



PASVALIO KRAŠTO
23-IOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalio Petro Vileišio gimnazija, 2023 m. lapkričio 24 d.

UŽDAVINIAI
jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Raskite bent vieną didesnių už 10 sveikųjų skaičių trejetą (x, y, z) , kuris tenkina lygybę
$$x^2 + y^3 = z^2.$$
2. Šachmatų lentos langelius sugrupuokite į poras taip, kad atstumas tarp kiekvienos poros langelių centrų būtų lygus 5, jei langelių kraštinių ilgiai lygūs 1.
3. Tegų m, n ir p yra laisvai pasirinkti skirtingi sveikieji skaičiai. Ar įmanoma juos įrašyti vietoj q_1, q_2 ir q_3 taip, kad lygtis
$$x^2 + 2q_1x + 3(q_2 + q_3) = 0$$
turėtų bent vieną sprendinį?
4. Įrodykite, kad jei nelygybės $x^2 + px + q < 0$ sprendinių aibėje yra ne mažiau kaip trys sveikieji skaičiai, tai $D = p^2 - 4q > 4$.
5. Raskite $x + y$, jei $(x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2}) = 1$.
6. Įrodykite, kad esant bet kuriam realiajam skaičiui x galioja nelygybė
$$x^{12} - x^9 + x^4 - x^3 + 1 > 0.$$
7. Visų natūraliųjų skaičių nuo 101 iki 150 sandauga P lygi $10^k \cdot p$; čia k ir p yra natūralieji skaičiai, o p nesidalija iš 10. Padalijus p iš 2^n , gautas natūralusis skaičius. Raskite didžiausią natūraliąją n reikšmę.
8. Aistis tam tikra tvarka ratu surašė 12 skaičių: 1, 2, 3, ..., 12. Bet kurių dviejų gretimų skaičių skirtumas (iš didesnio atimant mažesnį) yra 2 arba 3. Raskite visas gretimų skaičių a ir b poras (a, b) , kad a būtų lyginis skaičius ir galiotų nelygybė $a < b$.
9. Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėtas taškas D , o kraštinėje BC – taškas E taip, kad trikampių BED , AED ir AEC plotai yra lygūs. Raskite santykius $AD:DB$ ir $BE:EC$.
10. Taškai E ir F yra trikampio ABC išorėje, o trikampiai ABF ir ACE yra lygiakraščiai. Įrodykite, kad $BE = CF$.



PASVALIO KRAŠTO
23-IOJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalio Petro Vileišio gimnazija, 2023 m. lapkričio 24 d.

UŽDAVINIAI
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Raskite bent vieną didesnių už 100 sveikųjų skaičių trejetą, kuris tenkina lygybę
$$x^2 + y^3 = z^2.$$
2. Šachmatų lentos langelius sugrupuokite į poras taip, kad atstumas tarp kiekvienos poros langelių centrų būtų lygus 5, jei langelių kraštinių ilgiai lygūs 1.
3. Įrodykite, kad jei $0 < x < \frac{1}{3}$, tai $(1-x)(1-2x)(1-3x) < \frac{1}{1+6x}$.
4. Išspręskite lygčių $x^3 - 5 \cdot \frac{y^2}{x} = \frac{6}{y}$ ir $y^3 - 5 \cdot \frac{x^2}{y} = \frac{6}{x}$ sistemą.
5. Raskite lygčių $7x + yz = 1774$ ir $7y + xz = 1791$ sistemos sveikuosius sprendinius.
6. Įrodykite, kad skaičių sekos $\{x_n\}$: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt{x_n}}$, $n \geq 1$, nariai, pradedant antru, tenkina nelygybę $x_n > \sqrt[3]{n^2}$.
7. Kiek yra triženklių natūraliųjų skaičių n , kuriems esant bent vienas iš skaičių $n^3 + 3n^2 + 2n$ ir $n^2 - 4$ dalijasi iš 7?
8. Visų natūraliųjų skaičių nuo 101 iki 200 sandauga P lygi $10^k \cdot p$; čia k ir p yra natūralieji skaičiai, o skaičius p nesidalija iš 10. Padalijus p iš 2^n , gautas natūralusis skaičius. Raskite didžiausią natūraliąją n reikšmę.
9. Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėtas taškas D , o kraštinėje BC – taškas E taip, kad trikampių BED , AED ir AEC plotai yra lygūs. Raskite santykius $AD:DB$ ir $BE:EC$.
10. Rombo $ABCD$ kampas A yra smailusis. Per rombo įstrižainių susikirtimo tašką O nubrėžtos dvi tiesės: viena tiesė kraštines AB ir CD kerta atitinkamai taškuose M ir K , o kita tiesė kerta kraštines BC ir AD atitinkamai taškuose H ir P ; be to, tiesė PH yra statmena kraštinėms AD ir BC , kampas POK lygus rombo kampui A .
Įrodykite, kad keturkampis $PMHK$ yra stačiakampis.