SŪDUVOS KRAŠTO GIMNAZIJŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

MARIJAMPOLĖS RYGIŠKIŲ JONO GIMNAZIJA

2023 m. gruodžio 8 d.

1. Vienas mąslus gelgaudiškiškis Rimtvydas sugalvojo natūralųjį skaičių, padaugino jį iš 13 ir iš karto užbraukė paskutinį sandaugos skaitmenį. Taip gautą skaičių jis vėl padaugino, tik šįsyk iš 7, ir vėl užbraukęs paskutinį sandaugos skaitmenį gavo skaičių 21. Kokį skaičių pradžioje galėjo būti sugalvojęs mąslūnas Rimtvydas?

2. Sesė Geltonkasė Pitagorietė šiuo metu nepailsdama ieško kiekvieno tokio lygiašonio trikampio, kurio visų kraštinių ilgiai būtų sveikieji skaičiai, bent vienas iš tų skaičių būtų 2024, o trikampio pagrindas būtų ilgesnis nei šoninė kraštinė. Kiek daugiausiai tokių skirtingų trikampių gali sugalvoti Geltonkasė Pitagorietė?

3. Mokytoja Daiva vienai klasei surengė individualias matematikos varžybas, vertinamas 12 balų sistemoje. Patikrinusi darbus mokytoja paskelbė, kad jeigu kiekvienas klasės berniukas būtų gavęs 3 balais daugiau (net jei tai reikštų, kad tuo atveju kas nors gauna daugiau nei 12 balų), tai vidutinis visos klasės įvertinimas būtų buvęs 1,2 balo didesnis. Kiek procentų tos klasės mokinių sudaro mergaitės?

4. Nepaliaujamai aritmetiškai vis bešvilpaujantis Berniokas savo Sesei Geltonkasei kartą pateikė paveikslėlyje parodytą lentelę, o dar ir instrukciją pridėjo, kaip šią lentelę dera užpildyti iki galo. Žinoma, kiekviename langelyje turį būti po vieną skaičių. Be to, visi skaičiai turį būti natūralieji (nebūtinai skirtingi), o bet kurių trijų skaičių, esančių vienos eilutės trijuose gretimuose langeliuose arba vieno stulpelio trijuose gretimuose langeliuose, suma turinti būti visą laiką viena ir ta pati. Sesė tuoj sumojo, kokį skaičių ji galėtų įrašyti vietoj klaustuko. Kokį skaičių sumojo sesė? Raskite visas galimybes.

		2	
	?		
1			
			3

5. Vita iš Alvito tol nenurimo, kol nerado visų sveikųjų sprendinių (x, y) štai tokiai lygčiai:

$$3x^2 + 2y^2 = 4xy + 2x + 50.$$

Pati viską kruopščiai išsiaiškinusi, ji ir toliau kiekvieno kamantinėja: tai kokia gi toji lygties visų sveikųjų sprendinių aibė?

Sprendimai

1. Prieš antrąjį paskutinio skaitmens užbraukimą Rimtvydas turėjo triženklį skaičių nuo 210 iki 219, besidalijantį iš 7. Šiame intervale yra tik du skaičiai, kurie dalijasi iš 7: tai skaičiai $210 = 30 \cdot 7$ ir $217 = 31 \cdot 7$. Vadinasi, prieš daugybą iš 7 Rimtvydas turėjo skaičių 30 arba skaičių 31. Tada prieš pirmąjį užbraukimą tuo metu turimas skaičius, besidalijantis iš 13, buvo tarp 300 iki 319. Šiame intervale tik vienas skaičius dalijasi iš 13: tai $312 = 24 \cdot 13$. Vadinasi, pradinis skaičius buvo 24.

Atsakymas. 24.

2. Galimi du atvejai: Sesės ieškomo trikampio kraštinių ilgiai yra 2024, a, a, kur $a < 2024$, arba to trikampio kraštinių ilgiai yra b, 2024, 2024, kur $b > 2024$. Čia skaičiai a ir b turi būti natūralieji, o kad reikiami trikampiai egzistuotų, kraštinių ilgiai turi tenkinti trikampio nelygybes:

$2024 < a + a$ ir $a < a + 2024$ arba $b < 2024 + 2024$ ir $2024 < b + 2024$.

Pirmuoju atveju tinka visi natūralieji a, kuriems $a < 2024 < a + a$, taigi $a = 1013, 1014, \ldots, 2023$. Tokių skaičių a yra $2023 - 1012 = 1011$. Antruoju atveju tinka visi natūralieji skaičiai b, kuriems $2024 < b < 2024 + 2024$, taigi $b = 2025,\ 2026,\ \ldots,\ 4047$. Tokių b yra $4047 - 2024 = 2023$. Vadinasi, Sesė gali rasti iš viso $1011 + 2023 = 3034$ tinkamus skirtingus trikampius.

Atsakymas. 3034.

3. Tegu klasėje mokosi b berniukų ir m mergaičių, o visų mokinių balų suma lygi S. Tada vidutinis klasės įvertinimas yra $\frac{S}{b+m}$. Padidėjus berniukų balų skaičiui, mes turėtume tokį vidutinį įvertinimą:

$$\frac{S + 3b}{b + m} = \frac{S}{b + m} + 1{,}2.$$

Iš abiejų lygybės pusių atėmę $\frac{S}{b+m}$, gauname, kad

$$\frac{3b}{b + m} = 1{,}2$$

ir

$$\frac{b}{b + m} = 0{,}4.$$

Vadinasi, berniukai sudaro $0{,}4$ visų klasės mokinių, o mergaičių klasėje yra $0{,}6$ arba 60% visų mokinių.

Atsakymas. 60%.

4. Tarkime, kad Geltonkasė turi įrašyti į vieną kurią eilutę arba į vieną kurį stulpelį keturis natūraliuosius skaičius a, b, c ir d (tokia tvarka, kokia jie čia yra išvardinti). Tada pagal sąlygą turime $a + b + c = b + c + d$, o iš čia išplaukia, kad $a = d$. Kitais žodžiais tariant, du skaičiai, esantys vienos eilutės arba vieno stulpelio skirtinguose galuose, turi būti lygūs. Remiantis šia pastaba, Sesė turi užpildyti kraštinius lentelės langelius, kaip parodyta paveikslėlyje:

3	c	2	3
a	x	b	a
1			1
3	c	2	3

Čia nežinomus skaičius pažymėjome a, b, c, x. Kadangi $a + x + b = 3 + a + 1$ (pagal pirmąjį stulpelį ir antrąją eilutę), tai $x + b = 4$. Skaičiai x ir b natūralieji, tad tinka nebent $x = 1$, 2 ir 3. Šios trys x reikšmės iš tiesų tinka. Tuo galima įsitikinti, kaskart imant $c = 1$ ir baigiant pildyti lentelę:

3	1	2	3
2	1	3	2
1	4	1	1
3	1	2	3

3	1	2	3
2	2	2	2
1	3	2	1
3	1	2	3

3	1	2	3
2	3	1	2
1	2	3	1
3	1	2	3

Atsakymas. 1, 2 arba 3.

5. Perrašome lygtį, išskirdami pilnuosius kvadratus:

$$2(x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 - 2x + 1) = 51,$$

$$2(x - y)^2 + (x - 1)^2 = 51.$$

Jei (x, y) yra duotosios lygties sveikasis sprendinys, tai $2(x - y)^2 \leq 51$ ir $(x - y)^2 \leq 25$. Kadangi $(x - y)^2$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas, tai pakanka patikrinti galimybes $(x - y)^2$ =0, 1, 4, 9, 16 ir 25. Skaičius

$$51 - 2(x - y)^2 = (x - 1)^2$$

yra sveikojo skaičiaus kvadratas, tik jei $(x - y)^2 = 1$ arba $(x - y)^2 = 25$: atitinkamai turime $(x - 1)^2 = 49$ arba $(x - 1)^2 = 1$. Vadinasi, $x - 1 = \pm 7$ arba $x - 1 = \pm 1$. Pirmuoju atveju $x = 8$ arba -6, ir tada $x - y = \pm 1$. Taip gauname keturis sprendinius $(x, y) = (8, 9)$, $(8, 7)$, $(-6, -7)$, $(-6, -5)$. Antruoju atveju $x = 2$ arba 0, ir tada $x - y = \pm 5$. Taip gauname likusius keturis sprendinius $(x, y) = (2, 7)$, $(2, -3)$, $(0, 5)$, $(0, -5)$. Visi 8 gautieji sprendiniai tenkina duotąją lygtį.

Atsakymas. $(8, 9)$, $(8, 7)$, $(-6, -7)$, $(-6, -5)$, $(2, 7)$, $(2, -3)$, $(0, 5)$, $(0, -5)$.