8 tema. LOGARITMINĖS LYGTYS IR NELYGYBĖS

(2022–2024)

Teorinę medžiagą parengė bei aštuntąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis

Šios temos turinį lengva nuspėti iš paties pavadinimo. Tuo labiau, kad logaritmai gana išsamiai nagrinėjami kiekvienoje gimnazijoje.

Taigi kalbėsime apie lygčių ir nelygybių, vienaip ar kitaip susijusių su logaritmais, sprendimą. Apsiribosime teorinėmis žiniomis, kurių galima rasti kiekviename matematikos vadovėlyje (aišku, logaritmams skirtuose skyriuose) ir neaiškinsime, kaip įrodomos logaritmų savybės. Dėmesio centre bus korektiškas logaritmo savybių taikymas.

Kad būtų paprasčiau, prisiminkime ir čia pat užsirašykime, jog *teigiamo skaičiaus b logaritmas pagrindu a* $(a>0, a\neq 1)$ *yra laipsnio rodiklis (realusis skaičius, žymimas simboliu* $\log_a b$*), kuriuo pakėlus a, gaunamas skaičius b.*

Taigi visada

$$a^{\log_a b}=b, \text{ jei tik } a>0, b>0, a\neq 1. \tag{1}$$

Logaritmas $\log_{10} b$ vadinamas *dešimtainiu logaritmu* ir žymimas lg *b*.

Taip pat užsirašykime kelias logaritmo savybes, išplaukiančas iš jo apibrėžimo:

$$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c, \text{ jei } a>0, b>0, c>0, a\neq 1; \tag{2}$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c, \text{ jei } a>0, b>0, c>0, a\neq 1; \tag{3}$$

$$\log_a(b^m)=m\log_a b, \text{ jei } a>0, b>0, c>0, a\neq 1, m\in \mathrm{R}; \tag{4}$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ jei } a>0, b>0, c>0, a\neq 1, c\neq 1; \tag{5}$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}, \text{ jei } a>0, b>0, a\neq 1, b\neq 1. \tag{6}$$

Aišku, kad (6) lygybė gaunama iš (5), kai $c=b$.

1 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\log_2 x(x+9)+\log_2\frac{x+9}{x}=0. \tag{7}$$

Sprendimas. Lygties apibrėžimo sričiai rasti pakanka išspręsti nelygybę $x(x+9)>0$, nes $\frac{x+9}{x}=\frac{x(x+9)}{x^2}$. Gautume aibę $(-\infty;-9)\cup(0;+\infty)$.

Kadangi

$$\log_2 x(x+9)+\log_2\frac{x+9}{x}=\log_2\left(x(x+9)\cdot\frac{x+9}{x}\right)=\log_2(x+9)^2,$$

kai $x\in(-\infty;-9)\cup(0;+\infty)$, tai lygtis $\log_2 x(x+9)+\log_2\frac{x+9}{x}=0$ yra ekvivalenti lygčiai

$$\log_2(x+9)^2=0, \tag{8}$$

bet tik aibėje $(-\infty;-9)\cup(0;+\infty)$. Pastaroji pastaba yra esminė, nes (8) lygtis apibrėžta platesnėje aibėje $(-\infty;-9)\cup(-9;+\infty)$ ir šioje aibėje turi du sprendinius ($x=-10$ ir $x=-8$):

$$\log_2(x+9)^2=0\Rightarrow(x+9)^2=1\Rightarrow x+9=\pm 1\Rightarrow x=-9\pm 1\Rightarrow x=-10 \text{ arba } x=-8.$$

Kadangi $x=-8$ nepriklauso (7) lygties apibrėžimo sričiai, tai $x=-10$ yra vienintelis (7) lygties sprendinys.

Ats.: -10.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad sprendžiant (8) lygtį nesunku prarasti sprendinį $x=-10$, pavyzdžiui, šiais veiksmais:

$$\log_2(x+9)^2=0 \Rightarrow 2\log_2(x+9)=0 \Rightarrow x+9=1 \Rightarrow x=-8.$$

Beje, tokį pat rezultatą gautume ir pasirinkę tokią (7) lygties keitimo kitomis lygtimis schemą:

$$\log_2 x(x+9)+\log_2\frac{x+9}{x}=0 \Rightarrow \left(\log_2 x+\log_2(x+9)\right)+\left(\log_2(x+9)-\log_2 x\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\log_2(x+9)=0 \Rightarrow \log_2(x+9)=0 \Rightarrow x+9=1 \Rightarrow x=-8.$$

Ir vienu, ir kitu atveju visai tikėtina klaidinga išvada – (7) lygtis sprendinių neturi.

Dabar pasvarstykime, kodėl galėjome be jokio vargo suklupti spręsdami iš pažiūros visai paprastą (7) logaritminę lygtį

$$\log_2 x(x+9)+\log_2\frac{x+9}{x}=0.$$

Esminiai momentai yra šie:

1) lygybė $\log_2(x+9)^2=2\log_2(x+9)$ galioja tik intervale $(-9;+\infty)$;

2) lygybės

$$\log_2 x(x+9)=\log_2 x+\log_2(x+9) \text{ ir } \log_2\frac{x+9}{x}=\log_2(x+9)-\log_2 x$$

galioja tik intervale $(0;+\infty)$.

Tuo tarpu (7) lygties sprendinių paieškos aibė yra $(-\infty;-9)\cup(0;+\infty)$. Taigi neapdairiai taikant logaritmo savybes galima prarasti dalį pradinės lygties sprendinių.

Mažesnė bėda, jei keičiant vieną lygtį kita lygtimi praplečiama sprendinių paieškos aibė. Tada pakaktų patikrinti gautus atsakymus ir atmesti netinkamus.

2 pavyzdys. Išspręskime logaritminę lygtį

$$2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0. \qquad (9)$$

Sprendimas. Pagal logaritmo apibrėžimą, turi galioti sąlygos $x-2>0$ ir $x-4\neq 0$, todėl (9) lygties apibrėžimo aibė yra $(2;4)\cup(4;+\infty)$.

Kadangi nelygybė $(x-4)^2>0$ yra ekvivalenti nelygybei $|x-4|>0$, tai

$$\log_3(x-4)^2=2\log_3|x-4|.$$

Vadinasi, (9) lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0.$$

Toliau: $2\left(\log_3(x-2)+\log_3|x-4|\right)=0 \Rightarrow \log_3\left((x-2)\cdot|x-4|\right)=0 \Rightarrow (x-2)\cdot|x-4|=1.$

Pastaroji lygtis intervale (2; 4) yra ekvivalenti lygčiai $(x-2)(4-x)=1$, o intervale $(4;+\infty)$ – lygčiai $(x-2)(x-4)=1$.

Tęsdami (9) lygties sprendimą, abu atvejus išnagrinėkime atskirai:

1) $\begin{cases} x\in(2;4), \\ (x-2)(4-x)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(2;4), \\ x^2-6x+9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(2;4), \\ (x-3)^2=0 \end{cases} \Rightarrow x=3;$

2) $\begin{cases} x\in(4;+\infty), \\ (x-2)(x-4)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(4;+\infty), \\ x^2-6x+7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(4;+\infty), \\ x=3\pm\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x=3+\sqrt{2}.$

Vadinasi, (9) lygtis turi du sprendinius – realiuosius skaičius 3 ir $3+\sqrt{2}$.

Ats.: 3; $3+\sqrt{2}$.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\log_x 16+\log_{2x} 64=4. \qquad (10)$$

Sprendimas. Šios logaritminės lygties apibrėžimo aibę nusako nelygybės $x>0$, $2x>0$ bei sąlygos $x\neq 1$ ir $2x\neq 1$. Iš čia gauname, kad $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$.

Sprendžiamą lygtį pertvarkykime taikydami logaritmo pagrindo pakeitimo formulę (5):

1) $\log_x 16 = \dfrac{\log_2 16}{\log_2 x} = \dfrac{4}{\log_2 x}$;

2) $\log_{2x} 64 = \dfrac{\log_2 64}{\log_2 2x} = \dfrac{6}{\log_2 2 + \log_2 x} = \dfrac{6}{1+\log_2 x}$.

Pažymėję $t = \log_2 x$, gausime, kad

$$\log_x 16 + \log_{2x} 64 = \frac{4}{t} + \frac{6}{1+t},$$

todėl (10) lygtis tampa lygtimi

$$\frac{4}{t} + \frac{6}{1+t} = 4. \qquad (11)$$

Aišku, kad $t \neq 0$ ir $1+t \neq 0$, nes $x \neq 1$ ir $x \neq \dfrac{1}{2}$. Padauginę (11) lygtį iš $t(1+t)$, gausime:

$$4(1+t) + 6t = 4t(1+t) \Rightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} \Rightarrow t = 2 \text{ arba } t = -\frac{1}{2}.$$

Jei $t = 2$, tai $\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$.

Jei $t = -\dfrac{1}{2}$, tai $\log_2 x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Taigi (10) lygtis turi du sprendinius – realiuosius skaičius 4 ir $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ats.: 4; $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Paprasčiausios logaritminės nelygybės yra $\log_a x < c$ ir $\log_a x > c$; čia $a > 0$, $a \neq 1$, $c \in \mathrm{R}$. Gerai suvokus jų sprendimą bei korektiškai taikant logaritmo savybes galima be didesnio vargo išspręsti daug įvairaus sudėtingumo logaritminių nelygybių.

Prisiminkime, kad logaritminė funkcija $y = \log_a x$, $x > 0$, yra *didėjančioji funkcija*, jeigu $a > 1$; ji yra *mažėjančioji funkcija*, jeigu $0 < a < 1$.

Kadangi $c = \log_a(a^c)$, $c \in \mathrm{R}$, tai logaritminė nelygybė $\log_a x < c$ yra ekvivalenti nelygybei $\log_a x < \log_a(a^c)$, o ši nelygybė yra ekvivalenti nelygybei $0 < x < a^c$, jei $a > 1$; ji yra ekvivalenti nelygybei $x > a^c$, jei $0 < a < 1$.

Vadinasi,

• logaritminės nelygybės $\log_a x < c$ sprendinių aibė yra:

1) intervalas $(0; a^c)$, jei $a > 1$;

2) intervalas $(a^c; +\infty)$, jei $0 < a < 1$;

• logaritminės nelygybės $\log_a x > c$ sprendinių aibė yra:

1) intervalas $(a^c; +\infty)$, jei $a > 1$;

2) intervalas $(0; a^c)$, jei $0 < a < 1$.

4 pavyzdys. Išspręskime logaritminę nelygybę

$$\log_2 \frac{4}{x+3} > \log_2(2-x). \qquad (12)$$

Sprendimas. Šios nelygybės apibrėžimo aibę sudaro nelygybių $\dfrac{4}{x+3} > 0$ ir $2 - x > 0$ sistemos sprendinių aibė. Šioje aibėje (12) logaritminė nelygybė yra ekvivalenti nelygybei

$$\frac{4}{x+3} > 2 - x.$$

Vadinasi, (12) nelygybės sprendinių aibė sutampa su nelygybių sistemos

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x+3} > 2-x, \\ 2-x>0 \end{cases} \tag{13}$$

sprendinių aibe.

Spręsdami (13) sistemą, gauname:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x+3} > 2-x, \\ 2-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x+3} - 2 + x > 0, \\ x<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x+3} > 0, \\ x<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+2)(x-1)}{x+3} > 0, \\ x<2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3<x<-2 \text{ arba } x>1, \\ x<2 \end{cases} \Rightarrow -3<x<-2 \text{ arba } 1<x<2.$$

Matome, kad (12) logaritminės nelygybės sprendinių aibė yra intervalų $(-3;-2)$ ir $(1;2)$ sąjunga.

Ats.: $(-3;-2)\cup(1;2)$.

5 pavyzdys. Išspręskime logaritminę nelygybę

$$\log_{0,5}\frac{2x^2-4x-6}{4x-11} \le -1. \tag{14}$$

Sprendimas. Pagal logaritmo apibrėžimą, (14) nelygybė yra apibrėžta nelygybės

$$\frac{2x^2-4x-6}{4x-11} > 0 \tag{15}$$

sprendinių aibėje.

Aišku, kad

$$-1 = -\log_{0,5} 0,5 = \log_{0,5}(0,5)^{-1} = \log_{0,5} 2,$$

todėl (14) nelygybė ekvivalenti nelygybei

$$\log_{0,5}\frac{2x^2-4x-6}{4x-11} \le \log_{0,5} 2.$$

O pastaroji nelygybė (esant (15) sąlygai) yra ekvivalenti nelygybei

$$\frac{2x^2-4x-6}{4x-11} \ge 2. \tag{16}$$

Matome, kad (14) logaritminės nelygybės sprendinių aibė sutampa su (16) nelygybės sprendinių aibe. Spręsdami ją, gauname:

$$\frac{2x^2-4x-6}{4x-11} \ge 2 \Rightarrow \frac{x^2-2x-3}{4x-11} - 1 \ge 0 \Rightarrow \frac{x^2-6x+8}{4x-11} \ge 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x-4)}{4x-11} \ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [2;2,75)\cup[4;+\infty).$$

Ats.: $[2;2,75)\cup[4;+\infty)$.

6 pavyzdys. Išspręskime logaritminę nelygybę

$$3\log_x 3 - 1 \le \frac{4}{3\log_x 3 - 1}. \tag{17}$$

Sprendimas. Aišku, kad (17) nelygybė yra apibrėžta aibėje $(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Pažymėkime $t = 3\log_x 3 - 1$ ir iš pradžių išspręskime nelygybę

$$t \le \frac{4}{t}.$$

Gausime:

$$t \le \frac{4}{t} \Rightarrow t - \frac{4}{t} \le 0 \Rightarrow \frac{t^2-4}{t} \le 0 \Rightarrow \frac{(t+2)(t-2)}{t} \le 0 \Rightarrow t \le -2 \text{ arba } 0 < t \le 2.$$

Matome, kad (17) nelygybės sprendinių aibė yra nelygybių

$$3\log_x 3-1\le -2 \quad \text{ir} \quad 0\le 3\log_x 3-1\le 2$$

sprendinių aibių sąjunga.

Spręsdami šias nelygybes, gausime:

1) $3\log_x 3-1\le -2 \Rightarrow \log_x 27\le -1 \Rightarrow \log_x 27\le \log_x \frac{1}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ 27\ge \frac{1}{x} \end{cases} \text{arba} \begin{cases} x>1, \\ 27\le \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ x\ge \frac{1}{27} \end{cases} \text{arba} \begin{cases} x>1, \\ x\le \frac{1}{27} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{27}\le x<1;$$

2) $0<3\log_x 3-1\le 2 \Rightarrow 1<\log_x 27\le 3 \Rightarrow \log_x x<\log_x 27\le \log_x(x^3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ x>27\ge x^3 \end{cases} \text{arba} \begin{cases} x>1, \\ x<27\le x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1, \\ x<27, \\ x^3\ge 27 \end{cases} \Rightarrow 3\le x<27.$$

Vadinasi, (17) lygties sprendinių aibė yra intervalų $\left[\frac{1}{27};1\right)$ ir $[3;27)$ sąjunga.

Ats.: $\left[\frac{1}{27};1\right)\cup[3;27)$.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite lygtį $\log_5(2+\log_3(3+x))=0$.

2. Išspręskite lygtį $\lg(5-x)-\frac{1}{3}\lg(35-x^3)=0$.

3. Išspręskite lygtį $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2$.

4. Išspręskite lygtį $\log_3(3^x-8)=2-x$.

5. Išspręskite lygtį $\log_{x+4}(x^2-1)=\log_{x+4}(5-x)$.

6. Išspręskite lygtį $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2=4$.

7. Išspręskite nelygybę $\frac{\lg 7-\lg(8-x^2)}{\lg(x+3)}>0$.

8. Išspręskite nelygybę $2\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>\frac{2}{3}$.

9. Išspręskite nelygybę $2\log_4(2x^2+3)<\log_2(x^2+6)$.

10. Išspręskite nelygybę $\log_x\left(x^2-\frac{3}{16}\right)>4$.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2024 m. kovo 2 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA