15-osios matematinės varžybos
Lietuvos Didžiosios Kunigaikštystės garbei

Sprendimai
Greta Morkūnė

1. Duotas realusis nenulinis skaičius α. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tokias, kad

$$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) + \alpha xy$$

visiems $x, y \in \mathbb{R}$.

Sprendimas. Įsistatę $y = 0$ gauname, kad $f(f(x)) = f(x) + f(x)f(0)$. Įsistatę tai į pradinę lygtį gauname, kad
$f(x+y) + f(x+y)f(0) = f(x+y) + f(x)f(y) + \alpha xy$, taigi

$$(*)\ f(x+y)f(0) = f(x)f(y) + \alpha xy.$$

Pirmiausia išnagrinėkime atvejį $f(0) = 0$.
Tokiu atveju gauname $0 = f(x)f(y) + \alpha xy$. Funkcija akivaizdžiai negali būti nulinė, tad egzistuos realusis a, toks, kad $f(a) \neq 0$. Įsistatę $y = a$ gauname $f(x) = -x\frac{\alpha a}{f(a)} = cx$, kur $c = -\frac{\alpha a}{f(a)}$ - reali konstanta. Įsistatę $f(x) = cx$ į pradinę lygtį gauname, kad $c^2(x+y) = c(x+y) + c^2xy + \alpha xy$ visiems $x, y \in \mathbb{R}$. Įsistatę $x = 1, y = 0$ gauname, kad $c^2 = c$, taigi $c = 0$ arba $c = 1$.
Jei $c = 0$, tai įsistatę $x = 1, y = 1$ gauname, kad $\alpha = 0$, ko negali būti.
Jei $c = 1$, tai įsistatę $x = 1, y = 1$ gauname, kad $\alpha = -1$, įsistatę $f(x) = x, \alpha = -1$ gauname, kad tai išties sprendinys.
Nuo šiol laikysime, kad $f(0) \neq 0$.
Į $(*)$ įsistačius $y = 1$ gauname $f(x+1)f(0) = f(x)f(1) + \alpha x$.
Į $(*)$ įsistačius $y = -1$, o x pakeitus į $x+1$ gauname $f(x)f(0) = f(x+1)f(-1) - \alpha(x+1)$. Gavome dvi lygtis su dviem nežinomaisiais: $f(x)$ ir $f(x+1)$. Iš pirmos lygties išsireiškus $f(x+1)$ ir įsistačius į antrą, gauname, kad $f(x)f(0) = \frac{(f(x)f(1)+\alpha x)f(-1)}{f(0)} - \alpha(x+1)$. Pertvarkius gauname

$$f(x)(f(0) - \frac{f(1)f(-1)}{f(0)}) = x(\frac{\alpha f(-1)}{f(0)} - \alpha) - \alpha.$$

Dešinė lygybės pusė akivaizdžiai nėra visada 0, nes laisvas narys α nėra 0. Vadinasi, ir kairė pusė nėra visada 0, taigi galime dalinti iš konstantos prie $f(x)$ ir gauname, kad $f(x) = kx + r$ su konstatomis k, r. Įsistatę į pradinę lygtį, analogiškai kaip anksčiau, patikriname, kad vienintelis sprendinys yra $k = 1, r = 0$, kai $\alpha = -1$.
Atsakymas: $f(x) = x$, kai $\alpha = -1$. Kai $\alpha \neq -1$, sprendinių nėra.

2. Klasėje mokosi n vaikų. Bet kurie du vaikai yra arba draugai, arba priešai. Yra žinoma, kad paėmus bet kuriuos 6 vaikus, tarp jų visada atsiras bent du vaikai, kurie vienas kitam yra priešai. Taip pat, pasirinkus tuos du vaikus (bet kuriuos 2 iš 6, kurie vienas kitam priešai), iš likusių 4 vaikų bus bent vienas, kuris yra draugas su jais abiem. Kokia didžiausia galima n reikšmė? (Buvimas draugais ar priešais yra abipusis ryšys, t.y. jei A priešas su B, tai ir B priešas su A).

Sprendimas. Įrodysime, kad $n = 25$ yra didžiausia galima n reikšmė. Visų pirma, pateiksime pavyzdį su $n = 25$.
Tarkime, kad klasėje yra 25 vaikai. Jei juos suskirstysime į 5 grupes po 5 mokinius ir tarsime, kad kiekvienas vaikas yra priešas su savo grupės nariais, bet draugai su visais likusiais vaikais, tai, kai paimsime bet kuriuos 6 vaikus, pagal Dirichlė principą, būtinai bus bent du iš tos pačios grupės ir jie bus vienas kitam priešai. Tačiau taip pat būtinai bus bent vienas vaikas iš kitos grupės ir jis draugaus su abiejais.
Toliau įrodysime, kad jei $n \geqslant 26$, tai galime pasirinkti 6 vaikus, kurie netenkins sąlygos.
Visų pirma pastebėkime, kad vaikas negali turėti daugiau nei 4 priešų. Tarkime, A turi 5 priešus - B, C, D, E ir F. Tada A, B, C, D, E, F yra grupė iš 6 vaikų ir A su B priešai, bet nė vienas iš likusių vaikų nėra draugas su jais abiem, nes nė vienas nėra draugas su A. Prieštara.
Pasirinkime pirmą vaiką A. Jis turi daugiausiai 4 priešus, taigi turi bent 21 draugą. Pasirinkime B vieną iš šių draugų. Tada tarp likusių bent 20 vaikų B turi daugiausiai 4 priešus, taigi turi bent 16 draugų. Pasirinkime C vieną iš jų. Taip tęsdami toliau galime pasirinkti D (bent 11 pasirinkimo būdų), E (bent 6 pasirinkimo būdai) ir F (bent 1 pasirinkimo būdas). Taigi sukonstravome pavyzdį iš 6 vaikų, kurie visi vienas kitam draugai, o tai prieštarauja sąlygai. Prieštara.

Atsakymas: $n = 25$.

3. Trikampio ABC kraštinių BC, CA ir AB vidurio taškai yra atitinkamai M, N ir P. G - pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Apie BGP apibrėžtas apskritimas kerta tiesę MP taške K (nelygiam P), o apie CGN apibrėžtas apskritimas kerta tiesę MN taške L (nelygiam N). Įrodykite, kad $\angle BAK = \angle CAL$.

   Sprendimas. Visų pirma įrodysime, kad trikampiai BPK ir CNL yra panašūs. Tą nesunku pastebėti iš kampų:
   $\angle BPK = \angle BPM$ (viena tiesė);
   $\angle BPM = \angle BAC$ (PM lygiagreti AC);
   $\angle BAC = \angle MNC$ (MN lygiagreti AB);
   $\angle MNC = \angle LNC$ (viena tiesė).
   Taigi $\angle BPK = \angle LNC$.
   Taip pat:
   $\angle BKP = \angle BGP$ (į vieną lanką įbrėžti kampai);
   $\angle BGP = \angle NGC$ (kryžminiai kampai);
   $\angle NGC = \angle NLC$ (į vieną lanką įbrėžti kampai).
   Taigi $\angle BKP = \angle NLC$.
   Du kampai vienodi, tad trikampiai BPK ir CNL yra panašieji.
   Toliau įrodysime, kad trikampiai ABK ir ACL yra panašieji.
   $\angle ABK = \angle PBK$ (tas pats kampas);
   $\angle PBK = \angle NCL$ (trikampiai BPK ir CNL yra panašūs);
   $\angle NCL = \angle ACL$ (tas pats kampas).
   Taigi $\angle ABK = \angle ACL$.
   Taip pat naudodami tai, kad P ir N yra kraštinių vidurio taškai bei BPK ir CNL panašumą, gauname, kad $AB/BK = 2PB/BK = 2NC/CL = AC/CL$.
   Taigi gavome, kad dviejų kraštinių santykiai bei tarp jų esantis kampas vienodi, taigi trikampiai ABK ir ACL išties yra panašieji, vadinasi $\angle BAK = \angle CAL$. Įrodyta.

4. Pažymėkime, kad nelyginiam natūraliajam skaičiui $k \geqslant 1$

$$k!! = k * (k-2) * ... * 1.$$

   Įrodykite, kad $(2^n - 1)!! - 1$ dalus iš 2^n visiems $n \geqslant 3$.

Sprendimas. Įrodysime indukcijos būdu. Visų pirma, kai $n = 3$, $7 * 5 * 3 * 1 - 1 = 104$ yra dalus iš 8.
Tarkime, kad kai $n = k$, turime $(2^k - 1)!! \equiv 1 \mod 2^k$.
Atkreipkime dėmesį, kad $2^k + i \equiv -(2^k - i) \mod 2^{k+1}$.
Taigi $(2^{k+1}-1)!! \equiv 1*3*...*(2^k-1)*(-(2^k-1))*(-(2^k-3))*...*(-1) \equiv ((2^k - 1))!!^2 * (-1)^{2^{k-1}} \equiv ((2^k - 1)!!)^2 \mod 2^{k+1}$.
Kadangi $(2^k - 1)!! \equiv 1 \mod 2^k$, tai
$(2^k - 1)!! \equiv 1 \mod 2^{k+1}$ arba $(2^k - 1)!! \equiv 1 + 2^k \mod 2^{k+1}$.
Pirmu atveju $((2^k - 1)!!)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \mod 2^{k+1}$.
Antru atveju $((2^k - 1)!!)^2 \equiv (1 + 2^k)^2 \equiv 1 + 2^{k+1} + 2^{2k} \equiv 1 \mod 2^{k+1}$.
Taigi abejais atvejais gauname, kad $(2^{k+1} - 1)!! \equiv ((2^k - 1)!!)^2 \equiv 1 \mod 2^{k+1}$.
Taigi teiginys galioja ir su $n = k + 1$. Įrodyta.