DVIDEŠIMT ANTROJI PRIEŠKALĖDINĖ RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA
PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Raseiniai, 2023 m. gruodžio 1 d.

Sprendimai

Komandinė olimpiada

1. Tegul tie 15 iš eilės einančių natūraliųjų skaičių, iš kurių pats mažiausias skaičius ya nelyginis, yra

$$2n-7,\ 2n-6,\ 2n-5,\ \dots,\ 2n-1,\ 2n,\ 2n+1,\ \dots,\ 2n+5,\ 2n+6,\ 2n+7.$$

Tada pagal sąlygą visų lyginių tos virtinės skaičių suma yra lygi a arba, kitais žodžiais tariant,

$$(2n-6)+(2n-4)+(2n-2)+2n+(2n+2)+(2n+4)+(2n+6)=14n=a.$$

Todėl pats mažiausias iš visų tos pradinės virtinės skaičių, t. y. skaičius $2n-7$, yra lygus $\frac{a}{7}-7$, nes jeigu $14n=a$, tai $2n=\frac{a}{7}$. Todėl teisingas atsakymas yra D.

Atsakymas. (D) $\frac{a}{7}-7$.

2. Kiekvienas vaikas gali sudėti nors po vieną žodį. Jeigu turi tris MA korteles, tai sudės vienintelį žodį MAMA. Jeigu dvi MA ir vieną TĖ – tai ne tik žodį MAMA, bet ir žodį MATĖ. Jeigu jis ištraukė vieną MA ir dvi TĖ, tai žodžio MAMA sudėti jau nebegalės, tačiau sudės MATĖ ir TĖTĖ. Jeigu jis turi visas tris TĖ korteles, tai galės sudėti tik žodį TĖTĖ. Kiekvienas vaikas gali sudėti lygiai vieną iš žodžių MAMA ir TĖTĖ, todėl iš viso yra $15+20=35$ vaikai, turintys korteles. Tarp tų vaikų yra 25 vaikai, galintys sudėti žodį MATĖ, taigi turintys dvi skirtingas korteles, bei $35-25=10$ vaikų, žodžio MATĖ sudaryti negalintys, taigi turintys po tris vienodas korteles.

Atsakymas. (B) 10.

3. Jei pirmasis sekos narys lygus $a_1=34=a$, o antrasis lygus $a_2=b$, tai kiti sekos nariai iš eilės lygūs:

$$a_3=a+b,\qquad a_4=a+2b,\qquad a_5=2a+3b,\qquad a_6=3a+5b,$$
$$a_7=5a+8b,\qquad a_8=8a+13b,\qquad a_9=13a+21b,\qquad a_{10}=21a+34b.$$

Kadangi $a_{10}=0=21\cdot 34+34b=34\cdot(21+b)$, tai $21+b=0$ ir $a_2=b=-21$.
Todėl visų dešimties skaičių suma yra lygi

$$34+(-21)+13+(-8)+5+(-3)+2+(-1)+1+0=13+5+2+1+1=22.$$

Todėl mes renkamės atsakymą C.

Atsakymas. (C) 22.

4. Kadangi 1000 dalijasi iš 8, tai nesunku įžiūrėti tokį dalumo iš 8 požymį: natūralusis skaičius n dalijasi iš 8 tada ir tiktai tada, kai iš 8 dalijasi skaičius, kurį sudaro paskutinieji trys skaičiaus n skaitmenys (likusi skaičiaus dalis dalijasi iš 1000). Todėl, ieškant 8-ženklio skaičiaus, kuris būtų skaičiaus 8 kartotinis su didžiausia skaitmenų suma, pirmuosius penkis skaitmenis tenka imti didžiausius įmanomus – devynetus.

Paskutinieji trys skaitmenys gali būti 888. Todėl būti tinkamiausiu 8-ženkliu skaičiumi pretenduoja $99\,999\,888$, kurio skaitmenų suma yra $9 \cdot 5 + 8 \cdot 3 = 45 + 24 = 69$.

Didesnę skaitmenų sumą galėtume gauti, tik taip parinkdami 8-ženklio skaičiaus paskutinius tris skaitmenis, kad jų suma būtų ne mažesnė už 25. Tada joks iš tų trijų skaitmenų negali būti mažesnis už 7 (nes $6 + 9 + 9 < 25$). Turint skaitmenį 7, tektų imti likusius du skaitmenis devynetus – netinka, nes taip gauname vien nelyginius skaičius, taigi nedalius iš 8. Lieka atvejis, kai kiekvienas iš trijų skaitmenų yra 8 arba 9. Tačiau vienintelis toks triženklis skaičiaus 8 kartotinis yra 888. Vadinasi, negausime didesnės 8-ženklio skaičiaus skaitmenų sumos nei 69.
Atsakymas. (A) 69.

5. Jeigu pats mažiausias galimas atstumas tarp atžymų būtų 0 centimetrų, sutapus x-ajai mėlynai atžymai ir y-ajai raudonai atžymai, tai galiotų lygybė $36x = 25y$. Remiantis uždavinio sąlyga, $x > 0$ ir $y > 0$. Kadangi $\mathrm{DBD}(36; 25) = 1$, tai x turi dalytis iš 25. Taigi mažiausias natūralusis turimos lygties sprendinys būtų $(x; y) = (25; 36)$. Tačiau tada juostos ilgis yra bent $36x \geq 36 \cdot 25 = 900$ centimetrų, o tai yra daugiau negu 8 metrai.
Toliau mėginsime nustatyti, ar atstumas tarp skirtingos spalvos atžymų galėtų būti lygus 1 cm. Meistras, kuris žymi mėlynu pieštuku, padarys pirmą mėlyną atžymą ties 36 centimetrais, toliau ties 72 centimetrais, dar toliau ties 108 centimetrais, toliau seks 144, 180, 216, 252, 288, 324, 360 ir t. t. centimetrų. Mėlynoji atžyma, padaryta ties 324 centimetrais, bus per centimetrą nuo 325 centimetrų, kurie tikrai sulauks raudonojo meistro, žyminčio kas 25 centimetrus, nes 325 akivaizdžiai dalijasi iš 25. Vadinasi, mažiausias atstumas tarp skirtaspalvių atžymų bus 1 cm, ir todėl mes renkamės atsakymą B.
Atsakymas. (B) 1 cm.

6. Kadangi trys penkiakampio kampai yra statūs, o visų penkių kampų suma yra lygi trijų trikampių (į kuriuos galima padalyti penkiakampį) kampų sumai $180° \cdot 3 = 540°$, tai likusiems dviem, kol kas neminėtiems kampams B ir D kartu lieka iš viso 270 laipsnių. Tie kampai B ir D yra dviejų lygiašonių trikampių ABC ir CDE kampai prieš pagrindą. Likusiems keturiems tų lygiašonių trikampių kampams prie jų pagrindų AC ir CE lieka $2 \cdot 180° - 270° = 90°$. Tie keturi kampai sudaro dvi lygių kampų poras: $\angle ACB = \angle CAB$ ir $\angle ECD = \angle CED$. Todėl dviem kampams prie viršūnės C, arba kampams ACB ir ECD, kartu tenka pusė stataus kampo didumo, t. y. $45°$. Išmetę tuos du kampus iš stataus kampo C, gausime $\angle ACE = 90° - 45° = 45°$. Todėl teisingas atsakymas E: kitas atsakymas nei pirmieji keturi.
Atsakymas. (E) Kitas atsakymas.

7. Kadangi penkiaženklis skaičius negali prasidėti 0, tai yra $9 \cdot 10 = 90$ galimybių parinkti pirmuosius du jo skaitmenis. Kadangi paskutinieji du jo skaitmenys atkartoja „su apgręžimu“ pirmuosius du, tai apverstuke jų visų suma, išskyrus vidurinį, trečiąjį to skaičiaus skaitmenį, bus lyginis skaičius. Vadinasi, penkiaženklio apverstuko (palindromo) skaitmenų sumos lyginumas priklauso nuo to trečiojo skaitmens lyginumo: suma bus nelyginė, kai trečiasis skaitmuo bus nelyginis. Parinkę pirmus du skaičiaus skaitmenis (90 būdų), o tada nelyginį trečiąjį skaitmenį (5 būdai), gausime lygiai vieną penkiaženklį apverstuką. Todėl penkiaženklių apverstukų su nelygine skaitmenų suma yra $90 \cdot 5 = 450$. Renkamės atsakymą A.
Atsakymas. (A) 450.

8. Tarkime, kad Martynas turi įrašyti į vieną kurią eilutę arba į vieną kurį stulpelį keturis natūraliuosius skaičius a, b, c ir d (tokia tvarka, kokia jie čia yra išvardinti). Pagal sąlygą $a + b + c = b + c + d$, o iš čia išplaukia, kad $a = d$. Kitais žodžiais tariant, du skaičiai, esantys vienos eilutės arba vieno stulpelio skirtinguose galuose, turi būti lygūs. Remiantis šia pastaba, Martynas turi užpildyti kraštinius lentelės langelius, kaip parodyta paveikslėlyje dešinėje.

3		5	3
4			4
2	?		2
3		5	3

Atskiru atveju randame (pasižiūrėję, sakysime, į pirmus tris pirmojo stulpelio skaičius), kad bet kurių trijų iš eilės einančių skaičių eilutėje arba stulpelyje suma yra lygi $3 + 4 + 2 = 9$. Jei ieškomas skaičius, turintis būti vietoj „?“, lygus x, tai skaičius trečiosios eilutės trečiajame langelyje lygus $9 - 2 - x = 7 - x$. Skaičius, esantis antrosios eilutės trečiajame langelyje yra lygus $9 - 5 - (7 - x) = x - 3$ (žr. pav. kairėje).

3		5	3
4		$x - 3$	4
2	x	$7 - x$	2
3		5	3

Kadangi visi lentelės skaičiai čia tegali būti natūralieji, tai turime $7 - x \geq 1$ ir $x - 3 \geq 1$. Iš čia išplaukia, kad $4 \leq x \leq 6$, arba, kitais žodžiais tariant, $x = 4$, 5 arba 6. Pasirinkus šias reikšmes, lentelę galima baigti pildyti taip:

3	1	5	3
4	4	1	4
2	4	3	2
3	1	5	3

3	1	5	3
4	3	2	4
2	5	2	2
3	1	5	3

3	1	5	3
4	2	3	4
2	6	1	2
3	1	5	3

Tai parodo, kad visos šios x reikšmės yra galimos.
Atsakymas. (D) Visos galimos x reikšmės yra 4, 5 ir 6, o jų suma lygi 15.

9. Parašykime kartu su Pilypu keletą pirmųjų skaičių: **2**, 1, 3, 6, **4**, 2, 4, 8, **6**, 3, 5, 10, **8**, ... Paryškinti skaičiai (imamas kas ketvirtas skaičius) vis didėja, pridedant 2. Taip bus ir toliau, remiantis dėsningumu:

$$\boldsymbol{x} \to \frac{x}{2} \to \frac{x}{2} + 2 \to x + 4 \to \boldsymbol{x + 2}.$$

Taigi skaičius $2 + 2 \cdot 110 = 222$ gaunamas po $4 \cdot 110 = 440$ veiksmų (kaip $x + 2$): skaičius 2 padidinamas 2 vienetais 110 kartų, kaskart atliekant po keturis veiksmus. Taip pat gauname skaičių 220 (kaip $x + 2$) po $4 \cdot 109$ veiksmų, o 222 (kaip $x + 4$) po $4 \cdot 109 - 1 = 435$ veiksmų. Gauname 444 po $4 \cdot 221$ veiksmų, o 222 (kaip $\frac{x}{2}$) po $4 \cdot 221 + 1 = 885$ veiksmų. Pagaliau gauname 440 po $4 \cdot 219$ veiksmų, o 222 (kaip $\frac{x}{2} + 2$) po $4 \cdot 219 + 2 = 878$ veiksmų. Taigi visi keturi atsakymai (A)-(D) yra galimos n reikšmės. (O kitų nėra, nes x reikšmėms visą laiką didėjant, didėja ir $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{2} + 2$, $x + 4$, $x + 2$ reikšmės, skaičiui 222 pasirodant tik po vieną kartą atitinkamai tarp $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{2} + 2$, $x + 4$ ir $x + 2$ reikšmių.) Renkamės atsakymą E.
Atsakymas. (E) Visi šie keturi skaičiai yra galimos n reikšmės.

10. Pažymėkime $y = 1 - x$. Tada $x = 1 - y$ ir $2 - x = y + 1$. Surašę visa tai į lygtį, gausime

$$(1 - y)^2(1 + y)^2 = 1 + 2y^2.$$

Pasinaudoję paprastomis formulėmis, turėsime

$$(1 - y)^2(1 + y)^2 = (1 - y^2)^2 = 1 - 2y^2 + y^4 = 1 + 2y^2.$$

Parašius dar paprasčiau, būtų $y^4 = 4y^2$. Iš čia $y^2(y - 2)(y + 2) = 0$ ir tada $y = 0$, $y = 2$ arba $y = -2$. Grįžtant prie x, būtų $x = 1$, $x = -1$ arba $x = 3$. Tai duotosios lygties sprendiniai, jų suma lygi 3.
Atsakymas. (C) 3.

Individualioji olimpiada

1. Tegu Aloyzo užrašyti skaičiai yra a, b, c, d. Kadangi kiekvienas skaičius kaip dėmuo „dalyvauja“ lygiai trijose iš šešių sumų, tai sudėję visas šešias papores sumas turime gauti skaičių

$$3 \cdot (a + b + c + d).$$

Šis skaičius, kadangi pagal sąlygą visi skaičiai a, b, c ir d yra sveikieji skaičiai, dalijasi iš 3. Tačiau šešių sumų suma $17 + 18 + 20 + 21 + 23 + 26 = 125$ iš 3 nesidalija. Vadinasi, Aloyzas, skaičiuodamas tas sumas, bus tikrai kažkur apsirikęs.

2. Jeigu ieškomasis skaičius dalijasi iš 225, tai jis dalijasi ir iš 25. Tada du paskutiniai jo skaitmenys yra 00, 25, 50 arba 75. Pastarieji trys atvejai pagal sąlygą yra negalimi. Vadinasi, ieškomasis skaičius baigiasi mažiausiai dviem nuliais. Toliau, jeigu ieškomasis skaičius dalijasi iš $225 = 9 \cdot 25$, tai jis dalijasi be liekanos ir iš 9. Kadangi jo išraiškoje nėra nė vieno iš skaitmenų 3, 4, 5, 6, 7, 8 ir 9, tai dalumą iš 9 turi užtikrinti skaitmenys 0, 1, 2. Ieškomojo skaičiaus skaitmenų suma turi dalytis iš 9, o paskutiniai du skaitmenys turi būti 00. To pakanka, kad skaičius dalytųsi iš $225 = 9 \cdot 25$. Kad jis būtų pats mažiausias, tai visų pirma reikia, kad jame būtų kuo mažiau skaitmenų. Skaitmenų negali būti mažiau nei 7. Kitaip skaitmenų suma didesnė už 0, bet ne didesnė už $2 + 2 + 2 + 2 + 0 + 0 < 9$ (nesidalija iš 9). Esant 7 skaitmenims, be dviejų nulių skaičiaus gale turime imti keturis dvejetus ir vieną vienetą (tik taip gaunama skaitmenų suma 9). Mažiausias toks skaičius yra 1 222 200 – jis tenkina uždavinio sąlygą.
Atsakymas. 1 222 200.

3. Žr. komandinės olimpiados 8-ojo uždavinio sprendimą.

4. Žr. komandinės olimpiados 5-ojo uždavinio sprendimą.

5. Sužymėkime įsivaizduojamųjų 10 atkarpų ilgius $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le \cdots \le a_{10}$. Jei kurios nors trys atkarpos, kurių ilgiai yra a, b ir c (skaičius c didžiausias), nesudaro trikampio, tai $c \ge a + b$. Tačiau skaičius $a + b$ yra lyginis, o c – nelyginis. Todėl $c > a + b$ ir $c \ge a + b + 1$.

Dabar tarkime, kad jokios trys iš Martyno įsivaizduojamųjų atkarpų nesudaro trikampio. Tada

$$a_3 \ge 1 + a_1 + a_2 \ge 1 + 1 + 1 = 3, \qquad a_4 \ge 1 + a_2 + a_3 \ge 1 + 1 + 3 = 5$$

ir toliau analogiškai

$$a_5 \ge 1 + 3 + 5 = 9, \qquad a_6 \ge 1 + 5 + 9 = 15, \qquad a_7 \ge 1 + 9 + 15 = 25,$$
$$a_8 \ge 1 + 15 + 25 = 41, \qquad a_9 \ge 1 + 25 + 41 = 67, \qquad a_{10} \ge 1 + 41 + 67 = 109 > 100.$$

Tačiau $a_{10} < 100$. Gavome prieštarą, taigi mūsų prielaida yra klaidinga. Vadinasi, visada yra tokios trys atkarpos, iš kurių galima sudaryti trikampį.