L I E T U V O S J A U N Ų J Ų M A T E M A T I K Ų M O K Y K L A

VII. DIOFANTINĖS LYGTYS

(2022–2024)

Teorinę medžiagą parengė bei septintąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Aivaras Novikas

Prisiminkime: kintamojo x **daugianariu** (arba polinomu) vadinamas reiškinys, turintis pavidalą $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, taigi gaunamas kintamojo x laipsnius su neneigiamais sveikaisiais rodikliais ($x^0 = 1, x^1 = x, x^2, x^3$ ir t. t. iki kurio nors x^n) padauginant iš duotų skaičių – konstantų (atitinkamai iš a_0, a_1, a_2, a_3 ir t. t. iki a_n) ir tokias sandaugas sudedant. Prilygindami daugianarį skaičiui 0, gauname **algebrinę lygtį** su nežinomuoju x. Panašiai galima gauti ir **algebrinę lygtį su keliais nežinomaisiais**: tų nežinomųjų laipsniai su neneigiamais sveikaisiais rodikliais bet kaip dauginami tarpusavyje ir dar dauginami iš konstantų, o tokių sandaugų suma prilyginama skaičiui 0. Pavyzdžiui, $x^4 + 11xy^3 - x + 2y + 5 = 0$ yra algebrinė lygtis su nežinomaisiais x ir y, o $11x_1^3x_2^2 + x_2^2 - 6x_3^5x_1^7 - 3x_1^5x_2x_3^8 - x_2x_3 - 4x_1 + 7 = 0$ yra algebrinė lygtis su nežinomaisiais x_1, x_2 ir x_3.

Algebrinės lygties **koeficientai** yra tos konstantos, iš kurių padaugintos nežinomųjų laipsnių sandaugos. Pavyzdžiui, lygties $x^4 + 11xy^3 - x + 2y + 5 = 0$ koeficientai yra $1, 11, -1, 2, 5$. Bendru atveju koeficientai gali būti bet kokie realieji skaičiai. Čia nagrinėsime tik algebrines lygtis, kurių koeficientai yra sveikieji skaičiai, o nežinomųjų reikšmės taip pat nagrinėjamos tik sveikosios, t. y. lygtį norima išspręsti ne bet kokiais, o tik sveikaisiais skaičiais. Tokios algebrinės lygtys vadinamos **diofantinėmis**. Taip pat diofantinėmis vadinsime tas lygtis, kurių dešinėje pusėje yra nenulinių narių, tačiau kurios įgyja reikiamą algebrinės lygties su sveikaisiais koeficientais pavidalą, visus narius perkėlus į kairiąją lygybės pusę. Išspręsti diofantinę lygtį reiškia rasti visus jos sveikuosius sprendinius arba įrodyti, kad jų nėra. Sprendžiant tokias lygtis, yra svarbūs sveikieji skaičiai ir jų dalumo savybės. Todėl diofantinės lygtys priskiriamos ne algebrai, bet kitai matematikos sričiai – skaičių teorijai.

1 pavyzdys. Kad išspręstume diofantinę lygtį $x^2 + 4x - 5y - 2024 = 0$, pasiremsime ne tik algebriniu lygties pertvarkymu – pilnojo kvadrato išskyrimu

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 - 5y - 2024 = 0, \qquad (x + 2)^2 = 5y + 2028,$$

bet ir dalumo iš 5 savybėmis. Sveikojo skaičiaus kvadratas $(x + 2)^2$ turi dalytis iš 5 su ta pačia liekana kaip $5y + 2025 + 3$, taigi su liekana 3. Jei $x + 2$ dalijasi iš 5 su liekana r, tai pažymėkime $x + 2 = 5k + r$ (skaičius k sveikasis). Tada skaičiaus $(x + 2)^2 = 25k^2 + 10kr + r^2$ dalybos iš 5 liekana 3 tokia pati kaip skaičiaus r^2. Tačiau čia $r = 0, 1, 2, 3$ arba 4 (dalybos iš 5 liekana negali būti kitokia), ir jokiu atveju r^2 dalybos iš 5 liekana nėra lygi 3. Vadinasi, duotoji diofantinė lygtis **sprendinių neturi** (prisiminkime, kad ieškome tik sveikųjų sprendinių (x, y)).

2 pavyzdys. Analogiškai (žr. 1 pavyzdį) spręsdami diofantinę lygtį $x^2 + 4x - 5y - 2027 = 0$, taigi lygtį $(x + 2)^2 = 5y + 2031$, galime atmesti r reikšmes 0, 2 ir 3 (tada r^2 dalijasi iš 5 su kita liekana nei skaičius $5y + 2030 + 1$). Lieka du atvejai $x + 2 = 5k + 1$ ir $x + 2 = 5k + 4$. Pirmuoju atveju $x = 5k - 1$,

$$(5k + 1)^2 = 5y + 2031, \qquad 5y = 25k^2 + 10k + 1 - 2031, \qquad y = 5k^2 + 2k - 406.$$

Analogiškai antruoju atveju $x = 5k + 2$, $y = 5k^2 + 8k - 403$. Čia k yra bet koks sveikasis skaičius. Taip gauname **atsakymą** – be galo daug lygties sprendinių

$$(x, y) = (5k - 1,\ 5k^2 + 2k - 406),\ k \in \mathbb{Z}, \quad \text{ir} \quad (x, y) = (5k + 2,\ 5k^2 + 8k - 403),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Jei norėtume gauti vieną konkretų lygties sprendinį – **atskirąjį sprendinį**, tai pakaktų pasirinkti konkrečią k reikšmę. Pavyzdžiui, $(x, y) = (5 \cdot 3 - 1,\ 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 406) = (14, -355)$ ir $(x, y) = (5 \cdot (-10) + 2,\ 5 \cdot (-10)^2 + 8 \cdot (-10) - 403) = (-48,\ 17)$ yra duotosios lygties atskirieji sprendiniai.

Net paprastai atrodančios diofantinės lygtys gali būti labai sudėtingos. Pavyzdžiui, labai sunkus įrodyti toks teiginys, vadinamas Didžiąja Ferma teorema: jokia diofantinė lygtis $x^n + y^n = z^n$, kur $n > 2$ yra duotas natūralusis skaičius, neturi kitų sprendinių, išskyrus akivaizdžius sprendinius, kuriems vienas iš nežinomųjų lygus 0. Nors šis teiginys buvo suformuluotas apie 1637 m., bet lygčiai $x^5 + y^5 = z^5$ jis buvo įrodytas tik 1825 m., o visoms n reikšmėms – tik 1994 m. ir tik naudojant pačią šiuolaikiškiausią aukštąją matematiką. Tuo tarpu lygtis $x^5 + y^5 = z^5 + t^5$ vis dar neišspręsta ir 2023 m.

Visgi kai kurias diofantines lygtis išspręsti nėra taip sunku. Galima net išskirti kai kuriuos lygčių tipus ir lygčių sprendimo būdus, tinkamus visoms to paties tipo lygtims. Čia apsiribosime lygtimis su dviem nežinomaisiais x ir y. Visų pirma, panagrinėkime **tiesines** diofantines lygtis – tokias, kurios gaunamos kiekvieno nežinomojo pirmąjį laipsnį padauginus iš konstantos ir tokių sandaugų sumą prilyginus konstantai. Tiesinė lygtis su nežinomaisiais x ir y turi pavidalą $ax + by = c$.

3 pavyzdys. Išspręskime tiesinę diofantinę lygtį $16x + 7y = 1$. Gana lengva atspėti jos atskirąjį sprendinį: tikrindami galimas $16x$ reikšmes ± 16, ± 32, ± 48, ..., pastebėkime, kad skaičius $48 = 16 \cdot 3$ nuo $7 \cdot 7 = 49$ skiriasi per 1. Pagal lygybę $-16 \cdot 3 + 7 \cdot 7 = 1$ gauname lygties sprendinį $(x_0, y_0) = (-3, 7)$. Kad rastume visus sprendinius, taip pertvarkykime duotąją lygtį:

$$16x + 7y = -16 \cdot 3 + 7 \cdot 7, \qquad 16x + 16 \cdot 3 = 7 \cdot 7 - 7y, \qquad 16(x+3) = 7(7-y).$$

Kadangi skaičiai 16 ir 7 yra tarpusavyje pirminiai (jų didžiausias bendrasis daliklis lygus 1), tai $x + 3$ turi dalytis iš 7. Pažymėkime $x + 3 = 7k$. Tada $x = 7k - 3$, $16 \cdot 7k = 7(7 - y)$, $16k = 7 - y$, $y = -16k + 7$. Čia k yra bet koks sveikasis skaičius.

Ats.: $(x, y) = (7k - 3, -16k + 7)$, $k \in \mathbb{Z}$.

4 pavyzdys. Išspręskime tiesinę diofantinę lygtį $156975x + 51317y = c$, kai $c = 13$ ir kai $c = 14$. Atskirojo sprendinio lengvai atspėti čia greičiausiai nepavyks. Kad jį rastume, pažymėkime $a = 156975$, $b = 51317$. Pradėkime nuo šių dviejų skaičių ir toliau vis keiskime juos tokiu veiksmu: vienas skaičius dalijamas iš kito su liekana ir yra pakeičiamas gautąja dalybos liekana. Veiksmas kartojamas, kol gaunama liekana 0. Pirmuoju tokiu veiksmu didesnį skaičių a dalijame iš mažesnio skaičiaus b: dalmuo lygus 3, todėl liekana lygi $a - 3b = 3024$. Dabar turime skaičius b ir $a - 3b$. Antruoju veiksmu dalijame b iš $a - 3b$: dalmuo lygus 16, todėl liekana lygi $b - 16(a - 3b) = 49b - 16a = 2933$. Toliau dalijame:

- $a - 3b$ iš $49b - 16a$: dalmuo 1, liek. $(a - 3b) - (49b - 16a) = 17a - 52b = 91$;
- $49b - 16a$ iš $17a - 52b$: dalmuo 32, liek. $(49b - 16a) - 32(17a - 52b) = 1713b - 560a = 21$;
- $17a - 52b$ iš $1713b - 560a$: dalmuo 4, liek. $(17a - 52b) - 4(1713b - 560a) = 2257a - 6904b = 7$;
- pagaliau, dalydami 21 iš 7, gauname liekaną 0.

Analogišką kaip šiame pavyzdyje veiksmų seką galima atlikti, turint bet kokius pradinius sveikuosius skaičius a ir b (jei jie būtų neigiami, vietoj jų imtume jų modulius). Yra įrodyta: kad ir kokie būtų a ir b, taip gauta paskutinė nenulinė liekana yra ne kas kita, bet skaičių a ir b didžiausias bendrasis daliklis $\mathrm{DBD}(a, b)$. Toks jo radimo būdas vadinamas **Euklido algoritmu**. Tiesinės diofantinės lygties $ax + by = c$ kairioji pusė visada dalijasi iš $\mathrm{DBD}(a, b)$, todėl tokia lygtis neturi sprendinių, kai c iš $\mathrm{DBD}(a, b)$ nesidalija.

Mūsų atveju $\mathrm{DBD}(a, b) = 7$, tad duotoji lygtis $156975x + 51317y = 13$ sprendinių neturi. Tuo tarpu atveju $c = 14$ atskirąjį sprendinį gauname, lygybę $2257a - 6904b = 7$ padauginę iš 2:

$$4514a + (-13808)b = 14, \qquad (x_0, y_0) = (4514, -13808).$$

Turint atskirąjį sprendinį, visus sprendinius toliau galima rasti panašiai kaip 3 pavyzdyje. Tik čia lygtį būtina padalyti iš $\mathrm{DBD}(a, b) = 7$: taip vietoj a ir b gausime skaičius $\frac{a}{7} = 22425$ ir $\frac{b}{7} = 7331$, kurie yra tarpusavyje pirminiai (3 pavyzdyje buvo svarbu, kad $\mathrm{DBD}(7, 16) = 1$). Taigi

$$156975x + 51317y = 14 = 156975 \cdot 4514 + 51317 \cdot (-13808) \ \ |:7,$$
$$22425x + 7331y = 22425 \cdot 4514 + 7331 \cdot (-13808),$$
$$22425(x - 4514) = 7331(-y - 13808), \qquad x - 4514 = 7331k, \qquad \text{tada } -y - 13808 = 22425k.$$

Ats.: $\emptyset$, kai $c = 13$; $(x, y) = (7331k + 4514, -22425k - 13808)$, kur $k \in \mathbb{Z}$, kai $c = 14$.

Toliau nagrinėsime diofantines lygtis su nežinomaisiais x ir y, kuriose be narių, randamų tiesinėse lygtyse, dar gali būti antrojo laipsnio nariai x^2, y^2 ir xy, padauginti iš konstantų, taigi nagrinėsime lygtis, kurioms galima suteikti pavidalą

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Jei čia $a = b = c = 0$, tai lygtis tiesinė. Priešingu atveju tokia diofantinė lygtis vadinama **kvadratine**.

5 pavyzdys. Lengva išspręsti diofantinę lygtį $xy = 20$. Čia x turi būti sveikasis skaičius, iš kurio dalijasi skaičius 20. Taigi $x = \pm 1$, ± 2, ± 4, ± 5, ± 10, ± 20 ir atitinkamai $y = \pm 20$, ± 10, ± 5, ± 4, ± 2, ± 1. Taigi lygtis turi 12 sprendinių – tiek, kiek skaičius 20 turi (sveikųjų) daliklių.

Diofantinė lygtis $xy = 720$ turi daugiau sprendinių. Jų nevardysime, bet išsiaiškinkime, kiek jų yra. Kadangi skaičiaus 720 skaidinys pirminiais daugikliais yra $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, tai visus jo teigiamus daliklius gausime, reiškinyje $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ laisvai pasirinkdami tokias reikšmes: $a = 0, 1, 2, 3$ arba 4; $b = 0, 1$ arba 2; $c = 0$ arba 1. Skaičių a galime pasirinkti 5 būdais, skaičių b – trimis būdais, skaičių c – dviem būdais. Tad gauname $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ teigiamų daliklių – ir dar tiek pat neigiamų. Vadinasi, skaičius 720 turi iš viso 60 daliklių, o lygtis $xy = 720$ turi 60 sprendinių.

6 pavyzdys. Išspręskime diofantinę lygtį $3xy - y = 20$. Užrašykime ją pavidalu $y(3x - 1) = 20$. Taigi skaičiai y ir $3x - 1$ yra skaičiaus 20 dalikliai (plg. su 5 pavyzdžio lygtimi $xy = 20$). Šiuo atveju sprendinių yra mažiau nei 12, nes ne visi dalikliai tinka kaip $3x - 1$ reikšmės. Prie tinkamos daliklio reikšmės pridėjus skaičių 1, turi išeiti skaičius $3x$, dalus iš 3. Todėl tinka tik $3x - 1 = -1, 2, -4, 5, -10$ ir 20. Kiekvienu iš 6 atvejų randame $x = (3x - 1 + 1) : 3$ ir $y = 20 : (3x - 1)$.

Ats.: $(x, y) = (0, -20), (1, 10), (-1, -5), (2, 4), (-3, -2), (7, 1)$.

7 pavyzdys. Išspręskime diofantinę lygtį $5xy - 2x + 3y - 10 = 0$. Ją vėlgi pertvarkykime, kad matytųsi konkretus skaičius, kurio daliklius pakaks perrinkti. Pirmiausiai iškelkime prieš skliaustus x:

$$x(5y - 2) + 3y - 10 = 0.$$

Vienur lygtyje turime $5y - 2$, o kitur $3y$. Kad ir čia gautume $5y - 2$, padauginkime lygtį iš 5:

$$5x(5y - 2) + 3 \cdot 5y - 50 = 0, \qquad 5x(5y - 2) + 3(5y - 2) + 2 \cdot 3 - 50 = 0,$$
$$(5x + 3)(5y - 2) = 44 = 2^2 \cdot 11, \qquad 5x + 3 = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 11, \pm 22, \pm 44.$$

Tinka tik $5x + 3 = -2$ ir -22. Atitinkamai $5y - 2 = -22$ ir -2. Liko išreikšti x ir y.

Ats.: $(x, y) = (-1, -4), (-5, 0)$.

8 pavyzdys. Nustatykime, kiek sprendinių turi diofantinė lygtis $xy - 7x + 8y - 2081 = 0$ (jų neišvardydami). Pertvarkykime lygtį taip:

$$x(y - 7) + 8y - 2081 = 0, x(y - 7) + 8(y - 7) + 8 \cdot 7 - 2081 = 0,$$
$$(x + 8)(y - 7) = 2025 = 25 \cdot 81 = 5^2 \cdot 3^4.$$

Pažymėkime $X = x + 8$, $Y = y - 7$. Diofantinė lygtis $XY = 2025$ turi tiek sprendinių, kiek skaičius 2025 turi daliklių. Kiekvieną sprendinį (X, Y) atitinka lygiai vienas pradinės lygties sprendinys $(x, y) = (X - 8, Y + 7)$. Taigi liko suskaičiuoti skaičiaus 2025 daliklius. Tai visi įmanomi skaičiai $\pm 5^a \cdot 3^b$, kur $a = 0, 1$ arba 2, o $b = 0, 1, 2, 3$ arba 4. Turime $3 \cdot 5$ tokius teigiamus daliklius, o iš viso $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ daliklių bei atitinkamai 30 sprendinių.

Ats.: 30 sprendinių.

9 pavyzdys. Išspręskime diofantinę lygtį $3x^2 + 5xy - 7x + y + 7 = 0$. Šioje kvadratinėje lygtyje nėra nario ... y^2. Sugrupuokime narius, kuriuose yra y, o likusius narius perkelkime į kitą lygybės pusę:

$$y(5x + 1) = -3x^2 + 7x - 7.$$

Taigi čia iš esmės turime rasti tas sveikąsias x reikšmes, kurioms $-3x^2 + 7x - 7$ dalijasi iš $5x + 1$. Pažymėkime $a = 5x + 1$. Tam, kad reiškinį $-3x^2 + 7x - 7$ galėtume patogiai, be trupmenų išreikšti per a, jį padauginkime iš 5^2:

$$25ay = 25y(5x + 1) = -3 \cdot 5^2 \cdot x^2 + 7 \cdot 5^2 \cdot x - 5^2 \cdot 7 = -3 \cdot (5x)^2 + 35 \cdot 5x - 175 =$$
$$= -3(a - 1)^2 + 35(a - 1) - 175 = -3a^2 + 6a - 3 + 35a - 35 - 175 = -3a^2 + 41a - 213.$$

Kadangi $-3a^2 + 41a - 213$ turi dalytis iš $a = 5x + 1$, tai turi dalytis ir skaičius $213 = 3 \cdot 71$ (skaičius 71 pirminis). Taigi $5x + 1 = \pm 1, \pm 3, \pm 71, \pm 213$. Tinka tik $5x + 1 = 1$ ir $5x + 1 = 71$. Tada atitinkamai $x = 0$ ir $x = 14$, o $y = \frac{-3x^2+7x-7}{5x+1}$ lygu -7 abiem atvejais.

Ats.: $(x, y) = (0, -7), (14, -7)$.

10 pavyzdys. Išspręskime diofantines lygtis a) $x^2 + 5y^2 = 129$; b) $x^2 + 5y^2 = 13129139$.

a) Lygtis tampa lengva pastebėjus, kad visada $x^2 + 5y^2 \geq 5y^2$ ir todėl pakanka patikrinti tik tas y reikšmes, kurioms $129 \geq 5y^2$. Gali tikti tik $y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$, o jei $|y| \geq 6$, tai $5y^2 > 129$. Lygtyje įrašę $y^2 = 0, 1, 4, 9, 16, 25$, sveikąją x reikšmę gauname, kai $y^2 = 16$ ir 25. Atitinkamai $x^2 = 7^2$ ir 2^2. Visais įmanomais būdais pasirinkdami x ir y ženklus, gauname aštuonis sprendinius.

Ats.: $(x, y) = (7, \pm 4), (-7, \pm 4), (2, \pm 5), (-2, \pm 5)$.

b) Jei a) dalies lygtyje skaičių 129 pakeisime skaičiumi 123, tai lygtis sprendinių neturės. Tai ir vėl galima patikrinti, atliekant reikšmių perranką. Turint skaičių 13129139, tokia perranka užtruktų ilgiau. Tačiau čia be jokios perrankos galima įrodyti, kad atitinkama lygtis sprendinių neturi. Tam pakanka pastebėti, kad sveikojo skaičiaus kvadratas visada dalijasi iš 4 su liekana 0 arba 1. Iš tiesų, jei sveikasis skaičius a lyginis, tai skaičius a^2 dalijasi iš 4, o jei nelyginis, tai iš 4 dalijasi $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$, nes lyginiai yra abu skaičiai $a - 1$ ir $a + 1$. Taigi $x^2 + y^2$ dalybos iš 4 liekana gali būti $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$ arba $1 + 1 = 2$. Ji sutampa su $x^2 + 5y^2 = x^2 + y^2 + 4y^2$ dalybos iš 4 liekana, bet negali būti lygi skaičiaus 13129139 dalybos iš 4 liekanai 3. Todėl diofantinė lygtis $x^2 + 5y^2 = 13129139$ sprendinių neturi.

Ats.: $\emptyset$.

11 pavyzdys. Išspręskime diofantines lygtis a) $x^2 - 25y^2 = 119$; b) $x^2 - 25y^2 = 1191122$.

a) Duotosios lygties analogiškai kaip $x^2 + 5y^2 = 129$ neišspręsime, bet vietoj to galime pasinaudoti kvadratų skirtumo formule:

$$(x - 5y)(x + 5y) = 119 = 7 \cdot 17, \text{ taigi } x - 5y = \pm 1, \pm 7, \pm 17, \pm 119 \text{ (aštuoni atvejai).}$$

Jei, pavyzdžiui, $x - 5y = -7$, tai $x + 5y = -17$ ir turime dviejų lygčių sistemą su dviem nežinomaisiais. Ją išsprendę, gauname $x = -12$, $y = -1$. Likusius septynis atvejus galima išnagrinėti analogiškai. Keturiais iš jų gaunamas sprendinys nėra sveikasis (skaičių $x + 5y$ ir $x - 5y$ skirtumas $10y$ išeina nedalus iš 10). Tad duotoji lygtis turi keturis sprendinius.

Ats.: $(x, y) = (-12, \pm 1), (12, \pm 1)$.

b) Kitaip nei a) dalyje, čia skaičiaus 1191122 daliklių neieškosime ir neperrinkinėsime. Galima įrodyti, kad lygtis sprendinių neturi, pasinaudojus dalumo iš 4 savybėmis (plg. su 10 pavyzdžio b) dalimi). Skaičius 1191122 turi būti lygus skaičių $x-5y$ ir $x+5y$ sandaugai. Šių dviejų skaičių suma $2x$ yra lyginis skaičius, todėl jie abu yra lyginiai arba abu yra nelyginiai. Pirmuoju atveju jų sandauga 1191122 turėtų dalytis iš 4, bet nesidalija, antruoju atveju – turėtų nesidalyti iš 2, bet dalijasi. Gautoji prieštara parodo, kad lygybė x^2- $-25y^2=1191122$ negalioja jokiems sveikiesiems x ir y.

Ats.: $\emptyset$.

12 pavyzdys. Įrodykime, kad diofantinė lygtis $x^2-3y^2=29$ neturi sprendinių. Čia anksčiau naudotas dalumas iš 4 nepadės. Prieštarą gausime, naudodami dalumą iš kito skaičiaus. Skaičius x^2 turi dalytis iš 3 su ta pačia liekana kaip 29, taigi su liekana 2. Jei x dalijasi iš 3 su liekana r, tai pažymėkime $x=3k+r$ (skaičius k sveikasis). Tada skaičiaus $x^2=9k^2+6kr+r^2$ dalybos iš 3 liekana tokia pati kaip skaičiaus r^2. Tačiau čia $r=0$, 1 arba 2, ir jokiu atveju r^2 dalybos iš 3 liekana nėra lygi 2. Atkreipsime dėmesį, kad analogiškai prieštarą buvo galima gauti ir 11 pavyzdžio b) dalyje, nagrinėjant dalybos iš 5 liekanas.

Nagrinėkime bet kokią diofantinę lygtį $x^2-dy^2=N$, kur $d>0$ ir N yra duoti skaičiai, o skaičius d nėra sveikojo skaičiaus kvadratas (jei būtų, tai lygtį būtų galima spręsti kaip 11 pavyzdžio a) dalyje). Yra įrodyta, kad jei tokia lygtis turi bent vieną sprendinį $(x,y)=(x_0,y_0)$, tai turi jų be galo daug. Be to, kiek norima didelių natūraliųjų tokios lygties sprendinių galima gauti taip:

1) nagrinėjama lygtis $x^2-dy^2=1$ ir randamas jos natūralusis sprendinys $(x,y)=(a,b)$; tokia lygtis turi akivaizdų sprendinį $(1,0)$, bet jis nėra natūralusis; visgi yra įrodyta, kad reikiamas natūralusis sprendinys visada egzistuoja, o bandyti jį atspėti galima, iš eilės perrenkant galimybes $y=1, 2, 3, ...$;

2) turint $x^2-dy^2=N$ natūralųjį sprendinį (x_0,y_0), nagrinėjami reiškiniai $\left(x_0+y_0\sqrt{d}\right)\cdot\left(a+b\sqrt{d}\right)^n$, kai $n=1, 2, 3, ...$; pasirinkus konkrečią n reikšmę ir tokį reiškinį atskliautus bei suprastinus, gaunama išraiška $x_n+y_n\sqrt{d}$; tada (x_n,y_n) yra $x^2-dy^2=N$ sprendinys; didinant n, gaunami kiek norima dideli x_n ir y_n.

Čia 2) dalį pagrindžia toks pastebėjimas: nurodytu būdu gavus $x_n+y_n\sqrt{d}=\left(x_0+y_0\sqrt{d}\right)\cdot\left(a+b\sqrt{d}\right)^n$, teisinga yra ir analogiška lygybė su pakeistais ženklais $\left(x_0-y_0\sqrt{d}\right)\cdot\left(a-b\sqrt{d}\right)^n=x_n-y_n\sqrt{d}$, o sudauginę abi lygybes, gauname

$$x_n^2-dy_n^2=(x_0^2-dy_0^2)\cdot(a^2-db^2)^n=N\cdot 1^n=N.$$

Dalyje 1) naudojama pagalbinė lygtis $x^2-dy^2=1$ (skaičius d natūralusis, bet nėra sveikojo skaičiaus kvadratas) vadinama **Pelio lygtimi**. **Yra įrodyta**, kad jos **visi** natūralieji sprendiniai gaunami kaip poros (x_n,y_n), kur $x_n+y_n\sqrt{d}=\left(a+b\sqrt{d}\right)^n$, kai $n=1, 2, 3, ...$, o (a,b) yra šios lygties natūralusis sprendinys su mažiausiu galimu $y=b$.

13 pavyzdys. Raskime diofantinės lygties $x^2-3y^2=73$ sprendinį (x,y), kuriam $x>50$. Tikrindami $y=1, 2, ...$, pirmiausiai pastebėkime, kad ši lygtis apskritai turi sprendinių: kai $y=3$, galima imti $x=10$. Taigi $(x_0,y_0)=(10,3)$. Savo ruožtu lygtis $x^2-3y^2=1$ turi lengvai atspėjamą natūralųjį sprendinį $(2,1)$. Tada be galo daug lygties $x^2-3y^2=73$ sprendinių gauname, imdami skaičius $\left(10+3\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^n$:

$$x_1+y_1\sqrt{3}=\left(10+3\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=29+16\sqrt{3},$$
$$x_2+y_2\sqrt{3}=\left(29+16\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=106+61\sqrt{3}\ \text{ ir t. t.}$$

Kaskart daugindami iš $2+\sqrt{3}$, gauname vis didesnius sprendinius $(29,16)$, $(106,61)$, $(395,228)$, ...

Ats.: pavyzdžiui, $(x,y)=(106,61)$ arba $(x,y)=(395,228)$.

14 pavyzdys. Jau matėme, kad kartais verta pertvarkyti turimą diofantinę lygtį, išskiriant pilnąjį kvadratą. Tuo pasinaudodami, išspręskime lygtis

a) $6x^2+10xy+5y^2+14x-80=0$; b) $x^2-y^2-x+7y-8=0$.

a) Lygtyje galima įžvelgti pilnąjį kvadratą $5y^2+10xy+5x^2=5(x+y)^2$. Pertvarkytoje lygtyje išskirkime dar vieną pilnąjį kvadratą:

$$0=5(x+y)^2+x^2+14x-80=5(x+y)^2+x^2+2\cdot 7x+7^2-7^2-80,$$
$$(x+7)^2+5(x+y)^2=129.$$

Pažymėję $X=x+7$, $Y=x+y$, gauname lygtį $X^2+5Y^2=129$. Ją jau esame išsprendę (žr. 10 pavyzdį). Tinka $(X,Y)=(7,\pm4)$, $(-7,\pm4)$, $(2,\pm5)$, $(-2,\pm5)$. Atitinkamai gauname pradinės lygties 8 sprendinius (x,y) pagal formules $x=X-7$ ir $y=Y-x$.

Ats.: $(x,y)=(0,\pm4)$, $(-14,18)$, $(-14,10)$, $(-5,10)$, $(-5,0)$, $(-9,14)$, $(-9,4)$.

b) Koeficientai prie x ir y nelyginiai, tad išskirdami pilnuosius kvadratus (atskirai pagal x ir y) ir imdami narius $-x$ ir $7y$ kaip dvigubas sandaugas, neišvengtume trupmenų. Jų išvengsime, padauginę lygtį iš 4:

$$(2x)^2 - 4x - (2y)^2 + 28y - 32 = 0,$$
$$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - (2y)^2 + 2 \cdot 2y \cdot 7 - 7^2 + 7^2 - 32 = 0,$$
$$(2x-1)^2 - 1 - (2y-7)^2 + 49 - 32 = 0, \quad (2x-1)^2 - (2y-7)^2 = -16,$$
$$(2x - 2y + 6)(2x + 2y - 8) = -16, \quad (x - y + 3)(x + y - 4) = -4.$$

Taigi $x - y + 3 = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. Atitinkamai $x + y - 4 = \mp 4, \mp 2, \mp 1$. Pavyzdžiui, jei $x - y + 3 = 1$, tai turime $x + y - 4 = -4$, o sudėję šias dvi lygybes, randame $2x - 1 = -3$ ir $x = -1$, $y = 1$. Analogiškai randame dar penkis sprendinius. Du iš jų nėra sveikieji (kai $x - y + 3 = \pm 2$), tad iš viso turime keturis sveikuosius sprendinius.

Ats.: $(x, y) = (-1, 1), (2, 6), (2, 1), (-1, 6)$.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1–7 uždaviniai. Išspręskite diofantines lygtis:

1. a) $x^2 - 7y - 17 = 0$;
b) $x^2 - 2x - 7y - 1107 = 0$;

2. a) $15x + 11y = 1$; b) $15x + 21y = 1$;

3. $225563x + 53313y = 39$;

4. $3xy + x - 2y - 29 = 0$;

5. $2x^2 - 7xy + x - 2y - 3 = 0$;

6. a) $x^2 + 9y^2 = 77777779$;
b) $4x^2 + 6xy + 3y^2 - 2x - 48 = 0$;

7. a) $x^2 - y^2 + 3x - 5y + 24 = 0$;
b) $x^2 - 5y^2 = 3$.

Užuomina. Uždaviniuose su a) ir b) dalimis viena iš dviejų lygčių neturi sprendinių.

8. Nustatykite diofantinės lygties $xy - 4x + 11y - 2024 = 0$ sprendinių skaičių.

9. Pasinaudodami Pelio lygtimi, raskite diofantinės lygties $x^2 - 7y^2 = 2$ sprendinį, kuriam $x > 800$.

10. Tarkime, kad $(x, y) = (A, B)$ yra diofantinės lygties $x^2 - 5y^2 - 12x + 35 = 0$ natūralusis sprendinys. Nustatykite keturias mažiausias galimas skaičiaus A reikšmes. *Užuomina*. Čia galima pertvarkyti duotąją lygtį ir pasiremti žinomais faktais apie Pelio lygtį.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2024 m. vasario 9 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA