LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

2. EKSTREMUMAI

(2023–2025)

Teorinę medžiagą parengė ir antrąją užduotį sudarė
doc. dr. Antanas Apynis

Pagal nusistovėjusią tradiciją ekstremumų (funkcijos maksimumo bei minimumo) paieškos uždaviniai mokyklinėje matematikoje nagrinėjami ir sprendžiami tik susipažinus su išvestine (išvestine funkcija) ir jos savybėmis.

Šioje jauniesiems matematikams skirtoje temoje funkcijos ekstremumams rasti pirmiausia ieškosime galimybės apsiriboti jau žinomais teiginiais bei žemesnėse klasėse įgytais įgūdžiais. Gana išsamiai susipažinsime tik su neneigiamų skaičių aritmetinį vidurkį $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ ir jų geometrinį vidurkį $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ siejančia nelygybe $A_n \geq G_n$; taip pat išnagrinėsime jos taikymo uždavinių.

1 pavyzdys. Taikant nelygybę $a^2 \geq 0,\ \ a \in \mathrm{R}$, visai nesunku rasti dviejų kintamųjų funkcijos $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x},\ \ x > 0,\ \ y > 0,$ mažiausią reikšmę. Kadangi

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 + 2 \geq 2,$$

jei $x > 0$ ir $y > 0$,

ir $\sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = 0,$ kai $x = y > 0,$ tai 2 yra mažiausia funkcijos reikšmė aibėje $\{(x; y) : x > 0, y > 0\}$.

2 pavyzdys. Taikydami nelygybę $a^2 \geq 0,\ \ a \in \mathrm{R}$, raskime funkcijos

$$f(x, y) = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right),\ \ x > 0,\ \ y > 0,$$

mažiausią reikšmę.

Sprendimas. Iš pradžių abi sumas sudauginkime, o tada gautą reiškinį tvarkykime panašiai kaip pirmame pavyzdyje. Gausime:

$$f(x, y) = (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 = 2 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 2 + \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 + 2 \geq 4.$$

Reikšmę $f(x, y) = 4$ funkcija įgyja taškuose $(x; y),\ \ y = x,\ \ x > 0$.

Taigi 4 yra mažiausia šios funkcijos reikšmė aibėje $\{(x; y) : x > 0, y > 0\}$.

3 pavyzdys. Įrodykime, kad trijų kintamųjų funkcijos

$$f(x, y, z) = (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

mažiausia reikšmė aibėje $\{(x; y; z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$ yra 9.

Įrodymas. Tegu $x>0,\ \ y>0,\ \ z>0.$ Tada

$$f(x,y,z)=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\left(1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1\right)=$$

$$=3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geq 3+2+2+2=9,$$

nes $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2,\ \ \frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2$ ir $\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geq 2,$ jei $x>0,\ \ y>0$ ir $z>0,$ o sumų reikšmės, lygios 2, įgyjamos esant sąlygoms (atitinkamai): $x=y,\ \ y=z$ ir $z=x;$ taigi kai $x=y=z>0.$

Vadinasi, 9 tikrai yra funkcijos $f(x,y,z)$ mažiausia reikšmė aibėje $\{(x;y;z): x>0, y>0, z>0\}.$

Kartais labai praverčia gebėjimas kvadratinį trinarį x^2+px+q užrašyti pavidalu

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Tada (jei $a\neq 0$)

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

4 pavyzdys. Raskime vieno kintamojo funkcijos $f(x)=\dfrac{5+2x-x^2}{2x-x^2-3}$ mažiausią reikšmę.

Sprendimas. Iš pradžių išsiaiškinkime funkcijos apibrėžimo sritį, nes turi galioti nelygybė $2x-x^2-3\neq 0.$ Kadangi

$$2x-x^2-3=-(x^2-2x+3)=-((x-1)^2+2)\leq -2$$

esant bet kuriam realiajam skaičiui x, tai $f(x)$ apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje – intervale $(-\infty;+\infty).$

Ieškodami funkcijos $f(x)$ mažiausios reikšmės, trupmeną $\dfrac{5+2x-x^2}{2x-x^2-3}$ pertvarkykime taip:

$$\frac{5+2x-x^2}{2x-x^2-3}=\frac{-(x^2-2x-5)}{-(x^2-2x+3)}=\frac{(x^2-2x+1)-6}{(x^2-2x+1)+2}=\frac{(x-1)^2-6}{(x-1)^2+2}=\frac{((x-1)^2+2)-8}{(x-1)^2+2}=$$

$$=\frac{(x-1)^2+2}{(x-1)^2+2}-\frac{8}{(x-1)^2+2}=1-\frac{8}{(x-1)^2+2}.$$

Kadangi $\dfrac{8}{(x-1)^2+2}\leq 4,$ kai $x\in(-\infty;+\infty),$ tai $f(x)=1-\dfrac{8}{(x-1)^2+2}\geq 1-4=-3,$ kai $x\in(-\infty;+\infty).$

Vadinasi, mažiausia $f(x)$ reikšmė intervale $(-\infty;+\infty)$ yra $-3;$ ji įgyjama taške $x=1.$

Ats.: $\min f(x)=f(1)=-3.$

5 pavyzdys. Raskime funkcijos

$$f(x)=\frac{x^4+x^2+5}{x^4+2x^2+1},\ \ x\in(-\infty;+\infty),$$

mažiausią reikšmę.

Sprendimas. Trupmeną, nusakančią funkciją $f(x)$, pertvarkykime taip:

$$\frac{x^4+x^2+5}{x^4+2x^2+1}=\frac{(x^4+2x^2+1)-(x^2-4)}{x^4+2x^2+1}=1-\frac{x^2-4}{x^4+2x^2+1}=1-\frac{x^2-4}{(x^2+1)^2}=1-\frac{(x^2+1)-5}{(x^2+1)^2}=$$

$$=1-\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}+\frac{5}{(x^2+1)^2}=1-\frac{1}{x^2+1}+\frac{5}{(x^2+1)^2}=5\left(\frac{1}{(x^2+1)^2}-\frac{2}{10(x^2+1)}+\frac{1}{100}\right)+1-\frac{1}{20}=$$

$$=5\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{19}{20}.$$

Dabar jau lengva suprasti, kad mažiausia trupmenos $\frac{x^4+x^2+5}{x^4+2x^2+1}$ reikšmė intervale $(-\infty;+\infty)$ yra $\frac{19}{20}$ ir ji įgyjama, kai $x^2+1=10$; taigi taške $x=-3$ ir taške $x=3$.

Ats.: $\min f(x)=f(-3)=f(3)=\frac{19}{20}$.

6 pavyzdys. Apskaičiuokime, kokie turi būti sandėlio (stačiakampio gretasienio) pagrindo matmenys, kad esant 4 metrų sienų aukščiui ir 32 metrų pagrindo perimetrui, jo tūris būtų didžiausias.

Sprendimas. Tegu x yra vienos pagrindo kraštinės ilgis. Tada $16-x$ yra kitos pagrindo kraštinės ilgis, o sandėlio tūris (žym. $V(x)$) yra

$$V(x)=4x(16-x)=4(16x-x^2)=4(64-(64-16x+x^2))=4(64-(x-8)^2).$$

Aišku, kad $V(x)\le 4\cdot 64=256$ (m^3), o didžiausia $V(x)$ reikšmė yra 256 m^3, kai $x=8$ m.

Taigi sandėlio pagrindas turi būti kvadratas, kurio kraštinės ilgis 8 metrai.

Ats.: Kvadratas, kurio kraštinės ilgis 8 metrai.

Dabar pereikime prie realiųjų skaičių $a_1, a_2, ..., a_n$ aritmetinio vidurkio

$$A_n=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

ir jų geometrinio vidurkio

$$G_n=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n}$$

sąryšio

$$A_n\ge G_n,\ \text{jei}\ a_1\ge 0,\ a_2\ge 0,\ ...,\ a_n\ge 0, \qquad (1)$$

teisingumo pagrindimo bei šio sąryšio taikymo ieškant funkcijos maksimumo bei minimumo.

Aišku, kad $A_2\ge G_2$, nes

$$A_2-G_2=\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{a_1-2\sqrt{a_1a_2}+a_2}{2}=\frac{\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2}{2}\ge 0,\ \text{jei}\ a_1\ge 0\ \text{ir}\ a_2\ge 0.$$

Iš karto atkreipkime dėmesį ir į tai, kad lygybė $A_2=G_2$ įmanoma tik kai $a_1=a_2\ge 0$.

Visai panašiai galima įrodyti, kad $A_4\ge G_4$:

$$A_4-G_4=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}-\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}-\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\ge$$

$$\geq \sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}} - \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} \geq \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}} - \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} =$$
$$= \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} - \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} = 0.$$

Žinoma, čia taikėme jau įrodytą nelygybę $A_2 \geq G_2$. O lygybė $A_4 = G_4$ galioja taip pat vieninteliu atveju – kai $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 \geq 0$.

Analogiškai galima įrodyti nelygybes $A_8 \geq G_8$, $A_{16} \geq G_{16}$ ir kt. (kai $n = 2^k$, $k \in \mathrm{N}$).

Nelygybę $A_3 \geq G_3$ įrodykime remdamiesi nelygybe $A_4 \geq G_4$:

$$A_3 = \frac{a_1+a_2+a_3}{3} = \frac{a_1+a_2+a_3+\frac{a_1+a_2+a_3}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3\cdot\frac{a_1+a_2+a_3}{3}} = \sqrt[4]{G_3^3\cdot A_3};$$
$$A_3 \geq \sqrt[4]{G_3^3\cdot A_3} \Rightarrow A_3^4 \geq G_3^3\cdot A_3 \Rightarrow A_3^4 - G_3^3\cdot A_3 \geq 0 \Rightarrow A_3\left(A_3^3 - G_3^3\right) \geq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_3\left(A_3 - G_3\right)\left(A_3^2 + A_3G_3 + G_3^2\right) \geq 0 \Rightarrow A_3 - G_3 \geq 0.$$

Vadinasi, $A_3 \geq G_3$, jei $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$ ir $a_3 \geq 0$.

O lygybė $A_3 = G_3$ galima tik kai

$$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{a_1+a_2+a_3}{3},$$

taigi tik kai $a_1 = a_2 = a_3 \geq 0$.

Galbūt jau aiškėja, kad nelygybes $A_5 \geq G_5$, $A_6 \geq G_6$ ir $A_7 \geq G_7$ galima įrodyti taikant nelygybę $A_8 \geq G_8$, nes

$$A_5 = \frac{8A_5}{8} = \frac{5A_5+3A_5}{8} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+A_5+A_5+A_5}{8},$$
$$A_6 = \frac{6A_6+2A_6}{8} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+A_6+A_6}{8},$$
$$A_7 = \frac{7A_7+A_7}{8} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+A_7}{8}.$$

Gautume, kad

$$A_5 \geq \sqrt[8]{G_5^5\cdot A_5^3},\quad A_6 \geq \sqrt[8]{G_6^6\cdot A_6^2} \quad \text{ir} \quad A_7 \geq \sqrt[8]{G_7^7\cdot A_7},$$

o iš nelygybių

$$A_5^8 \geq G_5^5\cdot A_5^3,\quad A_6^8 \geq G_6^6\cdot A_6^2 \quad \text{ir} \quad A_7^8 \geq G_7^7\cdot A_7$$

išplauktų, jog

$$A_5^3\left(A_5^5 - G_5^5\right) \geq 0 \Rightarrow A_5^5 \geq G_5^5 \Rightarrow A_5 \geq G_5;$$
$$A_6^2\left(A_6^6 - G_6^6\right) \geq 0 \Rightarrow A_6^6 \geq G_6^6 \Rightarrow A_6 \geq G_6;$$
$$A_7\left(A_7^7 - G_7^7\right) \geq 0 \Rightarrow A_7^7 \geq G_7^7 \Rightarrow A_7 \geq G_7.$$

O tada ateitų nelygybių

$$A_{16} \geq G_{16},\quad A_{32} \geq G_{32},\quad A_{64} \geq G_{64}, \ldots$$

taikymo eilė.

Vis dėlto ne čia būtų (1) nelygybės įrodymo pabaiga – apibendrinančiam teiginiui:

Nelygybė $A_n \geq G_n$; $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, galioja esant bet kuriam natūraliajam skaičiui n.

įrodyti reikėtų palypėti ant kitos natūraliųjų skaičių teorijos pakopos, kuri vadinama **matematinės indukcijos aksioma.**

Štai čia šį kartą ir sustokime. O smalsesniam jaunajam matematikui patartume susirasti Juozo Šinkūno knygą „Ekstremumai be išvestinių“ (Leidykla TEV, Vilnius, 2008) ir ne šiaip pasklaidyti, o su pieštuku rankoje atidžiai pastudijuoti.

7 pavyzdys. Įrodykime, kad 100 yra mažiausia sandaugos

$$\left(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{10}}\right)$$

reikšmė, jei $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, 10$.

Sprendimas. Taikykime nelygybę $A_{10} \geq G_{10}$:

$$\left(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{10}}\right) = 100 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{10}}{10} \cdot \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{10}}}{10} \geq$$

$$\geq 100 \cdot \sqrt[10]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10}} \cdot \sqrt[10]{\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10}}} = 100.$$

Kad galėtume pasakyti, jog 100 tikrai yra mažiausia sandaugos reikšmė, turime įsitikinti, kad yra toks skaičių $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ rinkinys, kuriam galioja sąlyga:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{10} \text{ ir } \frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \dots = \frac{1}{a_{10}}.$$

Aišku, kad tinka rinkiniai $(a, a, \dots, a)$, $a > 0$.

Vadinasi, 100 tikrai yra mažiausia sandaugos $\left(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{10}}\right)$ reikšmė, jei $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, 10$.

8 pavyzdys. Raskime funkcijos

$$f(x.\, y.\, z) = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0,$$

mažiausią reikšmę.

Sprendimas. Funkciją apibrėžiantį reiškinį $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$ pertvarkykime taip, kad kuo daugiau naudos turėtume taikydami nelygybę $A_3 \geq G_3$:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = \left(\frac{x}{y+z} + 1\right) + \left(\frac{y}{z+x} + 1\right) + \left(\frac{z}{x+y} + 1\right) - 3 =$$

$$= \left(\frac{x+y+z}{y+z} + \frac{y+z+x}{z+x} + \frac{z+x+y}{x+y}\right) - 3 = \left(x+y+z\right)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right) - 3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left((x+y) + (y+z) + (z+x)\right) \cdot \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right) - 3.$$

Jei pažymėtume

$$a_1 = x + y, \quad a_2 = y + z \quad \text{ir} \quad a_3 = z + x,$$

gautume, kad $a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0.$

Todėl

$$(x+y)+(y+z)+(z+x) = a_1 + a_2 + a_3 = 3 \cdot \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} = 3 \cdot \sqrt[3]{(x+y)\cdot(y+z)\cdot(z+x)}$$

ir

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}}{3} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3}} = \frac{3}{\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}}.$$

Vadinasi,

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}\big((x+y)+(y+z)+(z+x)\big) \cdot \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) - 3 \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}} - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2},$$

jei $x > 0,\ \ y > 0$ ir $z > 0.$

Lygybė $f(x, y, z) = \frac{3}{2}$ galioja tik kai

$$x + y = y + z = z + x \ \text{ ir } \ \frac{1}{x+y} = \frac{1}{y+z} = \frac{1}{z+x},$$

taigi tik kai $x = y = z > 0.$

Matome, kad skačius $\frac{3}{2}$ yra mažiausia funkcijos $f(x.\,y.\,z) = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$ reikšmė, jei $x > 0,\ \ y > 0$ ir $z > 0.$

Ats.: $\frac{3}{2}$.

9 pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x) = x^2 \cdot (6 - x)$ didžiausią reikšmę intervale $[0; 6]$.

Sprendimas. Kadangi $f(0) = f(6) = 0$ ir $f(x) > 0,$ kai $x \in (0; 6),$ tai tikėtina, kad intervale $(0; 6)$ didžiausią funkcijos reikšmę pasiseks rasti.

Ieškokime galimybės išspręsti uždavinį taikant nelygybę $G_n \leq A_n$.

Jei bandytume taikyti nelygybę $G_2 \leq A_2$ skaičiams x^2 ir $6 - x$, gautume:

$$x^2 \cdot (6 - x) = \left(\sqrt{x^2(6-x)}\right)^2 \leq \left(\frac{x^2 + (6-x)}{2}\right)^2 = \frac{(x^2 - x + 6)^2}{4}.$$

Lygybė $G_2 = A_2$ čia galiotų tik kai $x^2 = 6 - x,$ taigi taške $x = 3$ ($x = -2$ nepriklauso intervalui $(0; 6)$). Tačiau nelygybės dešinėje pusėje yra ne konkretus skaičius, o reiškinys $\frac{(x^2 - x + 6)^2}{4}$, galintis įgyti įvairias reikšmes intervale $(0; 6)$.

Vadinasi, nelygybę $G_n \le A_n$ dera taikyti ne bet kuria pasitaikiusia proga, kad gautum siekiamą rezultatą.

Pabandykime daryti taip:

$$f(x) = x^2 \cdot (6-x) = 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (6-x) = 4\left(\sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (6-x)}\right)^3 \le 4 \cdot \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + (6-x)}{3}\right)^3 = 4 \cdot \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 32.$$

Lygybė $G_3 = A_3$ galioja tik kai $\frac{x}{2} = 6 - x,$ taigi tik kai $x = 4.$

Kadangi $x = 4$ yra intervale $(0; 6),$ darome išvadą, kad $\min f(x) = f(4) = 32.$

Ats.: 32.

<u>Komentaras.</u> Jei užrašę funkciją $f(x)$ pavidalu

$$f(x) = 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (6-x)$$

būtume taikę nelygybę $G_4 = A_4,$ būtume gavę:

$$f(x) = \left(\sqrt[4]{4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (6-x)}\right)^4 \le \left(\frac{4 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + (6-x)}{4}\right)^4 = \left(\frac{10}{4}\right)^4 = \frac{625}{16} = 39{,}0625.$$

Bet lygybė $G_4 = A_4$ negaliotų jokiame intervalo $(0; 6)$ taške, nes lygčių sistema $4 = \frac{x}{2} = 6 - x$ neturi sprendinių.

Tokia funkcijos analizė nebūtų klaidinga, bet gautas rezultatas

$$f(x) = x^2 \cdot (6-x) < 39{,}0625, \text{ kai } x \in (0; 6),$$

neleistų padaryti išvados, kad $\min f(x) = f(4) = 32.$

10 pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 2x + 22}$ didžiausią reikšmę intervale $(3; +\infty).$

Sprendimas. Kvadratinis trinaris $x^2 - 2x + 22$ įgyja tik teigiamas reikšmes, o dvinaris $x - 3$ intervale $(3; +\infty)$ taip pat yra teigiamas.

Siekdami taikyti nelygybę $A_n \ge G_n,$ funkcijos išraišką pertvarkykime taip:

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 2x + 22} = \frac{x-3}{x(x-3) + (x-3) + 25} = \frac{\frac{x-3}{x-3}}{\frac{x(x-3) + (x-3) + 25}{x-3}} = \frac{1}{x + 1 + \frac{25}{x-3}} =$$

$$= \frac{1}{\left(x - 3 + \frac{25}{x-3}\right) + 4}.$$

Kadangi $(x-3) + \frac{25}{x-3} \ge 2\sqrt{(x-3) \cdot \frac{25}{x-3}} = 10,$ jei $x > 3,$ tai $f(x) \le \frac{1}{10+4} = \frac{1}{14},$ jei $x \in (3; +\infty).$

Lygybė $A_2 = G_2$ galioja tik kai $x-3=\frac{25}{x-3}$. Šios lygties sprendinys $x=8$ yra intervale $(3;+\infty)$, todėl $\frac{1}{14}$ yra funkcijos $f(x)=\frac{x-3}{x^2-2x+22}$ didžiausia reikšmė intervale $(3;+\infty)$.

Ats.: $\max f(x)=f(8)=\frac{1}{14}$.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Dviejų teigiamų sveikųjų skaičių suma lygi 161, o 7 yra didžiausias jų bendras daliklis. Tarp šias sąlygas tenkinančių skaičių raskite du skaičius, kurių sandauga yra didžiausia.

2. Raskite didžiausią sandaugos $x \cdot y$ reikšmę, jeigu $3x+4y=12$.

3. Raskite mažiausią sumos x^2+y^2 reikšmę, jeigu $8x+4y=1$.

4. Tuo pačiu metu iš miesto *A* į miestą *B* išvažiuoja dviratininkas, kurio greitis 30 km/h, o iš miesto *B* į miestą *C* – dviratininkas, kurio greitis 10 km/h. Keliai *AB* ir *BC* yra tiesūs, o mieste *B* susikerta stačiu kampu. Nustatykite, po kurio laiko atstumas tarp dviratininkų bus mažiausias, jei miestas *B* yra už 120 km nuo miesto *A*, o miestas *C* yra už 40 km nuo miesto *B*.

5. Taškas *M* yra stačiojo trikampio *ABC* ($\angle A = 90^{\circ}$) įžambinėje *BC*. Atkarpa *AM* yra įbrėžto į šį trikampį stačiakampio įstrižainė. Nustatykite, kokiu santykiu didžiausio ploto stačiakampio viršūnė *M* dalija trikampio įstrižainę *BC*, jei $AB = 50$ cm, $AC = 30$ cm.

6. Raskite funkcijos $f(x)=x^3+3x^2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}$, $x>0$, mažiausią reikšmę.

7. Raskite funkcijos $f(x)=\frac{x^2-5x+42}{x-2}$, $x>2$, mažiausią reikšmę.

8. Įrodykite, kad mažiausia reiškinio

$$f(x,y,z)=(x+2y)(y+2z)(z+2x)$$

reikšmė lygi 27, jeigu $x>0$, $y>0$, $z>0$ ir $xyz=1$.

9. Raskite didžiausią reiškinio $f(a,b)=1-a^2-4b^2$ reikšmę, jeigu $a+4b=1$.

10. Raskite mažiausią reiškinio

$$f(x,y,z)=\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)$$

reikšmę, jeigu $x>0$, $y>0$, $z>0$ ir $x+y+z=1$.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2024 m. vasario 9 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA