LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

VI. SKAIČIAI, REIKŠMĖS IR LENTELĖS

(2022–2024)

Teorinę medžiagą parengė bei šeštąją užduotį sudarė VU docentas Romualdas Kašuba

1. Visi mes puikiai atsimename, kaip yra sprendžiamas toks uždavinys: vienas darbininkas, dirbdamas vienas, darbą padarytų per 2 valandas, o kitas – irgi vienas – per 3. Per kiek valandų jie padarytų tą darbą dirbdami abu kartu? Jo sprendimas yra arba, tiksliau, galėtų būti toks. Darbą pažymėkime 1 ir pirmiausiai paskaičiuokime darbo dalis, kurias jie atliktų per vieną valandą. Pirmasis darbininkas per 1 valandą padarytų ½ darbo dalį, o kitas per tą patį laiką padarytų 1/3 darbo dalį. Todėl jie abu kartu per vieną valandą padarytų ½ + 1/3 darbo dalį. Sudėję tas dvi trupmenas gauname 5/6, o todėl jie kartu tą visą darbą padarytų per 1/(5/6) = 6/5 valandos.

O dabar išspręskime panašų uždavinį priimdami sąlygą, kad spręsdami atlikti dalybos veiksmą galime tik paskutinėje eilutėje.

Uždavinio sprendimas galėtų būtų toks. Pirmiau paimkime skaičių 2 ir 3 bendrąjį mažiausiąjį kartotinį, kuris yra 6 ir suskaičiuokime, kiek darbų atliktų pirmasis ir antrasis darbininkai per tas 6 valandas. Iš karto suvokiame, kad pirmasis darbininkas per tas 6 valandas atliktų 3 darbus, o antrasis – irgi vienas – 2 darbus. Todėl jie abudu per tas 6 valandas atliktų 3 + 2 = 5 darbus, o tai reiškia, jog 1 darbą jie atliktų per 6/5 valandos.

Atkreipiame dėmesį, jog tikrai dalijome tik paskutinėje eilutėje.

2. Nežiniukas suformulavo (iš analogijos su skaičių dalumo iš 3 ir 9 požymiais) tokį skaičiaus dalumo iš 27 požymį:

Jeigu natūraliojo skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 27, tai ir pats skaičius dalijasi iš 27.

Ar Nežiniukas yra teisus?

Sprendimas. Nežiniukas yra neteisus. Nors pats mažiausias skaičius, kurio skaitmenų suma yra 27, yra 999 ir jis iš 27 tikrai dalijasi, nes 999 : 27 = 37, bet jau sekantis pagal didumą skaičius su skaitmenų suma 27 yra 1899 ir jis iš 27 tikrai nesidalija, nes 1899 = 27 · 70 + 9.
Atsakymas. Nežiniukas yra neteisus.

3. O dabar suraskime koks dviženklis skaičius pasižymi savybe, jog prie jo pridėjus 1, jis dalijasi iš 9, o atėmus 1 jis dalijasi iš 13.

Pirmiausiai pastebėkime, jog mažiausias dviženklis skaičius, kuris pridėjus 1 dalijasi iš 9, yra 17. Tačiau jeigu iš jo atimsime 1, tai 17 – 1 = 16 iš 13 tikrai nesidalins.

Sekantis dviženklis skaičius, kuris pridėjus 1 dalijasi iš 9 yra 26, dar kitas 35, toliau eitų skaičiai 44, 53, 62, 71, 80, 89 ir 98. Pažiūrėsime, kuris iš jų, sumažintas 1, arba kuris iš skaičių

25, 34, 43, 52, 61, 70, 79, 88 ir 97

dalijasi be liekanos iš 13. Matome, jog toks skaičius yra 52.

Todėl gauname, jog yra vienintelis toks dviženklis skaičius, kuris yra 52.

4. Jonas ir Petras mokosi skirtingose mokyklose. Į jų pareigas įeina būtinybė išblizginti kiekvienam savo mokyklos salių grindis. Jonas išblizgina savo mokyklos salės grindis per 2 valandas, o salės plotas yra 440 kvadratinių metrų, o Petras savo mokyklos salės grindis, kurios plotas yra 1080 kvadratinių metrų, išblizgina per 6 valandas.

Kai Jonas ir Petras kartu blizgina Jono mokyklos salės grindis, kiek minučių juodu užtrunka?

Sprendimas. Jonas per 1 valandą išblizgina 440 : 2 = 220 kv. metrų ploto, o Petras 1080 : 6 = 180 kv. metrų. Todėl juodu abudu kartu per valandą išblizgina 220 + 180 = 400 kvadratinių metrų, tai po 1 valandos jiems dar lieka nublizginti 440 – 400 = 40 kvadratinių metrų, o tai yra dešimtoji dalis viso Jono salės ploto, todėl juodu sugaiš tam likusiam plotui dešimtadalį jų jau sugaišto laiko, o tai yra 6 minutės. Todėl visam Jono mokyklos salės blizginimui juodu sugaiš 66 minutes.

5. Į kampinius lentelės 3 x 3 langelius yra įrašyti skaitmenys 1, 9, 9 ir 5, kaip tai yra parodyta piešinyje.

1		9
9		5

Ar galima į likusius tuščius langelius įrašyti skaičius įrašant po vieną skaičių į kiekvieną langelį taip, kad visuose keturiuose kampiniuose 2 x 2 kvadratuose esančių skaičių suma būtų visada viena ir ta pati.

Sprendimas. Tarkime, kad taip padaryti galima. Tegul į tuščią viršutinės eilutės langelį yra įrašytas skaitmuo a, o į tuščią apatinės eilutės langelį yra įrašytas skaitmuo b (žiūrėkite piešinį).

1	a	9
9	b	5

Kadangi kairysis viršutinis ir apatinis 2 x 2 kvadratai turi du bendrus langelius, o jų visų 4 skaičių sumos sutampa, tai $1 + a = 9 + b$, iš kur seka, jog $a = b + 8$. Analogiškai sulygindami viršutinių ir apatinių dešiniųjų 2 x 2 kvadratų skaičių sumas gautume, jog $a + 9 = b + 5$, iš kur seka, kad $a = b - 4$. Tada $b + 8 = b - 4$, o tai yra prieštaravimas, nes 8 ir –4 yra tikrai skirtingi skaičiai.
Atsakymas. To padaryti negalima.

6. Ar galima į kvadratinės lentelės 5 x 5 langelius įrašyti visus skaičius nuo 1 iki 25 (po vieną skaičių į kiekvieną langelį) taip kad skaičių suma kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir abiejose įstrižainėse būtų lyginė?

Sprendimas. Tarkime, kad taip padaryti galima. Tada kiekvienos eilutės skaičių suma yra lyginė, todėl ir visų penkių eilučių skaičių suma irgi yra lyginė. Bet tai yra visų skaičių, nuo 1 iki 25 suma 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 22 + 23 +24 +25, kuri yra 12 lyginių ir 13 nelyginių skaičių suma. Tačiau

nelyginio skaičiaus nelyginių skaičių suma yra nelyginis skaičius. Tai yra beveik tas pats kaip pasakyti, kad visų sveikųjų skaičių nuo 1 iki 25 suma yra 1 + 2 + 3 +.....+ 23 +24 + 25 = 13 · 25 = 325.

7. Mokyklos šachmatų turnyre dalyvavo 20 šachmatininkų, kurie visi vienas su kitu sužaidė po vieną partiją. Šachmatuose už pergalę duodama po tašką, už lygiąsias – po ½ taško, o už pralaimėtą partiją skiriama 0 taškų. Pasibaigus turnyrui paaiškėjo, kad lygiai vienas dalyvis, vardu Matas, surinko 9,5 taško ir užėmė 19-tą vietą. Ar galėjo turnyro nugalėtojas aplenkti antroje vietoje likusį dalyvį lygiai 1 tašku?

Sprendimas. Ne, taip nutikti negalėjo.

Pirmiausiai pastebėkime, kad dalyviai, likę 1-18-tose vietose surinko bent po 10 taškų kiekvienas, todėl geriausieji 19 dalyvių surinko ne mažiau kaip 10 · 18 + 9,5 = 189,5 taškų. Toliau, turnyre buvo išžaista (20 · 19) : 2 = 190 taškų, vadinasi, paskutiniajam 20-tajam dalyviui lieka daugiausiai 0,5 taško. Jeigu pas jį yra 0,5 taškų, tai taškų pasiskirstymas yra toks: 1-18 vietos – po 10 taškų, 19-ta vieta – 9,5, 20-ta – 0,5 taškų. Jeigu pas jį yra 0 taškų, tai tas pasiskirstymas yra toks: 1-a vieta 10,5 taško, 2-18 vietos – po 10, 19-ta – 9,5 ir 20-ta – 0 taškų.

Bet kuriuo atveju turime, kad pirmąją ir antrąją vietas skiria ne daugiau negu 0,5 taško.

8. Autobusu važiavo ne daugiau negu 100 keleivių, o stovinčiųjų keleivių skaičius buvo 2 kartus didesnis už sėdinčiųjų keleivių skaičių. Sustojus autobusui stotelėje iš jo išlipo lygiai 4 procentai visų keleivių. Pasakykite, kiek keleivių liko autobuse.

Sprendimas. Kadangi stovinčiųjų keleivių skaičius yra du kartus didesnis už sėdinčiųjų, tai bendras visų keleivių skaičius N tikrai dalijasi iš 3. Toliau, kadangi stotelėje išlipo keturi procentai visų keleivių, tai yra $\frac{1}{25} \cdot N$ keleivių, tai N turi dalintis ir iš 25. Taigi N dalijasi iš 3 · 25 = 75. Tačiau pagal sąlygą $N \leq 100$, todėl N = 75. Taigi autobuse iš viso liko $75 - \frac{4 \cdot 75}{100} = 75 - 3 = 72$ keleiviai.

9. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ir 8 įvairiais būdais galima sudaryti 2 keturženklius skaičius panaudojant kiekvieną skaitmenį po vieną kartą, o po to rasti skirtumą didesniojo ir mažesniojo iš tų gautųjų skaičių (pavyzdžiui, 3587 – 1246).

Kokį patį didžiausią ir patį mažiausią skirtumus galima gauti taip darant?

Sprendimas. Didžiausia reikšmė yra lygi 7531; mažiausia reikšmė lygi 247.

Mažiausia reikšmė yra gaunama iš galimai didžiausios reikšmės atimant galimai mažiausią reikšmę. Pats didžiausias keturženklis skaičius, gaunamas iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ir 8 yra, suprantama, 8765, o pats mažiausias yra 1234. Todėl pats didžiausias skirtumas yra 8765 – 1234 = 7531.

Jeigu mažinamojo skaičiaus tūkstančių skaitmuo būtų didesnis už atimamojo iš jo skaičiaus tūkstančių skaitmenį daugiau negu per 1, tai skirtumas būtų nemažesnis negu 2000 – 999

= 1001, o tai yra, kaip nesunku matyti, daugiau negu kai kurie kiti galimi skirtumai, pavyzdžiui skirtumas 7128 – 6354 = 774 yra mažesnis negu 1001. Taigi, kad skirtumas būtų pats mažiausias iš visų galimų, reikia kad atėminio tūkstančių skaičius būtų lygiai 1 vienetu didesnis už atimamojo skaičiaus tūkstančių skaitmenį. Tada skirtumas bus pats mažiausias, jeigu skaičius, kurį sudaro paskutinieji 3 atėminio skaičiai, bus galimai pats mažiausias, tai yra 123, o skaičius, kurį sudaro trys atimamojo skaičiaus skaitmenys bus galimai pats didžiausias, tai yra 876. Nepanaudotieji skaičiai 5 ir 4 kaip tik ir skiriasi per 1. Todėl pats mažiausias skirtumas ir yra 5123 – 4876 = 247.
Atsakymas. Didžiausias skirtumas yra 7531, o pats mažiausias yra 247.

10. Į 3 x 3 lentelės langelius, po vieną skaičių į kiekvieną langelį įrašome po vieną teigiamą sveiką skaičių (įrašomi skaičiai nebūtinai skirtingi) taip, kad visų trijų eilučių ir visų trijų stulpelių skaičių sumos yra visos skirtingos. Kokia tada yra pati mažiausia galima visų 9 lentelės skaičių suma?

Sprendimas. Kadangi visi įrašomi skaičiai yra sveiki ir teigiami, tai pati mažiausia galima bet kurios eilutės ar stulpelio skaičių suma yra bent 3. Kadangi visų eilučių ir visų stulpelių skaičių sumos yra skirtingos, tai pažymėjus visų 9 visos lentelės skaičių sumą simboliu S, turėsime tokią nelygybę:

$$2S \geq 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$$

arba

$$S \geq 16{,}5.$$

Kadangi S yra natūralusis skaičius, tai $S \geq 17$.

Žemiau pateikiamas pavyzdys rodo, kad toks atvejis tikrai įmanomas:

1	1	1
1	4	4
2	2	1

Atsakymas. Pati mažiausia galima visos lentelės skaičių suma yra 17.

11. Duota akmenų krūva, kurios akmenų svoriai nebūtinai yra visi skirtingi. Yra žinoma, kad tą krūvą galima išdėti ir į penkias, ir į šešias pagal svorį lygias akmenų krūvas. Koks mažiausias akmenų skaičius gali būti tokioje akmenų krūvoje?

Sprendimas. Nesunku suvokti, kad 10 akmenų krūva, kurioje yra 5 akmenys po 50 gramų ir 5 akmenys po 10 gramų, tikrai tenkina uždavinio sąlygas.

Įrodysime, kad mažiau akmenų tokioje krūvoje negali būti. Tikrai, jeigu tokioje krūvoje yra mažiau negu 10 akmenų, tai jeigu mes išdėliosime jas į 5 vienodo svorio krūvas, to vienintelio akmens svoris, iš kurio tik ir susideda viena iš tų 5 krūvų, bus (1/5)X, kur X yra bendras visų krūvos akmenų svoris. Tačiau tada tokios akmenų krūvos negalima išdėlioti į šešias krūvas, kurių visų svoris yra 1/6X, kadangi į vieną iš jų patektų didesnio svorio akmuo (1/5)X .
Atsakymas. Krūvoje gali būti mažiausiai 10 akmenų.

12. 9 elektros lemputės yra išdėstytos „kvadratiniu būdu“:

☺☺☺
☺☺☺
☺☺☺

Visas aritmetizuotas miškas žino, kad kiekviena lemputė turi dvi priešingas būsenas: būseną „į“ ir būseną „iš“. Kiškutis Mikas Paikutis ar kitas įgaliotas žvėriukas gali letena spustelėti bet kurią lemputę.
Spustelėjus lemputę jos būsena „pereina į priešingą“: jeigu iki spustelėjimo lemputė buvo būsenoje „į“, tai po spustelėjimo ji bus būsenoje „iš“, ir atvirkščiai; be to, į priešingą būseną po spustelėjimo pereina visos ir tos eilutės, ir to stulpelio lemputės.
Pradžioje 9 lemputės buvo būsenoje „iš“. Koks yra mažiausias lempučių spustelėjimų skaičius, kuriuos turi padaryti kiškutis Mikas Paikutis, kad visos 9 lemputės atsidurtų būsenoje „į“?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 9 (E) to padaryti neįmanoma

Sprendimas. Antraštė išėjo ilgoka, o pats sprendimo aprašymas bus, kaip mums regisi, visiškai nepainus. Pirmiausiai sutarkime „išjungtą lemputės būseną“ žymėti, kiek paprasčiau, arba tiesiog minuso ženklu, o „įjungtą lemputės būseną“, atvirkščiai ir, kaip įprasta, daug optimistiškesniu pliuso ženklu.

Taip „skydelio“ būsena, kai visai viskas išjungta, atrodys taip:

–	–	–
–	–	–
–	–	–

Panašiai būsena, kai viskas įjungta, atrodys kaip pilna pliusų lentelė, arba, kitaip sakant, taip:

+	+	+
+	+	+
+	+	+

Mums beliko papasakoti, kaip kuo greičiausiai, o tai reiškia su kuo mažiausiai spustelėjimų, kurių kiekvienas liaudiškai sakant, apverčia lygiai 5 lempučių būsenas, padaryti taip, kad „ištisinių“ minusų lentelė (ta, kuri parodyta aukščiau) virstų „ištisinių“ pliusų lentele arba tokia, kuri yra parodyta žemiau“.
Dabar nurodysime būdą, kaip trimis spustelėjimais apversti lentelę. Būdo aprašas labai paprastas ir yra toksai – paimkime ir bet kuria eile nuspauskime visas tris, pavyzdžiui, pirmosios eilutės lemputes.
Galite dirstelėti, kas tada darysis: prieiname prie lentelės, randame

–	–	–
–	–	–
–	–	–

ir paspaudžiame kairiausią lemputę viršutinėje eilutėje – reakcija bus tokia, kokia ir buvo pranašauta – į priešingas būsenas pereis visos aukštutinės eilutės ir kairiausiojo stulpelio eilutės. Pasikeitęs vaizdas bus toks:

+	+	+
+	–	–
+	–	–

Dabar iš eilės spaudžiame aukščiausią vidurinio stulpelio lemputę. Aukštutinės eilutės lempučių būsenos „atvirsta atgal“ ir priešingomis pasikeičia likusios vidurinio stulpelio lempučių būsenos. Vaizdas po antrojo spustelėjimo bus toks:

–	–	–
+	+	–
+	+	–

Dabar paspaudus pačią dešiniausią viršutinės eilutės lemputę vaizdas ir bus toks, apie kurį mes svajojome ir prie kurio mes veržėmės, arba gauname lentelę vardu „vieni pliusai“:

+	+	+
+	+	+
+	+	+

Nuoširdžiai pripažįstame, kad toji viršutinė eilutė nėra niekuo greitesnė už kitas eilutes – ar net stulpelius. Kitais žodžiais šnekant visiškai tas pats galutinis rezultatas būtų buvęs pasiektas ir nuspaudus (ir net bet kuria eile, bet tik visas) antrosios eilutės lemputes. Tas pats būtų nutikę ir nuspaudus visas tris žemiausios eilutės lemputes.
Lygiai tas pats būtų buvę, jei būtume spaudinėję po tris bet kurio stulpelio lemputes. Belieka pasiklausti aritmetikos ir logikos specialistų, ko gi dar mums trūksta „iki pilnos matematinės laimės ir logikos triumfo“.
Atsakymas šiuo atveju yra visai aiškus – mums trūksta teisingo pasamprotavimo apie tai, kad greičiau mes visų minusų visais pliusais paversti niekaip negalėtume.
Kadangi sugebame viską apversti trimis spustelėjimais, tai apversti greičiau, reikštų viską apversti vienu arba dviem spustelėjimais.
Vieno spustelėjimo tikrai per maža, nes vienas spustelėjimas teapverčia tik 5 lempučių būsenas, o jų skydelyje iš viso yra 9. Na o kaip būtų su dviem spustelėjimais? Dviem spustelėjimais jau galima paveikti 5 + 5, arba jau net 10 lempučių būsenas, o tai . daugiau negu 9. Deja, su 2 spustelėjimais nesusitvarkysime, nes galime tai paaiškinti net dviem būdais:
(a) Kad ir kaip bepaspaustume dvi skirtingas lemputes, visada rasis (bent viena) lemputė, kurios būsenos nekeičia nei vienas, nei kitas paspaudimas .
(b) Kad ir kaip bepaspaustume dvi skirtingas lemputes, visada rasis (bent viena) lemputė, kurios būseną pirmasis paspaudimas pakeičia į priešingą, o kitas „atkeičia atgal“ (vadinasi, ji lieka nepakitusi).
Atsakymas. Reikės mažiausiai 3 spustelėjimų.

13. Atnešusi kontrolinį darbą mokytoja pasakė, kad 15 mokinių gavo iš jo „4“ arba „5“, o mokinių skaičius, kurie gavo iš kontrolinio darbo ”3“, yra 5-iais didesnis už tų, kurie gavo iš kontrolinio darbo „4“. Kiek mokinių dalyvavo kontroliniame darbe, jeigu visų jų gautųjų balų suma yra lygi 100. (Galimi įvertinimai yra: 2, 3, 4 ir 5).

Sprendimas. Simboliu x pažymėkime mokinių, kurie per kontrolinį gavo „4“. Tada pagal sąlygą „5“ gavo $15 - x$, o „3“ gavo $x + 5$ mokiniai. Todėl jeigu y yra „2“ gavusių mokinių skaičius, tai bendras kontrolinį rašiusių mokinių skaičius yra $(15 - x) + x + (x + 5) + y = 20 + x + y$, o jų gautųjų balų suma yra $5(15 - x) + 4x + 3(x + 5) + 2y = 90 + 2x + 2y) = 100$. Iš čia seka, kad $x + y = 5$ ir todėl kontrolinį darbą rašė $20 + x + y = 20 + 5 = 25$ mokiniai.
Atsakymas. Kontrolinį darbą rašė 25 mokiniai.

14. Petras nori įrašyti sveikuosius skaičius į visus lentelės 4 x 4 langelius po vieną skaičių į kiekvieną langelį taip, kad bet kurių trijų iš eilės einančių bet kurios eilutes ar bet kurio stulpelio

skaičių būtų visada viena ir ta pati. Tris skaičius jis jau įrašė į lentelę tokiu būdu kaip tai yra parodyta šalia esančiame piešinyje.

	2		
			3
4			
		?	

Kokį skaičių Petras turėtų įrašyti į „?“ pažymėtą langelį?

Sprendimas. Tarkime, kad Petras turi įrašyti į vieną eilutę arba į vieną stulpelį keturis skaičius *a, b*, *c* ir *d* (išvardinta eile). Tada pagal sąlygą $a+b+c=b+c+d$, iš kur seka, jog $a=d$. Kitaip sakant, skaičiai, esantys vienoje eilutėje ar viename stulpelyje, bet skirtinguose jos kraštuose turi būti lygūs. Atskiru atveju pirmas skaičius antroje eilutėje turi būti lygus 3, o antras skaičius ketvirtoje eilutėje turi būti lygus 2.

Sakykime, kad pirmas skaičius ketvirtoje eilutėje yra lygus x, tada

	2		
3			3
4			
x	2	?	

Toliau mes matome, jog turi galioti nelygybė $x + 2 + ? = 3 + 4 + x$, iš kur seka, kad $? = (7 + x) - (x + 2) = 5$.
Atsakymas. 5.

15. Iš skaitmenų 2, 5 ir 8 buvo sudarytas 7-ženklis skaičius (pastebėsime, jog galėjo nutikti ir taip, kad kai kurių iš nurodytųjų skaitmenų sudarytame 7-ženkliame skaičiuje nėra). Ar gali tas sudarytasis skaičius dalintis iš 15?

Sprendimas. Pastebėkime, kad visi nurodytieji skaitmenys duoda liekaną 2, jeigu mes juos dalinsime iš 3. Todėl ir sudaromojo 7-ženklio skaičiaus skaitmenų suma nesidalins iš 3, nes ji turės pavidalą $3\cdot k + 7\cdot 2 = 3\cdot k + 14$ su tam tikru natūraliuoju k. Taigi pagal dalumo iš 3 požymį ir pats 7-ženklis skaičius nesidalija iš 3 ir tuo labiau jis nesidalija iš 15.
Atsakymas. Nurodytasis 7-ženklis skaičius negali dalintis iš 15.

16. Lygybėje MAMA · LĖ = 10 · LĖLĖ skirtingos raidės atitinka skirtingiems, o vienodos raidės – vienodiems skaitmenims. Nustatykite, kam galėtų būti lygus skaičius M + A.

Sprendimas. 4-ženklis skaičius MAMA yra sudarytas iš dviejų vienodų dalių MA, o kitas 4-ženklis skaičius LĖLĖ – iš dviejų vienodų dalių LĖ. Tai reiškia, jog keturženklis skaičius MAMA dalijasi iš dviženklio skaičiaus MA, o keturženklis skaičius LĖLĖ dalijasi iš dviženklio skaičiaus LĖ. Padalinę gausime

$$\text{MAMA} = \text{MA}\cdot 101$$

ir

$$\text{LĖLĖ} = 101 \cdot \text{LĖ}.$$

Kitaip sakant,

$$\text{MA} \cdot 101 \cdot \text{LĖ} = 10 \cdot \text{LĖ} \cdot 101.$$

Suprastinus gauname

$$\text{MA} = 10,$$

o tai reiškia, kad skaičius M + A = 1 + 0 = 1.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Jonas lygiomis dienos porcijomis statinaitę giros išgertų per 10 dienų, o Andrius – per 14 dienų. Per kiek dienų jie išgertų statinaitę giros gerdami abudu kartu?

2. Petras norėtų pirkti knygą, bet jis visai neturi pinigų. Todėl jis kreipėsi pagalbos į tėtį ir į du savo brolius – jaunesnįjį ir vyresnįjį ir jų padedamas jis tą knygą nusipirko. Yra žinoma, jog jo tėtis davė pusę tos sumos, kurią davė abudu Petro broliai, vyresnysis brolis davė trečiąją dalį to, ką davė tėtis ir jaunesnysis brolis, kuris tiesiog iš karto davė 10 eurų. Kiek gi kainuoja ta knyga?

3. Koks yra pats mažiausias natūralusis skaičius, kurį galima dviem būdais užrašyti trijų natūraliųjų skaičių suma taip, jog visi 6 dėmenys yra skirtingi.

4. Raskite tris iš eilės einančius natūraliuosius skaičius, kad jų suma baigtųsi skaičiumi 2023. Koks yra toksai pats mažiausias tokių skaičių trejetas?

5. Tenisininkas Petras skaičiuoja savo laimėtų mačų (nuo visų jo sužaistųjų mačų) procentą. Prieš paskutinį turnyrą, kuriame Petras laimėjo visus mačus, tas procentas buvo lygiai 25 procentai, o po to paskutinio turnyro jis pasidarė lygus lygiai 75 procentams.

Nustatykite, kelis kartus visų Petro paskutiniame turnyre laimėtų mačų skaičius yra didesnis už jo visų iki to turnyro jo sužaistų (laimėtų ir pralaimėtų) mačų skaičių.

6. Ar galima į kvadratinės lentelės 5 x 5 langelius įrašyti visus skaičius nuo 1 iki 25 (po vieną skaičių į kiekvieną langelį) taip kad skaičių suma kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir abiejose įstrižainėse būtų nelyginė?

7. Į kiekvieną lentelės 3 x 3 langelį įrašyta po teigiamą skaičių tokiu būdu, kad visų trijų kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio skaičių sandauga yra lygi 1, o visų keturių bet kurio 2 x 2 kvadrato skaičių sandauga yra lygi 2. Nustatykite, koks skaičius yra įrašytas centriniame lentelės langelyje.

8. Mokytojas nupiešė lentoje stačiakampį ir padalino jį į 4 mažesnius stačiakampius *A*, *B*, *C* ir *D* (žiūrėkite piešinį).

A	*C*
B	*D*

Tada mokytojas pakvietė prie lentos Martyną ir pasiūlė jam išspręsti tokį uždavinį: „Tarp skaičių 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 18 kažkurie keturi skaičiai reiškia stačiakampių A, B, C ir D plotus; be to, dar yra žinoma, kad tie visi plotai yra skirtingi. Ar galėtum nurodyti, kokie yra tie 4 skaičiai?“

Padėkite Martynui išspręsti mokytojo jam pasiūlytą uždavinį. Ar tai padaryti yra įmanoma?

9. Tėvas parnešė sūnui 4 natūraliuosius skaičius ir paprašė sūnaus visaip sudėti juos po du skirtingus skaičius visais galimais būdais. Sūnus sudėjo ir pradėjo 6-šias gautąsias sumas rašyti iš eilės. Jis tespėjo užrašyti tik 5-ias iš 6-ių gautųjų sumų

10, 12, 14, 16, 17,

kai tėvas, pasižiūrėjęs, ką jis ten rašo, pasakė, kad jis bus kažką sumaišęs. Kuris iš jų yra teisus?

10. Utopijos fermoje fermeris Svajūnas turi lauką, kuriame esančios žolės kiekis kasdien padidėja po tiek pat. Šešioms karvėms užtruktų 3 pilnas dienas nuėsti visą viso lauko žolės kiekį, o trys karvės tą patį padarytų per 7 pilnas dienas. Laikant, kad fermerio Svajūno karvės suėda visos kasdien po tiek pat šieno, kiek laiko užtruktų 1 karvei nuėsti visą to lauko šieną?

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2023 m. gruodžio 10 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA