;\ 90^0]$, kurio sinusas lygus x; taigi pagal apibrėžimą $\sin(\arcsin x)=x$, jei $|x|\le 1$. Analogiškai skaičiaus $x, |x|\le 1$ *arkkosinusas* yra kampas, priklausantis intervalui $[0^0;\ 180^0]$, kurio kosinusas lygus x, t. y. $\cos(\arccos x)=x$, jei $|x|\le 1$. Be to, visiems x, $|x|\le 1$ yra teisinga lygybė $\arcsin x+\arccos x=90^0$. Lygiai taip pat realiojo skaičiaus x *arktangentu* vadinamas toks kampas iš intervalo $(-90^0;\ 90^0)$, kurio tangentas lygus x; tuomet visiems x yra teisinga lygybė $tg(arctg\ x)=x$.

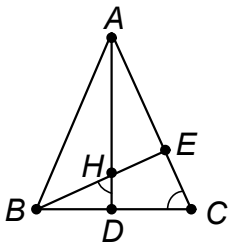
4 pavyzdys. Apibrėžto apie statųjį trikampį apskritimo spindulio ir įbrėžto į šį trikampį apskritimo spindulio santykis lygus $5:2$. Rasime trikampio smailiuosius kampus.

Sprendimas. Sakykime, kad stačiojo trikampio $ABC, \angle C = 90^0, AB = c,\ BC = a,\ AC = b,\ \angle BAC = x.$ Apibrėžto apie statųjį trikampį apskritimo spindulys lygus įžambinės pusei, taigi $R = \frac{c}{2}$. Įbrėžto į statųjį trikampį apskritimo spindulio ilgis $r = \frac{a+b-c}{2}$ (4 pav. $r = CE = CF, AD = AF,\ BD = BE,\ 2r + 2AF + 2BF = a + b + c,\ 2r + 2c = a + b + c,\ 2r = a + b - c$). Pagal sąlygą $\frac{c}{2} : \frac{a+b-c}{2} = \frac{5}{2}$. Perrašome šią lygtį taip: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{2}{5}$, t. y. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1 = \frac{2}{5}$. Kadangi $\frac{a}{c} = \sin x,\ \ \frac{b}{c} = \cos x$, tai gauname, kad stačiojo trikampio smailusis kampas x yra trigonometrinės lygties $\sin x + \cos x = \frac{7}{5}$ sprendinys. Kadangi abi lygties pusės yra teigiamos, tai šią lygtį galima spręsti keliant abi puses kvadratu: $sin^2x + 2\sin x\cos x + cos^2x = \frac{49}{25}$. Kadangi $sin^2x + cos^2x = 1$, o $2\sin x\cos x = \sin 2x$, tai gautoji lygtis tampa tokia $\sin 2x = \frac{24}{25}$. Taigi $2x = \arcsin\frac{24}{25}$. $x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}$. Taigi $\angle BAC = \frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}$, $\angle ABC = 90^0 - \frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}$.



4 pav.

5 pavyzdys. Smailiojo lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo lygus α. Rasime, kokiu santykiu, skaičiuojant nuo trikampio viršūnės, aukštinių sankirtos taškas dalija į šoninę kraštinę nubrėžtą trikampio aukštinę.



5 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad lygiašonio trikampio ABC kampai prie pagrindo $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$, aukštinės AD ir BE susikerta taške H (5 pav.). Kadangi $\angle ACB = 90^0 - \angle EBC = 90^0 - \angle HBD = \angle BHD$, tai $\angle BHD = \angle ACB = \alpha$, todėl iš stačiojo trikampio BHD randame, kad $BH = \frac{BD}{\sin\angle BHD} = \frac{\frac{BC}{2}}{\sin\alpha} = \frac{BC}{2\sin\alpha}$. Iš stačiojo trikampio BEC randame $BE = BC\sin\alpha$, taigi $HE = BE - BH = BC(\sin\alpha - \frac{1}{2\sin\alpha}) = \frac{BC(2sin^2\alpha - 1)}{2\sin\alpha}$. Kadangi $sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, tai $HE = BC\frac{1-\cos 2\alpha - 1}{2\sin\alpha} = -\frac{BC\cos 2\alpha}{2\sin\alpha}$. Iš čia randame ieškomąjį santykį $\frac{BH}{HE} = \frac{BC}{2\sin\alpha} : \left(-\frac{BC\cos 2\alpha}{2\sin\alpha}\right) = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$. Pastebėkime, kad minuso ženklas nereiškia, kad atkarpų santykis yra neigiamas skaičius – kadangi pagal sąlygą trikampis yra smailusis, tai kampas α yra didesnis už 45^0, taigi 2α yra bukasis kampas, kurio kosinusas yra neigiamas.

Priminsime keletą trigonometrinių funkcijų tapatybių, kurios dažnai padeda ir geometrijoje. Visų pirma, tai sumos ir skirtumo trigonometrinės funkcijos, kurių atskiras variantas yra dvigubo kampo trigonometrinių funkcijų išraiškos.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,\quad \cos 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha,$$

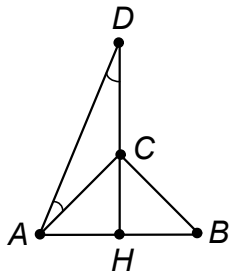
$$tg\ (\alpha \pm \beta) = \frac{tg\ \alpha \pm tg\ \beta}{1 \mp tg\alpha\ tg\ \beta},\quad tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$$

Taip pat dažnai naudojamos trigonometrinių funkcijų laipsnio žeminimo formulės

$$sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha),\quad cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

Matematikos pamokose išmokote rasti $30^0, 45^0, 60^0$ sinusus, kosinusus, tangentus. Taikant specialias geometrijos konstrukcijas galima rasti ir kai kurių kitų kampų trigonometrinių funkcijų reikšmes.

6 pavyzdys. Iš stačiojo lygiašonio trikampio ABC stačiojo kampo viršūnės C nubrėžta aukštinė pratęsiama už viršūnės C ir jos tęsinyje pažymėtas taškas D toks, kad atkarpa CD lygi trikampio statiniui. Taikydami šią konstrukciją rasime $22{,}5^0$ kampo trigonometrinių funkcijų reikšmes.



6 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad CH yra trikampio ABC aukštinė, $CD = AC = CB$ ir nubrėžkime atkarpą DA (6 pav). Kadangi $\angle HBC = 45^0$, tai $\angle DCA = 135^0$, todėl $\angle HDA = \angle CDA = \angle CAD = \frac{1}{2}(180^0 - \angle DCA) = 22{,}5^0$. Iš stačiojo trikampio ADH randame $tg\angle HDA = tg22{,}5^0 = \frac{AH}{HD}$. Jei stačiojo trikampio įžambinė $AB = c$, tai $AC = BC = CD = \frac{\sqrt{2}}{2}c$, $AH = HC = \frac{c}{2}$, $HD = HC + CD = \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}c$, todėl $tg22^0 = \frac{c}{2} : \frac{1+\sqrt{2}}{2}c = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$. Žinodami kampo tangento reikšmę, galime rasti ir jo sinuso bei kosinuso reikšmes. Tuo tikslu užrašome tokias lygybes: $tg^2x = \frac{sin^2x}{cos^2x} = \frac{sin^2x}{1-sin^2x}$, $tg^2x - tg^2x\, sin^2x = sin^2x$, $sin^2x(1 + tg^2x) = tg^2x$, taigi $sin^2x = \frac{tg^2x}{1+tg^2x}$. Analogiškai gauname formulę $cos^2x = \frac{1}{1+tg^2x}$. Iš šių lygybių seka, kad $sin^2\, 22{,}5^0 = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{1+(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4-2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right)$, $cos^2 22{,}5^0 = \frac{1}{4-2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left(2 + \sqrt{2}\right)$. Taigi $\sin 22{,}5^0 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos 22{,}5^0 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Atkarpa BM yra trikampio ABC pusiaukraštinė, ji su kraštinėmis BA ir BC sudaro kampus lygius α ir β. Raskite šios pusiaukraštinės ilgį, jei kraštinės BC ilgis lygus a.

2. Trikampio ABC kampo A didumas lygus 60^0, įbrėžtas į trikampį apskritimas liečia kraštines AB, BC, AC atitinkamai taškuose D, E, F, $AF = 5$, $FC = 3$. Raskite atkarpos EF ilgį.

3. Apie apskritimą, kurio spindulys lygus R, apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios smailusis kampas lygus α. Raskite trapecijos perimetrą.

4. Trikampyje ABC $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, kraštinėje AC yra taškas D toks, kad $\angle BDC = \gamma$. Raskite atkarpos BD ilgį.

5. Trikampio ABC kraštinės $AB = 8$, $AC = 10$, o jo plotas lygus 20. Raskite trečios trikampio kraštinės ilgį.

6. Stačiakampio $ABCD$ kraštinėse AD ir BC atitinkamai pažymėti taškai M ir N taip, kad keturkampis $AMNB$ yra kvadratas, kurio įstrižainė lygi stačiakampio ilgesniajai kraštinei, taškas E yra kraštinės BC vidurio taškas. Raskite kampą tarp tiesių BD ir AE.

7. Rombo perimetro ir įstrižainių ilgių sumos santykis lygus 3 :2. Raskite rombo kampus.

8. Lygiašonio trikampio ABC kampas prie viršūnės α yra bukasis, pagrindo BC ilgis lygus a, atkarpa BE yra aukštinė, nubrėžta į šoninę kraštinę. Raskite taško E atstumą iki trikampio ABC ortocentro (aukštinių sankirtos taško).

9. Atkarpa BD yra lygiakraščio trikampio ABC aukštinė, jos tęsinyje už taško B atidėta atkarpa BE lygi trikampio kraštinei. Naudodami šią konstrukciją, raskite 15^0 kampo sinuso, kosinuso ir tangento reikšmes.

10. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinėje BC yra taškas D ir $BD : DC = 2 : 1$. Raskite kampą ADB.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2023 m. spalio 25 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius.

Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA