

Organizuoja  
VILNIAUS UNIVERSITETO MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS  
Remia  
DANSKEBANK,  
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA,  
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

XXXVII LIETUVOS KOMANDINĖ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA  
PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI  
Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas 2023-10-07

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{x^2y + xy^2}{xy^2 + 2x + 2y} = \frac{3}{5}, \\ \frac{x^2y + xy^2}{x^2y + 2x + 2y} = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

2. Išspręskite lygtį

$$\left[\frac{x}{2}\right]^2 - 5x + \frac{2}{[x]} = 0,$$

čia  $[x]$  yra skaičiaus  $x$  sveikoji dalis.

3. Su kuriomis realiomis  $a$  reikšmėmis funkcija

$$f(x) = x^4 - 2ax^3 + (a^2 + a + 1)x^2 - 2ax + a^2$$

įgyja neneigiamas reikšmes visiems realiesiems  $x$ .

4. Raskite didžiausią ir mažiausią reiškinio

$$R = x + y + xy$$

reikšmes, kai  $x^2 + y^2 = 1$ .

5. Raskite visas neneigiamų sveikųjų skaičių  $m$  ir  $n$  poras  $(m; n)$  tokias, kad galiotų lygybė

$$(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n.$$

6. Skaičiai  $a, b, c$  yra trikampio kraštinių ilgiai, o skaičius  $2q$  yra nemažesnis už šio trikampio perimetrą. Įrodykite, kad trikampis yra lygiakraštis, jei galioja lygybės

$$\frac{ab - q^2}{c} = \frac{bc - q^2}{a} = \frac{ac - q^2}{b}.$$

7. a) Ar egzistuoja natūraliųjų skaičių seka  $a_1, a_2, a_3 \dots$  tokia, kad nė vienas narys iš jų nėra lygus prieš jį einančių (nebūtinai iš eilės) kokių nors narių sumai, t.y.  $a_n \neq a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_l}$ , čia  $k_i < n$ ?

b) Ar egzistuoja natūraliųjų skaičių seka  $a_1, a_2, a_3 \dots$  tokia, kad nė vienas narys iš jų nėra lygus prieš jį einančių (nebūtinai iš eilės) kokių nors narių sumai, t.y.  $a_n \neq a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_l}$ , čia  $k_i < n$  ir tenkina nelygybę  $a_n < 2(\sqrt{3})^n$ ?

8. Raskite visus natūraliuosius skaičius  $n$  tokius, kad skaičiaus  $2^n$  dešimtainėje sistemoje skaitmenų suma būtų lygi 5.

9. Ant lentos užrašytas kvadratinis trinaris  $P_1(x) = x^2 + 10x + 2023$ . Kiekviename žingsnyje kuris nors vienas (bet ne abu iš karto) iš koeficientų prie  $x$  arba laisvas koeficientas nutrinamas ir vietoje jo užrašomas koeficientas, padidintas arba sumažintas vienetu. Po tam tikro žingsnių skaičiaus gautas kvadratinis trinaris  $P_n(x) = x^2 + 2023x + 10$ . Ar būtinai atsiras toks žingsnis, kuriame užrašyto kvadratinio trinario šaknys bus sveikieji skaičiai?

10. Suma  $n$  skaičių yra lygi 0, o jų modulių suma yra lygi  $a$ . Įrodykite, kad didžiausiojo ir mažiausiojo skaičių skirtumas yra nemažesnis už  $2a/n$ .

11. Ratu bet kokia tvarka surašyti keturi vienetai ir penki nuliai. Atliekama tokia operacija: tarp vienodų skaitmenų yra įrašomas nulis, o tarp skirtingų – vienetas, po to seni skaitmenys, buvę prieš operaciją, nutrinami. Po to operacija daroma su naujai gautais devyniais skaitmenimis. Ar įmanoma po keletos šių operacijų gauti visus devynis nulius.

12. Išilgai kelio auga beržai ir klevai, iš viso du šimtai medžių. Yra žinome, kad tarp bet kokių dviejų beržų medžių skaičius yra nelygus šešiams (pvz., pirmas ir aštuntas medžiai negali būti abu beržai). Raskite didžiausią imanomą beržų skaičių.

13. Ant lentos yra užrašyta šimtas skirtingų sveikųjų skaičių. Jie poromis buvo sudauginti, kiekvienas skaičius su kiekvienu kitu skaičiumi. Lygiai 2450 sandaugų gavosi neigiamos. Kiek galėjo gautis teigiamų sandaugų?

14. Kiekvienas klasės mokinys lanko ne daugiau kaip du būrelius. Bet kokiai mokinių porai egzistuoja būrelis, kurį lanko abu mokiniai. Įrodykite, kad egzistuoja būrelis, kurį lanko ne mažiau kaip du trečdaliai klasės mokinių.

15. Yra  $n$  iš eilės einančių natūraliųjų skaičių nuo vieneto iki  $n$ . Du žaidėjai žaidžia tokį žaidimą: pirmas žaidėjas išsirenka kurį nors skaičių, po to antras žaidėjas išsirenka kokį nors kitą skaičių, po to vėl pirmas renkasi kokį nors dar neišrinktą skaičių ir t.t., t.y., žaidėjai vienas po kito išsirenka kokį nors iš likusių skaičių, kuris dar nebuvo išrinktas nei jo, nei jo priešininko. Pralaimi tas, po kurio ėjimo visų išrinktų skaičių suma dalijasi iš trijų. Kuris žaidėjas gali laimėti, pirmas ar antras, nepriklausomai nuo to, kaip bežaistų jo varžovas, kai a)  $n = 30$ , b)  $n = 45$ ?

16. Kvadrato  $ABCD$  kraštinės ilgis yra lygus vienetui. Kraštinėse  $AB$  ir  $AD$  atitinkamai paimti taškai  $P$  ir  $Q$  tokie, kad trikampio  $APQ$  perimetras yra lygus 2. Raskite kampą  $PCQ$ .

17. Tiesė  $l$  dalija trikampį į dvi figūras, kurių plotai yra lygūs, taip pat ir perimetrai yra lygūs. Įrodykite, kad įbrėžto į šį trikampį apskritimo centras priklauso tiesei  $l$ .

18. Trikampio  $ABC$  kraštinė  $AB$  yra apskritimo skersmuo. Šis apskritimas kerta trikampio kraštines  $AC$  ir  $BC$  taškuose  $M$  ir  $N$  atitinkamai. Raskite trikampio  $ABC$  kraštinių santykius, jei  $AM : MC = 3 : 2$  ir  $BN : NC = 1 : 1$ .

19. Į apskritimą su spinduliu 1 įbrėžiamas ketrukampis  $ABCD$ , kurio įstrižainė  $AC$  sutampa su skersmeniu, o  $BD = AB$ . Įstrižainės kertasi taške  $P$ . Raskite kraštinės  $CD$  ilgį, jei žinoma, kad  $PC = 2/5$ .

20. Duotas lygiašonis trikampis  $ABC$ ,  $AB = BC$  ir  $\angle B = 20^\circ$ . Taškas  $M$  yra atkarpoje  $AC$  toks, kad  $AM : MC = 1 : 2$ . Taškas  $H$  yra statmens iš taško  $C$  į atkarpą  $BM$  pagrindas. Raskite kampą  $AHB$ .