

**DVIDEŠIMT ANTROJI PRIEŠKALĖDINĖ KOMANDINĖ
RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS
TAUREI LAIMĖTI**

Raseiniai, 2023 m. gruodžio 1 d.

Kiekviename uždavinyje ne tik nurodykite atsakymą, bet ir paaiškinkite, kodėl jis teisingas, o jokie kiti atsakymai, o ne tik tie pasiūlytieji yra negalimi (nebent jei uždavinio sąlygoje būtų nurodyta, kad rinktis reikia tik iš siūlomų atsakymų).

1. Šimkaičiuose turime 15 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių. Staiga išaiškėjo, kad visų lyginių tos virtinės skaičių suma yra lygi a . O koks tada turėtų būti mažiausias tos penkiolikaskaitės virtinės skaičius Šimkaičiuose, jei jis yra nelyginis?

- (A) $\frac{a}{15} - 15$ (B) $a - 15$ (C) $\frac{a}{8} - 7$ (D) $\frac{a}{7} - 7$ (E) Kitas atsakymas

2. Kai kurie baltiškiai vaikai susirinkę iš maišo traukė po 3 korteles. Kai kuriose kortelėse parašyta MA, o likusiose parašyta TĖ. Kiekvienas vaikas iš savo kortelių dėlioja žodžius MAMA, TĖTĖ ir MATĖ. Lygiai 15 vaikų gali sudėlioti žodį MAMA, lygiai 20 vaikų – žodį TĖTĖ, lygiai 25 vaikai – žodį MATĖ. Kiekvienas vaikas, iš maišo ištraukęs 3 vienodas korteles, suirzo. Kiek atsirado tokių baltiškių suirzėlių?

- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 15 (E) 20

3. Magdalena Raseiniškė, kiek nejaukiai jausdamasi, bet nei teigiamų, anei neigiamų skaičių nebijodama, iš eilės užrašė dešimt realiųjų skaičių: pradėjo skaičiumi 34, o baigė „apvaliu“ skaičiumi 0. Kiekvieną skaičių, pradėdant nuo trečiojo, Magdalena gavo, sudėjusi du paskutinius prieš tai užrašytus skaičius. Kam yra lygi visų dešimties užrašytųjų skaičių suma?

- (A) -34 (B) 0 (C) 22 (D) 68 (E) 88

4. Raseinius savo laiku apskriejo žinia, paskleista ne ko kito, o Magdalenos Raseiniškės žvaliai ir daug keliaujančio anūko Gervazo, apie tai, kokia yra pati didžiausia galima 8-ženklis natūraliojo skaičiaus, kuris dalijasi iš 8, skaitmenų suma. Kokia gi yra ta didžiausia suma?

- (A) 69 (B) 68 (C) 66 (D) 65 (E) 64

5. Vienas meistras (ne kas kitas, bet Magdalenos anūkas Protazas) mėlynu pieštuku daro atžymas ilgoje 8 metrų juostoje kas 36 centimetrus nuo vieno juostos galo, o Protazo paprašytasis Gervazas daro atžymas toje pačioje juostoje raudonu pieštuku kas 25 centimetrus, taip pat nuo to paties juostos galo (tik paties juostos galo jie nežymi). Koks yra pats mažiausias galimas atstumas tarp mėlynos ir raudonos atžymų?

- (A) 0 cm (B) 1 cm (C) 2 cm (D) 3 cm (E) 5 cm

6. Martyno Šiluviškio vaizduotėje dažnai iškyla didelė žmonių minia, susibūrusi iškilijo penkiakampio $ABCDE$ formos aikštėje. Martynas vis suspėja pastebėti, kad to penkiakampio kampai A , C ir E yra statieji, be to, kad $AB = BC$ ir $CD = DE$. Jis niekaip nespėja pamatuoti kampo ACE , bet jo seni draugai iš Ariogalos ir taip sugalvojo, kokio didumo turi būti toks kampas. Taigi, koks yra kampo ACE didumas?

- (A) 30° (B) 40° (C) 50° (D) 60° (E) Kitas atsakymas

7. Tytuvėnuose daugėja žmonių, kuriuos Magdalena Raseiniškė jau įpratino natūralųjį skaičių vadinti *apverstuku*, jei jo skaitmenų seka lieka tokia pati, kaip ji berašytume – ar iš dešinės į kairę, ar iš kairės į dešinę. Pavyzdžiui, skaičius 36563 yra apverstukas. Kiek yra penkiaženklų apverstukų, kurių skaitmenų suma yra nelyginė?

- (A) 450 (B) 500 (C) 900 (D) 1000 (E) Kitas atsakymas

8. Susirašęs su Magdalena Raseiniške turiningais laiškais, Martynas Šiluviškis viename iš gautųjų laiškų rado pavaizduotąją lentelę bei kruopščią instrukciją, nurodančią, kaip šią lentelę užpildyti iki galo. Žinoma, kiekviename langelyje turi būti po vieną skaičių. Be to, visi skaičiai turi būti natūralieji (nebūtinai skirtingi), o bet kurių trijų skaičių, esančių vienos eilutės trijuose gretimuose langeliuose arba vieno stulpelio trijuose gretimuose langeliuose, suma turinti būti visą laiką viena ir ta pati. Martynas sugalvojo, kokį skaičių jis galėtų įrašyti vietoj klausuko. Raskite to skaičiaus visų galimų reikšmių sumą.

		5	
4			
	?		2
3			

- (A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 15 (E) 22

9. Pilypas, apsilankęs Jurbarke bei jo savaip įkvėptas, savo užrašų knygelėje rašo skaičius, pradėdamas nuo 2 bei vis iš eilės kartodamas po keturis tokius veiksmus: dalija iš 2, prideda 2, daugina iš 2, atima 2. Atlikęs iš viso n tokių veiksmų, Pilypas gavo skaičių 222. Kuris skaičius niekaip negali būti lygus n ?

- (A) 435 (B) 440 (C) 878 (D) 885 (E) Visi šie keturi skaičiai yra galimos n reikšmės

10. Kad prablaškėtų pavargusius anūkus, Magdalena Raseiniškė ima ir užduoda jiems kokį klausimą, į kurį jie ne visada atsako tą pačią sekundę. Pavyzdžiui, ji ketina jų paklausti: kokia yra lygties

$$x^2(2-x)^2 = 1 + 2(1-x)^2$$

visų skirtingų sprendinių suma?

- (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) Kitas atsakymas

DVIDEŠIMT ANTROJI PRIEŠKALĖDINĖ INDIVIDUALIOJI RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Raseiniai, 2023 m. gruodžio 1 d.

1. Vadžgiryje kai kas mena nutikimą, kai vienas svečias gal iš Ariogalos, o gal iš Tytuvėnų, vardu Aloyzas, iškilmingai užrašė keturis sveikuosius skaičius. Sudėjęs tuos skaičius visais įmanomais skirtingais būdais po du skaičius, Aloyzas gavo tokias šešias sumas: 17, 18, 20, 21, 23 ir 26. Vadžgiryje kalbama, kad svečias Aloyzas bus kažkur apsirikęs. Įrodykite, kad šios Vadžgiryje sklindančios kalbos yra pagrįstos.

2. Kad prablaškytų pavargusius anūkus, Magdalena Raseiniškė ima ir užduoda jiems kokį klausimą, į kurį jie ne visada atsako tą pačią sekundę. Pavyzdžiui, ji ketina jų paklausti: koks yra mažiausias natūralusis skaičius, besidalijantis iš 225 ir neturintis nė vieno iš skaitmenų 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9?

3. Susirašęs su Magdalena Raseiniške turiningais laiškais, Martynas Šiluviškis viename iš gautųjų laiškų rado pavaizduotą lentelę bei kruopščią instrukciją, nurodančią, kaip šią lentelę užpildyti iki galo. Žinoma, kiekviename langelyje turi būti po vieną skaičių. Be to, visi skaičiai turi būti natūralieji (nebūtinai skirtingi), o bet kurių trijų skaičių, esančių vienos eilutės trijuose gretimuose langeliuose arba vieno stulpelio trijuose gretimuose langeliuose, suma turinti būti visą laiką viena ir ta pati. Martynas sugalvojo, kokį skaičių jis galėtų įrašyti vietoj klausuko. Raskite to skaičiaus visas galimas reikšmes.

		5	
4			
	?		2
3			

4. Vienas meistras (ne kas kitas, bet Magdalenos anūkas Protazas) mėlynu pieštuku daro atžymą ilgoje 8 metrų juostoje kas 36 centimetrus nuo vieno juostos galo, o Protazo paprašytasis Gervazas daro atžymą toje pačioje juostoje raudonu pieštuku kas 25 centimetrus, taip pat nuo to paties juostos galo (tik paties juostos galo jie nežymi). Koks yra pats mažiausias galimas atstumas tarp mėlynos ir raudonos atžymų?

5. Martyno Šiluviškio vaizduotėje dažnai iškyla 10 atkarpu, kurių ilgiai yra natūralieji nelyginiai skaičiai, mažesni už 100 (nebūtinai skirtingi). Jis vis bando imti tris iš tų atkarpu ir sudaryti trikampį. Martynui tai visada pavyksta, ir jis stebisi, kad vis negali įsivaizduoti 10 atkarpu, su kuriomis trikampio sudaryti niekaip neišeitų. Įrodykite, kad, turint tokias 10 atkarpu, trikampį įmanoma sudaryti visada.