

**15-osios matematinės varžybos**  
**Lietuvos Didžiosios Kunigaikštystės garbei**

**2023-10-08**

1. Duotas realusis nenulinis skaičius  $\alpha$ . Raskite visas funkcijas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tokias, kad

$$f(f(x + y)) = f(x + y) + f(x)f(y) + \alpha xy$$

visiems  $x, y \in \mathbb{R}$ .

2. Klasėje mokosi  $n$  vaikų. Bet kurie du vaikai yra arba draugai, arba priešai. Yra žinoma, kad paėmus bet kuriuos 6 vaikus, tarp jų visada atsiras bent du vaikai, kurie vienas kitam yra priešai. Taip pat, pasirinkus tuos du vaikus (bet kuriuos 2 iš 6, kurie vienas kitam priešai), iš likusių 4 vaikų bus bent vienas, kuris yra draugas su jais abiem. Kokia didžiausia galima  $n$  reikšmė? (Buvimas draugais ar priešais yra abipusis ryšys, t.y. jei  $A$  priešas su  $B$ , tai ir  $B$  priešas su  $A$ ).
3. Trikampio  $ABC$  kraštinių  $BC$ ,  $CA$  ir  $AB$  vidurio taškai yra atitinkamai  $M$ ,  $N$  ir  $P$ .  $G$  - pusiauakraštinių susikirtimo taškas. Apie  $BGP$  apibrėžtas apskritimas kerta tiesę  $MP$  taške  $K$  (nelygiam  $P$ ), o apie  $CGN$  apibrėžtas apskritimas kerta tiesę  $MN$  taške  $L$  (nelygiam  $N$ ). Įrodykite, kad  $\angle BAK = \angle CAL$ .
4. Pažymėkime, kad nelyginiam natūraliajam skaičiui  $k \geq 1$

$$k!! = k * (k - 2) * \dots * 1.$$

Įrodykite, kad  $(2^n - 1)!! - 1$  dalus iš  $2^n$  visiems  $n \geq 3$ .