XXXVII LIETUVOS KOMANDINĖ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas 2023-10-07

Atsakymai ir sprendimai

Parengė Gintaras Puriuškis ir Dominykas Marma

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{x^2y+xy^2}{xy^2+2x+2y} = \frac{3}{5}, \\ \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2y+2x+2y} = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Ats.: $(1;2)$ ir $(-1;-2)$.
Sprendimas. Pastebėsime, kad $x \neq 0$ ir $y \neq 0$. Apverčiame abi sistemos lygtis

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2+2x+2y}{x^2y+xy^2} = \frac{5}{3}, \\ \dfrac{x^2y+2x+2y}{x^2y+xy^2} = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Iš pirmos lygties atimame antrą

$$\frac{xy^2-x^2y}{x^2y+xy^2} = \frac{1}{3}$$

arba

$$3xy^2 - 3x^2y = x^2y + xy^2 \Leftrightarrow 2xy^2 = 4x^2y.$$

Suprastinę iš $2xy \neq 0$ gauname $y = 2x$. Įsistatome šią reikšmę į pirmą lygtį ir suprastinę gauname $x^2 = 1$. Turime du sprendinius $(1;2)$ ir $(-1;-2)$.

2. Išspręskite lygtį

$$\left[\frac{x}{2}\right]^2 - 5x + \frac{2}{[x]} = 0,$$

čia $[x]$ yra skaičiaus x sveikoji dalis.

Ats.: $-0,2 : 20,02$.
Sprendimas. Tikriname intervalą $x \in [-1;0)$. $(-1)^2 - 5x - 2 = 0$. Randame pirmąjį sprendinį $x = -0,2$. Analogiškai patikrinę intervalus $[19, 20)$, $[20;21)$, $[21;22)$, $[22;23)$ $[23, 24)$ randame antrąjį sprendinį $x = 20,02$.

Įrodysime, kad daugiau sprendinių nėra. Kai $x \geq 24$, turime

$$\left[\frac{x}{2}\right]^2 - 5x + \frac{2}{[x]} > \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 - 5x = \frac{x^2-24x+4}{4} = \frac{x(x-24)+4}{4} \geq 0,$$

taigi kairė nelygybės pusė yra teigiama ir negali būti lygi nuliui, t.y. lygtis neturi sprendinių.

Kai $1 \leq x < 20$,

$$\left[\frac{x}{2}\right]^2 - 5x + \frac{2}{[x]} < \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 5x + 2 = \frac{x^2 - 20x + 8}{4} < 0,$$

kai $x \in (x_1; x_2)$, čia $x_1$ir x_2 yra lygties $x^2 - 20x + 8 = 0$ šaknys, o intervalas $[1; 19)$ priklauso intervalui $(x_1; x_2)$. Taigi, šiuo atveju sprendinių taip pat nėra.

Belieka atvejis $x < -1$.

$$\left[\frac{x}{2}\right]^2 - 5x + \frac{2}{[x]} > 5 + \frac{2}{[x]} > 5 - 2 = 3 > 0.$$

Taigi kairė nelygybės pusė yra teigiama ir negali būti lygi nuliui, t.y. lygtis neturi sprendinių. Belieka pastebėti, kad likęs intervalas $[0; 1)$ neįeina į apibrėžimo sritį. Įrodyta.

3. Su kuriomis realiomis a reikšmėmis funkcija

$$f(x) = x^4 - 2ax^3 + (a^2 + a + 1)x^2 - 2ax + a^2$$

įgyja neneigiamas reikšmes visiems realiesiems x.

Ats.: $a \geq 0$.

Sprendimas. Turime $f(a) = a^3 \geq 0$, taigi a negali būti neigiamas. Iš kitos pusės, jei $a \geq 0$, tai $f(x) = x^2(x-a)^2 + ax^2 + (x-a)^2 \geq 0$ visiems realiesiems x.

4. Raskite didžiausią ir mažiausią reiškinio

$$R = x + y + xy$$

reikšmes, kai $x^2 + y^2 = 1$.

Ats.: -1 ir $\sqrt{2} + 0,5$.

Sprendimas. Turime $R = (1+x)(1+y) - 1 \geq -1$, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, todėl mažiausia reikšmė yra lygi -1, kai $x = 0$, $y = -1$.

Toliau rasime didžiausią reikšmę, naudodami nelygybę $2xy \leq x^2 + y^2$.

$$(x+y)^2 = 1 + 2xy \leq 1 + x^2 + y^2 = 2,$$

todėl $x + y \leq \sqrt{2}$, $xy \leq 0,5$. Lygybės yra pasiekiamos, kai $x = y = 1/\sqrt{2}$.

5. Raskite visas neneigiamų sveikųjų skaičių m ir n poras $(m; n)$ tokias, kad galiotų lygybė

$$(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n.$$

Ats.:$(0; 0)$.

Sprendimas. Skaičių pora $(0; 0)$ tenkina lygybę. Įrodysime, kad daugiau tokių porų nėra. Pakėlę laipsniu, gauname

$$(5 + 3\sqrt{2})^m = a + b\sqrt{2}, \quad (3 + 5\sqrt{2})^n = c + d\sqrt{2},$$

čia a, b, c, d yra sveikieji skaičiai. Duota lygybė galios tada ir tik tada, kai $a = c$ ir $b = d$. Lygybė $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ yra ekvivalenti lygybei $a - b\sqrt{2} = c - d\sqrt{2}$, t.y. $(5 - 3\sqrt{2})^m = (3 - 5\sqrt{2})^n$. Tačiau pastaroji nelygybė yra neteisinga visiems teigiamiems skaičiams m ir n, kadangi $|5 - 3\sqrt{2}| < 1$ ir $|3 - 5\sqrt{2}| > 1$. Įrodyta.

6. Skaičiai a, b, c yra trikampio kraštinių ilgiai, o skaičius $2q$ yra nemažesnis už šio trikampio perimetrą. Įrodykite,kad trikampis yra lygiakraštis, jei galioja lygybės

$$\frac{ab-q^2}{c}=\frac{bc-q^2}{a}=\frac{ac-q^2}{b}.$$

Sprendimas. Iš pirmos lygybės turime

$$a^2b-aq^2=bc^2-cq^2 \Leftrightarrow b(a^2-c^2)=q^2(a-c).$$

Jei $a\neq c$, tai $b(a+c)=q^2$. Ši lygybė yra neteisinga, kadangi pagal aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę turime

$$b(a+c)<\Big(\frac{b+a+c}{2}\Big)^2\leq q^2,$$

čia nelygybė yra griežta, kadangi pagal trikampio savybes $b<a+c$. Taigi $a=c$. Analogiškai įrodome, kad $c=b$.

7. a) Ar egzistuoja natūraliųjų skaičių seka a_1, a_2, $a_3\ldots$ tokia, kad nė vienas narys iš jų nėra lygus prieš jį einančių (nebūtinai iš eilės) kokių nors narių sumai, t.y. $a_n\neq a_{k_1}+a_{k_2}+\ldots+a_{k_l}$, čia $k_i<n$?

b) Ar egzistuoja natūraliųjų skaičių seka a_1, a_2, $a_3\ldots$ tokia, kad nė vienas narys iš jų nėra lygus prieš jį einančių (nebūtinai iš eilės) kokių nors narių sumai, t.y. $a_n\neq a_{k_1}+a_{k_2}+\ldots+a_{k_l}$, čia $k_i<n$, ir tenkina nelygybę $a_n<2(\sqrt{3})^n$?

Ats.: Taip.

Sprendimas. a) Tokia seka yra $a_n=2^n$.

b) Tokia seka yra $2,\ 3,\ 8,\ 9,\ldots 3^n-1,\ 3^n,\ldots$ Įvertinsime sumą

$$2+3+8+9+\ldots 3^n-1+3^n<2(3+9+\ldots+3^n)=3^{n+1}-3<3^{n+1}-1,$$

todėl nė vienas narys iš jų negali būti lygus prieš jį einančių kokių nors narių sumai. Taip pat galioja nelygybė $a_n<3^{(n+1)/2}<2(\sqrt{3})^n$.

8. Raskite visus natūraliuosius skaičius n tokius, kad skaičiaus 2^n dešimtainėje sistemoje skaitmenų suma būtų lygi 5.

Ats.: 5.

Sprendimas. Patikriname visus skaičius iki $n=10$ ir randame $n=5$. Įrodysime, kad daugiau tokių skaičių nėra, kai $n>10$. Pastebėsime, kad n-ženklis skaičius dalijasi iš 2^k, $n\geq k$, jei skaičius, sudarytas iš paskutinių k skaitmenų, dalijasi iš 2^k. 2^n gali baigtis tik skaitmenymis 2, 4, 6, 8. Jei 2^n baigiasi ketvertu ir jo skaitmenų suma yra 5, tai $2^n=10^k+4$ nesidalija iš 8. Čia $k>3$, kai $n>10$. Taigi 2^n gali baigtis tik dvejetu ir jo paskutiniai trys skaitmenys turi būti 112. Priešingu atveju 2^n nesidalins iš 8. Toliau patikriname, kad skaičius 10112 nėra dvejeto laipsnis, o skaičiai besibaigiantys 00112 nesidalija iš 32.

9. Ant lentos užrašytas kvadratinis trinaris $P_1(x)=x^2+10x+2023$. Kiekviename žingsnyje kuris nors vienas (bet ne abu iš karto) iš koeficientų prie x arba laisvas koeficientas nutrinamas ir vietoje jo užrašomas koeficientas, padidintas arba sumažintas vienetu. Po tam tikro žingsnių skaičiaus gautas kvadratinis trinaris

$P_n(x) = x^2+2023x+10$. Ar būtinai atsiras toks žingsnis, kuriame užrašyto kvadratinio trinario šaknys bus sveikieji skaičiai?

Ats.:Taip.

Sprendimas. Pastebėsime, kad atliekant bet kurį žingsnį, kvadratinio trinario reikšmė taške -1 yra padidinama arba sumažinama vienetu. $P_1(-1) = 2014 > 0$, $P_n(-1) = -2012 < 0$, todėl egzistuoja toks žingsnis, kuriame kvadratinis trinaris yra $P_k(x) = x^2 + px + q$, čia p, q yra sveikieji skaičiai, $P_k(-1) = 0$. Pagal Vijeto teoremą antroji šaknis lygi $-q$. Taigi, abi šaknys -1 ir $-q$ yra sveikieji skaičiai.

10. n skaičių suma yra lygi 0, o jų modulių suma yra lygi a. Įrodykite, kad didžiausiojo ir mažiausiojo skaičių skirtumas yra nemažesnis už $2a/n$.

Sprendimas. Tarkime,kad

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k \leq 0 \leq x_{k+1} \leq \ldots \leq x_n.$$

Tada $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| = x_{k+1} + \ldots + x_n = a/2$. Įvertiname skirtumą

$$x_n - x_1 = \frac{(n-k)x_n}{n-k} - \frac{kx_1}{k} \geq \frac{x_{k+1} + \ldots + x_n}{n-k} + \frac{|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k|}{k} =$$

$$\frac{a}{2}\Big(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\Big) = \frac{an}{2k(n-k)} \geq 2a/n,$$

kadangi $k(n-k) \leq (k+n-k)^2/4$ pagal aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę.

11. Ratu bet kokia tvarka surašyti keturi vienetai ir penki nuliai. Atliekama tokia operacija: tarp vienodų skaitmenų yra įrašomas nulis, o tarp skirtingų – vienetas, po to seni skitmenys, buvę prieš operaciją, nutrinami. Po to operacija daroma su naujai gautais devyniais skaitmenymis. Ar įmanoma po keletos šių operacijų gauti visus devynis nulius.

Ats.: ne.

Sprendimas. Tarkime, kad mums pavyko n-toje operacijoje gauti visus nulius. Tada po $(n-1)$-os operacijos buvo visi devyni vienetai. Tai reiškia, kad po $(n-2)$-os operacijos visi gretimi skaitmenys buvo skirtingi, t.y. vienetų turėjo būti tiek pat, kiek ir nulių. Bet taip būti negalėjo, nes skaitmenų skaičius yra nelyginis.

12. Išilgai kelio auga beržai ir klevai, iš viso du šimtai medžių. Yra žinome, kad tarp bet kokių dviejų beržų medžių skaičius yra nelygus šešiems (pvz., pirmas ir aštuntas medžiai negali būti abu beržai. Raskite didžiausią imanomą beržų skaičių.

Ats.: 102.

Sprendimas. Įrodysime, kad tarp bet kurių keturiolikos iš eilės einančių medžių beržų yra ne daugiau už septynis. Visus medžius sunumeruokime nuo vieno iki keturiolikos. Suporuokime skaičius: $(1;8)$, $(2;9), \ldots, (7;14)$. Jei vienoje poroje bus du beržai, tai tarp jų bus šeši medžiai, to būti negali. Vadinasi, kiekvienoje poroje yra ne daugiau kaip vienas beržas, o tarp bet kurių keturiolikos iš eilės einančių medžių beržų yra ne daugiau už septynis. Kadangi $200 = 14 \cdot 14 + 4$, tai beržų negali būti daugiau kaip $7 \cdot 14 + 4 = 102$. Belieka parodyti, kad šimtas du beržai gali būti. Imkime septynis beržus, septynis klevus, septynis beržus, septynis klevus, ir t.t., septynis beržus, septynis klevus, keturis beržus.

13. Ant lentos yra užrašyta šimtas skirtingų sveikųjų skaičių. Jie poromis buvo sudauginti, kiekvienas skaičius su kiekvienu kitu skaičiumi. Lygiai 2450 sandaugų gavosi neigiamos. Kiek galėjo gautis teigiamų sandaugų?

Ats.: 2401.

Sprendimas. Tarkime, kad yra n teigiamų ir $100-k-n$ neigiamų skaičių. Lygtis $n(100-k-n)=2450$ turi sveikuosius sprendinius $n=50$ ir $n=49$ tik tada, kai $k=1$. Jei $k=0$, lygtis turi iracionalius sprendinius. Jei $k\geq 2$, lygtis sprendinių neturi, be to, nelygybė $k\geq 2$ negali būti teisinga, nes skaičiai yra skirtingi. Taigi, tarp šimto skaičių yra būtinai nulis. Teigiamų skaičių bus $49\cdot 48/2+50\cdot 49/2=2401$.

14. Kiekvienas klasės mokinys lanko ne daugiau kaip du būrelius. Bet kokiai mokinių porai egzistuoja būrelis, kurį lanko abu mokiniai. Įrodykite, kad egzistuoja būrelis, kurį lanko ne mažiau kaip du trečdaliai klasės mokinių.

Sprendimas. Jei egzistuoja būrelis, kurį lanko visi mokiniai, tai viskas įrodyta. Nagrinėsime atvejį, kai nėra tokio būrelio, kurį lankytų visi mokiniai. Tarkime, kad mokinys A lanko pirmą būrelį. Egzistuoja mokinys B, kuris nelanko pirmo būrelio. Pagal uždavinio sąlygą ezistuoja antras būrelis, kurį lanko mokiniai A ir B. Egzistuoja mokinys C, kuris nelanko antro būrelio. Mokinys A lanko tik pirmą ir antrą būrelius, todėl mokinys C lanko pirmą būrelį kartu su mokiniu A. Turi egzistuoti trečias būrelis, kurį lanko mokiniai B ir C. Imkime bet kokį kitą klasės mokinį D. Jei mokinys D nelanko nei pirmo, nei antro būrelio, tai neegzistuoja tokio būrelio, kurį lankytų kartu su mokiniu A. Jei mokinys D nelanko nei pirmo, nei trečio būrelio, tai neegzistuoja tokio būrelio, kurį lankytų kartu su mokiniu C. Jei mokinys D nelanko nei antro, nei trečio būrelio, tai neegzistuoja tokio būrelio, kurį lankytų kartu su mokiniu B. Taigi, mokinys D, o tuo pačiu ir kiekvienas mokinys turi lankyti lygiai du iš šių trijų būrelių. Pažymėkime x_i, $i=1,2,3$ mokinių skaičių, kurie lanko i-tąjį būrelį. Tada $x_1+x_2+x_3=2x$, čia x yra klasės mokinių skaičius. Aišku, kad kuris nors x_i yra ne mažesnis už du trečdalius x.

15. Yra n iš eilės einančių natūrinių skaičių nuo vieneto iki n. Du žaidėjai žaidžia tokį žaidimą: pirmas žaidėjas išsirenka kurį nors skaičių, po to antras žaidėjas išsirenka kokį nors kitą skaičių, po to vėl pirmas renkasi kokį nors dar neišrinktą skaičių ir t.t., t.y., žaidėjai vienas po kito išsirenka kokį nors iš likusių skaičių, kuris dar nebuvo išrinktas nei jo, nei jo priešininko. Pralaimi tas, po kurio ėjimo visų išrinktų skaičių suma dalijasi iš trijų. Kuris žaidėjas gali laimėti, pirmas ar antras, nepriklausomai nuo to, kaip bežaistų jo varžovas, kai a) $n=30$, b) $n=45$?

Ats.: a) pirmas, b) antras.

Sprendimas. Aišku, kad čia svarbu ne pačių skaičių dydžiai, o jų liekanos dalijant iš trijų, todėl naudosime 0, 1 ir 2. a) atveju pirmas žaidėjas pasirenka vienetą, po to visada renkasi tokį skaičių, kad abiejų skaičių suma dalintųsi iš trijų, t.y., jei antras ima nulį, tai ir pirmas ima nulį, jei antras ima vienetą, tai pirmas dvejetą. Dvejeto antras žaidėjas imti negali, nes tuo atveju pralaimės. Taip žaisti pirmas žaidėjas gali, nes nulių yra lyginis skaičius. Taip jie gali žaisti iki tol, kol liks vienintelis dvejetas ir antras žaidėjas bus priverstas jį paimti.

b) atveju pirmas žaidėjas pirmu ėjimu negali imti nulio, tarkime, jis paima vienetą. Tada antras žaidėjas paima nulį, nulių lieka lyginis skaičius, ir antras žaidėjas visada gali paimti nulį, jei tai padaro pirmas. Pirmas žaidėjas negali imti dvejeto, taigi be nulio jis gali paimti vienetą, tada antras ima dvejetą. Taip jie gali žaisti iki tol, kol liks vienintelis dvejetas ir pirmas žaidėjas bus priverstas jį paimti.

16. Kvadrato $ABCD$ kraštin4s ilgis yra lygus vienetui. Kraštinėse AB ir AD atitinkamai paimti taškai P ir Q tokie, kad trikampio APQ perimetras yra lygus 2. Raskite kampą PCQ.

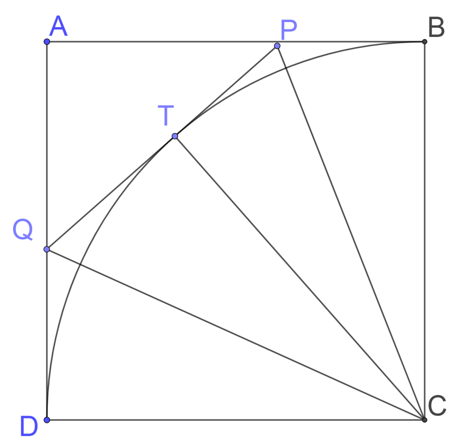
Ats.: 45 laipsniai.

Sprendimas. Brėžiame apskritimą, kurio centras yra taške C, o apskritimo ilgis yra lygus vienetui. Šis apskritimas liečia kraštines AB ir AD taškuose B ir D. Įrodysime, kad šis apskritimas taip pat liečia atkarpą PQ. Iš tikrųjų, jei apskritimas neliečia atkarpos PQ, tai brėžiame tiesę lygiagrečią PQ ir liečinčią apskritimą taške T, esančiame kvadrato viduje. Tiesė kerta kraštines AB ir AD taškuose P_1 ir Q_1. Apskaičiuojame trikampio AP_1Q_1 perimetrą:

$$AQ_1 + AP_1 + Q_1T + TP_1 = AQ_1 + AP_1 + Q_1D + BP_1 = AB + AD = 2.$$

Bet trikampio AP_1Q_1 perimetras nėra lygus trikampio APQ perimetrui. Gavome prieštarą, kad trikampio APQ perimetras yra lygus dviems. Taigi apskritimas liečia atkarpą PQ taške T, t.y. $P = P_1$, $Q = Q_1$. Toliau skaičiuojame kampą PCQ:

$$\angle PCQ = \angle PCT + \angle TCQ = (\angle BCT + \angle TCD)/2 = 90°/2 = 45°.$$



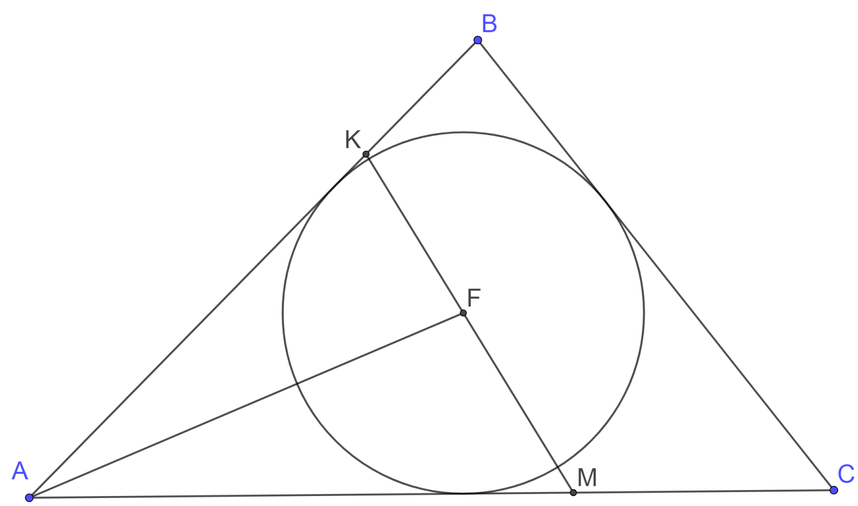
17. Tiesė l dalija trikampį į dvi figūras, kurių plotai yra lygūs, taip pat ir perimetrai yra lygūs. Įrodykite, kad įbrėžto į šį trikampį apskritimo centras priklauso tiesei l.

Sprendimas. Tarkime, kad tiesė l dalija trikampį ABC į trikampį AKM ir keturkampį $KMCB$, taškas K priklauso AB, o taškas M priklauso AC. Pažymėkime r įbrėžto į trikampį ABC spindulio ilgį, ρ įbrėžto į kampą BAC spindulio ilgį apskritimo, kurio centras yra tiesėje l. Pasinaudoję lygybėmis $2S_{ABC} = r(AB+AC+BC)$ ir $2S_{AKM} = \rho(AK + AM)$, pagal uždavinio sąlygą turime

$$\frac{1}{2} = \frac{AK + AM}{AB + AC + BC} = \frac{S_{AKM}}{S_{ABC}} = \frac{\rho(AK + AM)}{r(AB + AC + BC)}.$$

Iš čia išplaukia, kad $\rho = r$, tai reiškia, kad įbrėžto trikampį apskritimo centras priklauso tiesei l.

Tuo atveju, kai tiesė dalija trikampį į du trikampius, sprendimas yra visiškai paprastas. Tuo atveju $M = C$, $AK = KB$, $AC = CB$, t.y. trikampis yra lygiašonis, tvirtinimas yra akivaizdus.

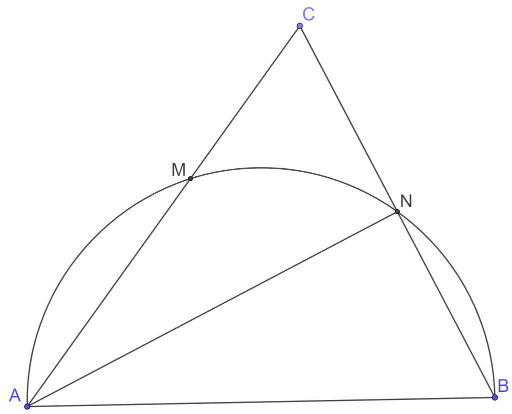


18. Trikampio ABC kraštinė AB yra apskritimo skersmuo. Šis apskritimas kerta trikampio kraštines AC ir BC taškuose M ir N atitinkamai. Raskite trikampio ABC kraštinių santykius, jei $AM : MC = 3 : 2$ ir $BN : NC = 1 : 1$.

Ats.: 1 ir $\sqrt{5}/2$.

Sprendimas. Kampas ANB remiasi į diametrą, todėl jis yra status. AN yra pusiaukraštinė ir aukštinė, todėl trikampis ABC yra lygiašonis, t.y. $AC = AB$. Turime santykį $AB : AC = 1$.

Kampas AMB taip pat remiasi į diametrą, todėl jis yra status, Trikampiai AMB ir BMC yra statūs. Pažymėkime $AB = d$. Tada $AM = 3d/5$, $MC = 2d/5$. Pagal Pitagoro teorem turime $BM^2 = AB^2 - AM^2 = 16d^2/25$, $BC^2 = BM^2 + MC^2 = 20d^2/25$. Todėl $AB : BC = \sqrt{5}/2$.



19. Į apskritimą su spinduliu 1 įbrėžiamas ketrukampis $ABCD$, kurio įstrižainė AC sutampa su skersmeniu, o $BD = AB$. Įstrižainės kertasi taške P. Raskite kraštinės CD ilgį, jei žinoma, kad $PC = 2/5$.

Ats.: $CD = \frac{2}{3}$.
Sprendimas: Pažymėkime $\angle ABD = \angle ACD = 2\alpha$. Randame kampus $\angle CAD = 90° - 2\alpha$, $\angle ADB = 90° - \alpha$ ir $\angle CDB = \alpha$.
Pagal sinusų teoremą trikampiui DCP gauname

$$\frac{DP}{\sin(2\alpha)} = \frac{2}{5\sin\alpha}.$$

Pritaikius sinusų teoremą trikampiui DAP

$$\frac{DP}{\sin(90° - 2\alpha)} = \frac{8}{5\sin(90° - \alpha)}.$$

Pasinaudojus šiomis lygybėmis gauname:

$$\frac{2\sin(2\alpha)}{5\sin\alpha} = DP = \frac{8\sin(90 - 2\alpha)}{5\sin(90 - \alpha)} = \frac{8\cos(2\alpha)}{5\cos\alpha}$$

Iš to gauname $4\sin\alpha\cos^2\alpha = 2\sin(2\alpha)\cos\alpha = 8\sin\alpha\cos(2\alpha)$. Kadangi $\sin\alpha \neq 0$, tai suprastinus lieka $4\cos^2\alpha = 8\cos(2\alpha)$. Kadangi $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$, tai $2\cos(2\alpha) + 2 = 8\cos(2\alpha)$. Taigi $\cos(2\alpha) = \frac{1}{3}$.
Iš to apskaičiuojame, kad $CD = 2\cos(2\alpha) = \frac{2}{3}$.

20. Duotas trikampis ABC su $AB = BC$ ir $\angle B = 20°$. Taškas M paimtas ant AC, kad $AM : MC = 1 : 2$. Taškas H yra statments iš C į BM pagrindas. Raskite kampą AHB.

Atsakymas: $100°$.
Sprendimas: Paėmus MC vidurio tašką K gauname lygybes $KC = MK = AM$. Kadangi HK yra stačiojo trikampio MHC pusiaukraštinė iš statų kampo, tai $HK = KM = KC = AM$.
Trikampiai AMB ir CKB yra lygūs pagal dvi kraštines ($AM = KC$ ir $AB = CB$) bei kampą tarp jų (trikampis BAC - lygiašonis), todėl $BM = BK$.

$\angle KHM = \angle KMH = \angle BMK = \angle BKM$ (pagal lygiašonio trikampio kampų prie pagrindo lygumą), taigi trikampiai BMK ir KHM yra panašūs pagal du kampus. Iš to gauname, kad $\frac{BM}{MK} = \frac{MK}{HM}$.

Pasinaudoję paskutine lygybe randame, kad $AM^2 = MK^2 = BM \cdot MH$. Todėl $\frac{AM}{MH} = \frac{BM}{AM}$. Taigi trikampiai AMH ir BMA yra panašus pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Todėl $\angle AHM = \angle MAB = 80°$. Taigi $\angle AHM = 180° - 80° = 100°$.