ALYTAUS APSKRITIES XXIII KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI

Lazdijai, 2023 m. gruodžio 9 d.

1. Keturių klasių mokinių komandos Dzūkijos miškuose kartu rado 2023 grybus. Kiekviena klasė rado ne mažiau 100 grybų. Ketvirtos klasės komanda rado daugiausiai grybų, antros ir trečios klasės komandos kartu rado 1281 grybą. Kiek grybų rado ketvirtos klasės mokiniai?
   Sprendimas. Sakykime, kad x, y, z, u yra atitinkamai pirmos, antros, trečios ir ketvirtos klasės komandų rastų grybų skaičiai. Kadangi $y + z = 1281$, tai vienas iš skaičių y ir z neviršija 641. Kadangi skaičius u yra didžiausias, tai iš čia $u \geq 642$. Kita vertus, $x + u = 2023 - 1281 = 742$. Kadangi $x \geq 100$, tai $u \leq 642$. Iš šių sąlygų turime, kad $u = 642$. Galima patikrinti, kad ši u reikšmė tenkina uždavinio sąlygą: $x = 100, y = 640, z = 641, u = 642$.
   Atsakymas: 642.

2. Iš to paties namo tuo pačiu metu į mokyklą išėjo pirmos ir ketvirtos klasės gimnazistai. Pirmos klasės gimnazisto žingsnio ilgis yra 20 procentų trumpesnis už ketvirtoko žingsnio ilgį, bet pirmokas padarė 20 procentų daugiau žingsnių. Kuris gimnazistas nuėjo į mokyklą greičiau?
   Sprendimas. Sakykime, kad ketvirtoko žingsnio ilgis yra x metrų, o jis iki mokyklos nužengė per y žingsnių. Taigi jis nuėjo atstumą, lygų xy metrų. Pirmoko žingsnio ilgis yra $0{,}8x$ metro, o per tą patį laiką jis padarė $1{,}2y$ žingsnių, taigi jo nueitas kelias lygus $0{,}8x \cdot 1{,}2y = 0{,}96xy$ metrų. Kadangi $0{,}96xy < xy$, tai, ketvirtokui atėjus iki mokyklos, pirmokas iki jos dar nebus nuėjęs.
   Atsakymas: ketvirtokas.

3. Skaičiai p ir $2p + 1$ yra pirminiai. Su kuriomis p reikšmėmis skaičius $4p + 1$ yra pirminis?
   Sprendimas. Kai $p = 2$, tai $2p + 1 = 5$ irgi pirminis, bet $4p + 1 = 9$ yra sudėtinis. Kai $p = 3$, tuomet $2p + 1 = 7$, $4p + 1 = 13$ yra pirminiai, taigi $p = 3$ tenkina uždavinio sąlygą. Įrodysime, kad kai $p > 3$, tokių p nėra. Bet kuris didesnis už 3 pirminis skaičius p yra užrašomas $p = 3k + 1$ arba $p = 3k - 1$. Pirmuoju atveju skaičius $2p + 1 = 6k + 3$ dalijasi iš 3, todėl jis sudėtinis. Antruoju atveju $2p + 1 = 6k - 1$, o skaičius $4p + 1 = 12k - 3$ dalijasi iš 3, todėl jis yra sudėtinis.
   Atsakymas: $p = 3$.

4. Devyniuose maišeliuose yra tikros monetos, kurių kiekvienos masė yra 10 g, o viename – netikros monetos, kurios sveria po 11 g. Kiekviename maišelyje yra daugiau nei 10 monetų. Kiek reikia svėrimų svarstyklėmis su svarsčiais, norint nustatyti, kuriame maišelyje yra netikros monetos, jei iš kiekvieno maišelio galima išimti ir pasverti bet kurį ten esančių monetų kiekį?.
   Sprendimas. Sunumeruokime maišelius nuo 1 iki 10. Iš pirmo maišelio išimame 1 monetą, iš antro – dvi monetas ir t. t., iš dešimto maišelio išimame 10 monetų. Visas tas monetas pasveriame. Jei netikros monetos yra p –ajame maišelyje, tai gauname, kad atrinktų monetų masė $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 + p = \frac{1+10}{2} \cdot 10 + p = 55 + p$. Iš šios lygybės ir randame maišelio su netikromis monetomis numerį p.
   Atsakymas: pakanka vieno svėrimo.

5. Biure stovi 14 kompiuterinių stalų, kuriuose iš viso yra 33 stalčiai. Kiekviename stale yra arba vienas, arba du, arba trys, arba keturi stalčiai. Be to, stalų su vienu stalčiumi yra tiek, kiek stalų su dviem ir trimis stalčiais kartu. Kiek biure yra kiekvienos rūšies stalų?
   Sprendimas. Sakykime, kad vieno, dviejų, trijų ir keturių stalčių stalų yra atitinkamai $x, y, z, u,$ tuomet $x+y+z+u=14,\ x+2y+3z+4u=33,\ x=y+z.$ Įrašę $x=y+z$ į antrąją lygybę, gauname, kad $3y+4z+4u=33,$ t. y. $4(z+u)=33-3y.$ Natūralusis skaičius $33-3y$ dalijasi iš 4, kai $y=3$ arba kai $y=7$. Pirmuoju atveju turime $z+u=6$, tuomet $x=14-y-(z+u)=5,\ z=x-y=2,\ u=6-z=4.$ Antruoju atveju $z+u=4,\ x=14-y-(z+u)=3,\ z=x-y=-4$ nėra natūralusis skaičius, taigi antrasis atvejis netinka.
   Atsakymas: vieno stalčiaus stalų yra 5, dviejų – 3, trijų – 2, keturių – 4 stalai.

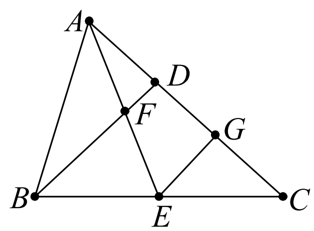
6. Su kuria kintamojo x reikšme reiškinys $\frac{48+3x^4}{x^2}$ įgyja mažiausią reikšmę?
   Sprendimas. Pagal aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę
   $\frac{48+3x^4}{x^2}=\frac{48}{x^2}+3x^2\geq 2\sqrt{\frac{48}{x^2}\cdot 3x^2}=2\sqrt{144}=24.$ Lygybė gaunama, kai $\frac{48}{x^2}=3x^2$, taigi, kai $x=\pm\sqrt[4]{16}=\pm 2.$
   Atsakymas: $x=\pm 2.$

7. Įrodykite, kad su visais realiaisiais skaičiais $x, y, z,$ kuriems $x+y+z=1,$ yra teisinga nelygybė $xy+yz+2xz\leq\frac{1}{2}.$
   Sprendimas. Padauginę abi įrodomosios nelygybės puses iš 2 ir įrašę $1=x+y+z=(x+y+z)^2,$ gauname jai ekvivalenčią nelygybę $(x+y+z)^2\geq 2xy+2yz+4xz.$ Pertvarkome: $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\geq 2xy+2yz+4xz,\ y^2+(x^2-2xz+z^2)\geq 0$ ir gauname akivaizdžią teisingą nelygybę $y^2+(x-z)^2\geq 0.$

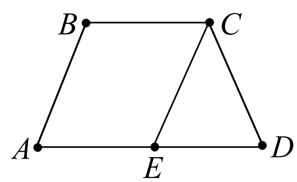
8. Lentoje užrašyti natūralieji skaičiai 1, 2, 3, ..., 999, 1000. Dviese žaidžia pakaitomis darydami ėjimą – nutrindami vieną bet kurį skaičių. Žaidimas baigiasi, kai lentoje lieka 2 skaičiai. Jei šių skaičių suma dalijasi iš trijų, laimi žaidimą pradėjęs žaidėjas, jei nesidalija – laimi antrasis žaidėjas. Kaip turi žaisti antrasis žaidėjas, kad laimėtų nepriklausomai nuo to, kaip žais pirmasis?
   Sprendimas. Aišku, kad nutrinant po vieną skaičių, atlikus kiekvienam žaidėjui po 448 ėjimus, lentoje liks 4 skaičiai. Antrojo žaidėjo strategija remiasi tuo, kad dviejų skaičių, kurie nesidalija iš trijų, suma dalijasi iš trijų, kai tų skaičių dalybos iš trijų liekanos yra skirtingos, priešingu atvejų jų suma nesidalija iš trijų. Taigi antram žaidėjui reikia visų pirma nutrinti tuos 333 skaičius, kurie dalijasi iš trijų. Tam prireiks daugiausia 333 ėjimų, nes kai kuriuos iš trijų besidalijančius skaičius gali būti išbraukęs ir pirmasis žaidėjas. Likusius ėjimus antrasis žaidėjas gali daryti bet kaip, kol prieš jo ėjimą lentoje liks 3 skaičiai. Iš trijų skaičių yra bent du, kurių liekanos, dalijant iš trijų, yra vienodos. Tuos skaičius antrasis ir turi palikti.

9. Taškas E yra trikampio ABC kraštinės BC vidurio taškas, taškas F yra atkarpos AE vidurio taškas, tiesė BF kerta trikampio kraštinę AC taške D. Raskite trikampio AFD plotą, jei trikampio ABC plotas lygus 48.

Sprendimas. Nubrėžkime $EG \parallel FD$ (1 pav.), tuomet atkarpa FD yra trikampio AEG vidurinė linija, todėl $AD = DG$. Kita vertus atkarpa EG yra trikampio BDC vidurinė linija, todėl $DG = GC$. Taigi $AD = DG = GC = \frac{1}{3}AC$. Iš čia gauname, kad trikampio ABD plotas lygus trikampio ABC ploto trečdaliui, taigi $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} = 16$. Kadangi atkarpa AE trikampio ABC pusiaukraštinė, tai $S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} = 24$. Kadangi atkarpa BF yra trikampio ABE pusiaukraštinė, tai $S_{\Delta ABF} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABE} = 12$. Taigi $S_{\Delta AFD} = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta ABF} = 16 - 12 = 4$.
Atsakymas: 4.



1 pav.



2 pav.

10. Trapecija viena tiese padalijama į rombą ir lygiakraštį trikampį. Raskite trapecijos pagrindų santykį.
Sprendimas. Sakykime, kad $ABCD$, $AD \parallel BC$ - duotoji trapecija. Kadangi trapecija padalijama į rombą ir trikampį, tai dalijimo tiesė turi eiti per trumpesniojo pagrindo viršūnę C (2 pav.). Ji kerta ilgesnįjį pagrindą taške E taip, kad keturkampis $ABCE$ yra rombas, taigi $AB = BC = CE = EA$. Kadangi trikampis ECD yra lygiakraštis, tai $ED = CE = DC$. Taigi $AD = 2BC$.
Atsakymas: 2.