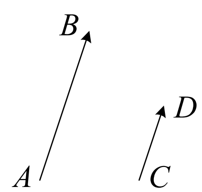
LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

III. GEOMETRINIAI VEKTORIŲ TAIKYMAI

(2023–2025)

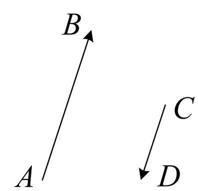
Teorinę medžiagą parengė ir trečiąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

Sakoma, kad atkarpa AB yra *orientuotoji atkarpa* (arba kryptinė atkarpa), jei yra nurodyta, kuris iš taškų A ir B yra orientuotosios atkarpos pradžios taškas, tuomet kitas atkarpos galas yra jos pabaigos taškas. Orientuotosios atkarpos yra vadinamos *vektoriais*. Tekste vektoriai žymimi arba viena raide su rodykle $\vec{a}$, arba dviem didžiosiomis raidėmis su rodykle $\overrightarrow{AB}$, pirmoje vietoje rašant vektoriaus pradžios tašką. Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra vadinami a) *vienakrypčiais* (žymima $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$), jei spinduliai AB ir CD yra vienodos krypties (1a pav.), b) *priešpriešiais* (žymima $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$), jei spinduliai AB ir CD yra priešingų krypčių (1b pav.), c) *kolineariaisiais* (žymima $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$), jei tiesės AB ir CD lygiagrečios. Kolinearieji vektoriai yra arba vienakrypčiai, arba priešpriešiai. Vektoriaus $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *ilgiu* (arba *moduliu*) vadinamas atkarpos AB ilgis; vektoriaus $\vec{a}$ modulis žymimas $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$. Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra vadinami *lygiais*, jei jų moduliai lygūs, o kryptys sutampa, žymima $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Iš šio apibrėžimo išplaukia, kad, jei vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ nėra vienoje tiesėje, tai vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra lygūs tada ir tik tada, kai keturkampis $ABDC$ yra lygiagretainis.



$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$

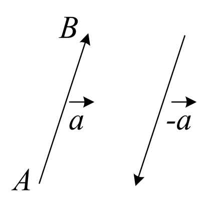
1a pav.



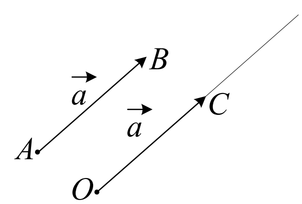
$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$

1b pav.

Nuliniu vektoriumi $\vec{0}$ vadinamas toks vektorius, kurio pradžios ir galo taškai sutampa. Nulinis vektorius yra kolinearusis su bet kuriuo vektoriumi. Nulinio vektoriaus modulis lygus nuliui. Vektoriai, kurių moduliai lygūs, o kryptys priešingos, yra vadinami *priešingaisiais vektoriais*. Vektoriui $\vec{a}$ priešingasis vektorius žymimas $-\vec{a}$. Akivaizdu, kad $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (2 pav.), o $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.

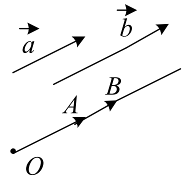


2 pav.



3 pav.

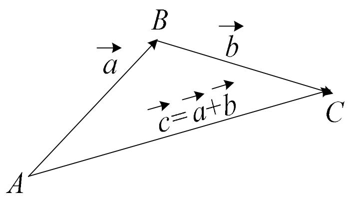
Sakykime, kad $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ – duotasis vektorius, O – bet kuris plokštumos taškas. Nubrėžkime spindulį OM, vienkryptį su spinduliu AB ir jame raskime vienintelį tašką C, kad atkarpos AB ir OC būtų vienodo ilgio (3 pav.). Tuomet vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{OC}$ yra lygūs. Sakoma, kad vektorius $\vec{a}$ yra *atidedamas nuo taško O*. Akivaizdu, bet kuris vektorius vieninteliu būdu yra atidedamas nuo bet kurio taško. Jei $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – kolinearieji vektoriai, tai atidėti nuo vieno taško, jie yra vienoje tiesėje (4 pav.). Jei du vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ atidėti nuo vieno taško O ($\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}$), tai kampas AOB yra vadinamas *kampu tarp vektorių* $\vec{a}$ ir $\vec{b}$; šis kampas yra intervale $[0^0, 180^0]$. Jei $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, tai kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ lygus 0°, o jei $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ – tai kampas tarp jų lygus 180°.



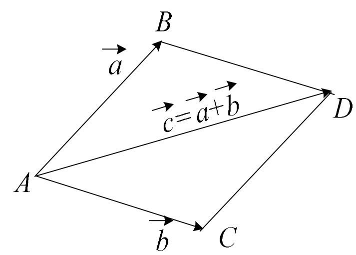
$$\vec{a} \parallel \vec{b},\ \overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}.$$

4 pav.

Sakykime, kad $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – du vektoriai. Parinkime tašką A ir atidėkime nuo jo vektorių $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, o nuo taško B - vektorių $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ (5 pav.). Tuomet vektorius $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ yra vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *suma*: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, arba $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (vektorių sudėties trikampio taisyklė).



5 pav.



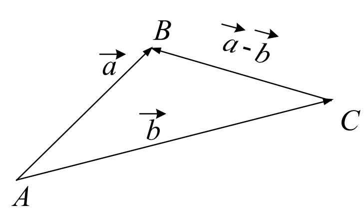
6 pav.

Jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearieji, tai atidėję nuo taško A vektorius $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ir $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, nubrėžiame lygiagretainį *ABDC* (6 pav.). Tuomet $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (vektorių sudėties lygiagretainio taisyklė).

Vektorių sudėtis pasižymi šiomis savybėmis:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *skirtumu* vadinamas toks vektorius $\vec{x}$, kad $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$, žymime $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$. Akivaizdu, kad $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ (7 pav.). Jei $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, tai $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

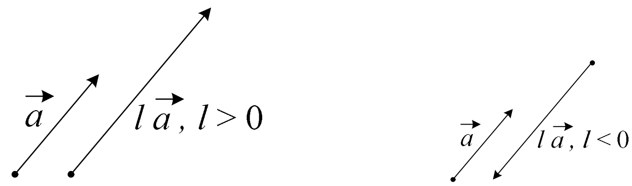


7 pav.

Skaičiaus l ir vektoriaus $\vec{a}$ *sandauga* vadinamas vektorius $\vec{b}$, nustatomas šiomis sąlygomis:

1) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, jei $l > 0$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, jei $l < 0$;

2) $|\vec{b}| = |l| \cdot |\vec{a}|$ (8 pav.).



8 pav.

Skaičiaus 0 ir vektoriaus $\vec{a}$ sandauga yra nulinis vektorius. Skaičiaus l ir vektoriaus $\vec{a}$ sandauga žymima $\vec{b} = l \cdot \vec{a}$ (arba $\vec{b} = l\vec{a}$).

Vektoriaus daugyba iš skaičiaus pasižymi tokiomis savybėmis:

1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a},\ -1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$,
2) $(lk) \cdot \vec{a} = l \cdot (k \cdot \vec{a})$,
3) $(l + k) \cdot \vec{a} = l \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{a}$,
4) $l \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = l \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b}$.

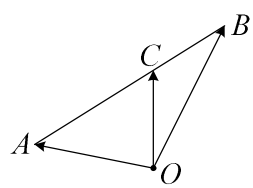
Nenuliniai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearieji tada ir tik tada, kai yra toks skaičius l, kad $\vec{b} = l \cdot \vec{a}$. Jei $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, tai $l = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, o jei $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, tai $l = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

1 pavyzdys. Sakykime, kad atkarpoje AB yra taškas C ir $AC : CB = \alpha : \beta$, čia α ir β – du duotieji skaičiai. Tuomet bet kuriam taškui O yra teisinga lygybė $\overrightarrow{OC} = \frac{\beta\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB}}{\alpha + \beta}$.

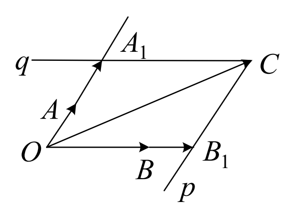
Sprendimas. Sakykime, kad $AC : CB = \alpha : \beta$ (9 pav.). Tuomet $\overrightarrow{AC} = \frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{CB}$. Jei O – bet kuris plokštumos taškas, tai $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, t. y. $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \frac{\alpha}{\beta}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$. Iš čia gauname, kad $(\alpha + \beta)\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OA}$, ką ir reikėjo įrodyti.

Atskiru atveju, kai taškas C yra atkarpos AB vidurio taškas, tai $AC : CB = 1 : 1$, ir įrodytoji formulė yra tokia: $\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

1 teorema. Sakykime, kad $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – du plokštumos nekolinearieji vektoriai. Tuomet bet kuris plokštumos vektorius $\vec{c}$ vienareikšmiškai išreiškiamas vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ t. y. egzistuoja skaičiai l ir m, kad būtų teisinga lygybė $\vec{c} = l\vec{a} + m\vec{b}$.



9 pav.



10 pav.

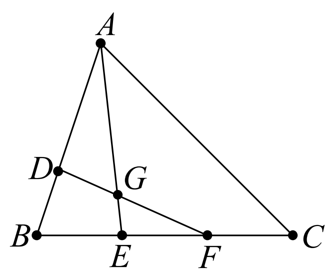
Įrodymas. Atidėkime duotuosius vektorius nuo pasirinkto plokštumos taško O: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ (10 pav.). Kadangi vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra nekolinearieji, tai taškai O, A, B nėra vienoje tiesėje. Jei taškas C yra tiesėje OA (arba tiesėje OB), tai vektoriai $\vec{c}$ ir $\vec{a}$ (arba $\vec{c}$ ir $\vec{b}$) yra kolinearieji, todėl yra toks skaičius l, kad $\vec{c} = l\vec{a} = l\vec{a} + 0 \cdot \vec{b}$ (arba yra toks skaičius m, kad $\vec{c} = m\vec{b} = 0 \cdot \vec{a} + m\vec{b}$). Jei taškas C nėra nei tiesėje OA, nei tiesėje OB, tai per tašką C nubrėžiame tieses $p \parallel OA$ ir $q \parallel OB$. Sakykime, kad tiesės p ir OB kertasi taške B_1, o tiesės q ir OA – taške A_1. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{OA_1}$ ir $\overrightarrow{OA}$ kolinearieji, tai egzistuoja skaičius l, kad $\overrightarrow{OA_1} = l \cdot \overrightarrow{OA} = l \cdot \vec{a}$. Analogiškai vektoriai $\overrightarrow{OB_1}$ ir $\overrightarrow{OB}$ kolinearieji, tai egzistuoja skaičius m, kad $\overrightarrow{OB_1} = m \cdot \overrightarrow{OB} = m \cdot \vec{b}$. Kadangi keturkampis OA_1CB_1 yra lygiagretainis, tai $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$, todėl $\vec{c} = l\vec{a} + m\vec{b}$. Jei $l' \neq l$, ir $m' \neq m$ – kiti skaičiai, su kuriais teisinga lygybė $\vec{c} = l'\vec{a} + m'\vec{b}$, tai atėmę vieną lygybę iš kitos, gauname, kad $(l - l')\vec{a} + (m - m')\vec{b} = \vec{0}$ t. y. $\vec{a} = \frac{m - m'}{l - l'}\vec{b}$, taigi $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Gavome prieštarą teoremos sąlygai, taigi $l' = l,\ m' = m$, ir teorema įrodyta.

Taikant šią teoremą uždavinių sprendimui, paprastai pasirenkami kurie nors du nekolinearieji vektoriai ir jais išreiškiami uždavinio sąlygoje minimi vektoriai, arba kuris nors vienas vektorius išreiškiamas dviem būdais. Pailiustruosime tai pavyzdžiais.

2 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinėje AB yra taškas D, o karštinėje BC — taškai E ir F tokie, kad $AD : DB = 3 : 2,\ BE : EC = 1 : 3,\ BF : FC = 4 : 1.$ Rasime, kokiu santykiu tiesė AE dalija atkarpą DF.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesės AE ir DF susikerta taške G (11 pav.). Kadangi taškas E dalija atkarpą BC santykiu $BE : EC = 1 : 3$, tai pagal 1 pavyzdžio lygybę $\overrightarrow{AE} = \frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}$. Be to akivaizdu, kad $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}.$ Vektoriai $\overrightarrow{AE}$ ir $\overrightarrow{AG}$ yra kolinerieji, tai yra toks skaičius x, kad $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AE} = x \cdot \frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4} = \frac{3}{4}x\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}x\overrightarrow{AC}.$ (*) Kita vertus $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{DG}$ ir $\overrightarrow{DF}$ yra kolineariеji, tai yra toks skaičius $y,$ kad $\overrightarrow{DG} = y\overrightarrow{DF} = y\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}\right) = y\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}\right) = y\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\right) = -\frac{2}{5}y\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}y\overrightarrow{AC}.$ Tada $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}y\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}y\overrightarrow{AC} = \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5}y\right)\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}y\overrightarrow{AC}$ (**). Kaip išplaukia iš 1 teoremos gautosios vektoriaus $\overrightarrow{AG}$ išraiškos (*) ir (**) nekolineariaisiais vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ turi sutapti, todėl turii būti teisingos lygybės $\frac{3}{4}x = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}y,\ \ \frac{1}{4}x = \frac{4}{5}y.$ Iš čia $x = \frac{16}{5}y,\ \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{5}y = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}y,\ y = \frac{3}{14}.$ Taigi $DG : GF = 3 : 11.$

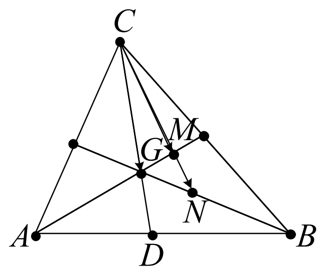
Atsakymas: $3 : 11$.



11 pav.

3 pavyzdys. Taškas G yra trikampio ABC pusiaukraštinių sankirtos taškas. Per viršūnę C nubrėžta tiesė l kerta tieses AG ir BG atitinkamai taškuose M ir N (12 pav.). Jei $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{GM},\ \overrightarrow{BG} = lGN,$ tai $k + l = 1.$ Įrodysime tai.

Sprendimas. Jei CD – trikampio pusiaukraštinė, tai pagal trikampio pusiaukraštinių savybes $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2} = \frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{3}.$ Tuomet $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{CG} + \frac{1}{k}\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CG} + \frac{1}{k}\left(\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CA}\right) = \left(1 + \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{CG} - \frac{1}{k}\overrightarrow{CA} = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{3} - \frac{1}{k}\overrightarrow{CA} = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3k}\right)\overrightarrow{CA} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3k}\right)\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{CG} + \frac{1}{l}\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CG} + \frac{1}{l}\left(\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CB}\right) = \left(1 + \frac{1}{l}\right)\overrightarrow{CG} - \frac{1}{l}\overrightarrow{CB} = \left(1 + \frac{1}{l}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{3} - \frac{1}{t}\overrightarrow{CB} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3l}\right)\overrightarrow{CA} + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3l}\right)\overrightarrow{CB}$. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{CM}$ ir $\overrightarrow{CN}$ yra kolineariеji, tai yra toks skaičius $x,$ kad $\overrightarrow{CM} = x\overrightarrow{CN}$, t. y. $\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3k}\right)\overrightarrow{CA} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3k}\right)\overrightarrow{CB} = x\left(\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3l}\right)\overrightarrow{CA} + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3l}\right)\overrightarrow{CB}\right)$. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{CA}$ ir $\overrightarrow{CB}$ yra nekolinearieji, tai iš šios išraiškos išplaukia lygybės $\frac{1}{3}-\frac{2}{3k}=\frac{x}{3}+\frac{x}{3l}$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3k}=\frac{x}{3}-\frac{2x}{3l}$. Iš čia $1-\frac{2}{k}=x+\frac{x}{l}$, $1+\frac{1}{k}=x-\frac{2x}{l}$. Pirmąją lygybę padauginame iš 2 ir sudedame su antrąja: $3-\frac{3}{k}=3x$, $x=1-\frac{1}{k}$, $1+\frac{1}{k}=\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{l}\right)$, $\frac{k+1}{k}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{l-2}{l}$, $(k+1)l=kl-2k-l+2$, $2k+2l=2$, ką ir reikėjo įrodyti.



12 pav.

Skaičius, lygus vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ modulių sandaugai, padaugintai iš kampo tarp jų kosinuso, vadinamas vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *skaliarine sandauga.* Jei $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – duotieji vektoriai, kampas tarp jų lygus φ, tai jų skaliarinė sandauga $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$. Iš skaliarinės sandaugos apibrėžimo išplaukia, kad nenuliniai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ statmeni tada ir tik tada, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui.

Skaliarinė sandauga pasižymi šiomis savybėmis:

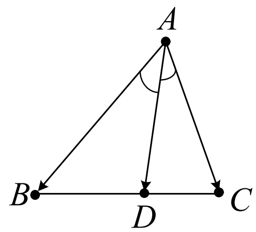
1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
3. $(l\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=l\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$;
4. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2\geq 0$, $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ tik kai $\vec{a}=\vec{0}$.

Pagal skaliarinės daugybos apibrėžimą ir ketvirtąją savybę kampas φ tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ apskaičiuojamas pagal formulę $\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, o vektoriaus $\vec{a}$ modulis – pagal formulę $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

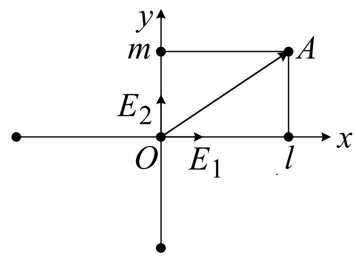
4 pavyzdys. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ moduliai atitinkamai lygūs 3 ir 4, kampas tarp jų 60^0. Trikampis ABC yra toks, kad $\overrightarrow{AB}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=2\vec{a}$. Rasime trikampio pusiaukampinės AD ilgį.

Sprendimas. Taikome trikampio pusiaukampinės savybę: trikampio kampo A pusiaukampinė kerta trikampio kraštinę BC taške D ir yra teisinga lygybė $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ (13 pav.). Kadangi $\overrightarrow{AB}=\vec{a}-2\vec{b}$, tai trikampio kraštinės AB ilgis $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}=\sqrt{(\vec{a}-2\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2}$. Įrašę į šią išraišką $\vec{a}^2=[\vec{a}]^2=3^2=9$, $\vec{b}^2=|\vec{b}|^2=4^2=16$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^0=3\cdot4\cdot\frac{1}{2}=6$, gauname, kad $AB=7$. Kadangi $\overrightarrow{AC}=2\vec{a}$, kraštinės AC ilgis lygus $AC=|\overrightarrow{AC}|=|2\vec{a}|=2\cdot|\vec{a}|=6$. Taigi $BD:DC=AB:AC=7:6$, todėl pagal 1 pavyzdžio lygybę $\overrightarrow{AD}=\frac{6\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{AC}}{6+7}$, tuomet $AD=|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{\overrightarrow{AD}^2}=\frac{1}{13}\sqrt{(6\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{13}\sqrt{(6(\vec{a}-2\vec{b})+7\cdot2\vec{a})^2}=\frac{1}{13}\sqrt{(20\vec{a}-12\vec{b})^2}=\frac{4}{13}\sqrt{(5\vec{a}-3\vec{b})^2}=\frac{4}{13}\sqrt{25\vec{a}^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^2}=\frac{4}{13}\sqrt{25\cdot9-30\cdot6+9\cdot16}=\frac{4}{13}\sqrt{189}=\frac{12}{13}\sqrt{21}$.

Atsakymas: $\frac{12}{13}\sqrt{21}$.



13 pav.



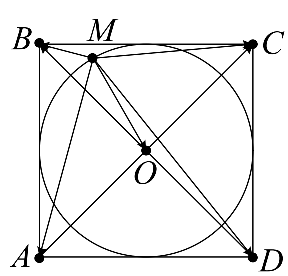
14 pav.

Sakykime, kad plokštumoje yra duota stačiakampė Dekarto koordinačių sistema Oxy, jos ašių Ox ir Oy vienetiniai vektoriai paprastai žymimi $\overrightarrow{OE_1} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{\jmath}$ (14 pav.). Kadangi vektoriai $\vec{\imath}$ ir $\vec{\jmath}$ yra nekolinearieji, tai bet kuris plokštumos vektorius $\vec{a}$ jais išreiškiamas (1 teorema): $\vec{a} = l\vec{\imath} + m\vec{\jmath}$. Skaičiai l ir m yra vadinami vektoriaus $\vec{a}$ koordinatėmis koordinačių sistemoje Oxy. Jei vektorius $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ atidedamas nuo koordinačių pradžios taško, tai skaičiai l ir m yra taško A koordinatės koordinačių sistemoje Oxy (14 pav.). Jei koordinačių sistemoje taškų A ir B koordinatės $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, tai iš lygybės $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ gauname formulę vektoriaus koordinatėms rasti, kai žinomos jo galų koordinatės $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath}$.

Kadangi vektoriai $\vec{\imath}$ ir $\vec{\jmath}$ yra statmeni, tai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui. Jei $\vec{a} = l_1\vec{\imath} + m_1\vec{\jmath}$, $\vec{b} = l_2\vec{\imath} + m_2\vec{\jmath}$, tai iš skaliarinės daugybos savybių lengvai gauname, kad $\vec{a} \cdot \vec{b} = l_1 l_2 + m_1 m_2$. Iš čia išplaukia, kad $|\vec{a}| = \sqrt{l_1^2 + m_1^2}$, o kampo tarp vektorių kosinusas randamas pagal formulę $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$.

5 pavyzdys. Į kvadratą įbrėžtas apskritimas. Įrodysime, kad bet kurio šio apskritimo taško atstumų iki kvadrato viršūnių kvadratų suma yra vienoda visiems apskritimo taškams.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas O yra kvadrato $ABCD$ įstrižainių sankirtos taškas, taškas M yra kuris nors į kvadratą įbrėžto apskritimo taškas (15 pav.). Turime: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}$. Šias lygybes skaliariškai keliame kvadratu ir sudedame. Žymėdami kvadrato kraštinę $AB = BC = CD = DA = a$, gauname, kad $4a^2 = 2(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2) - 2\left(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA}\right)$. Iš čia $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2 + (\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) + \overrightarrow{MD}\left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}\right) = 2a^2 + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})$. Kadangi $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}$, o $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, tai $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right) = 4\overrightarrow{MO}^2 = 4R^2$, čia $R = \frac{a}{2}$ – į kvadratą įbrėžto apskritimo

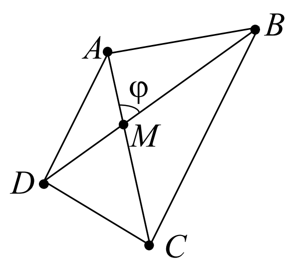


15 pav.

spindulys. Tuomet $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2 + 4(\frac{a}{2})^2 = 3a^2$. Iš čia seka, kad nagrinėjamoji kvadratų suma yra vienoda visiems apskritimo taškams M.

Kaip žinome, lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus gretimų kraštinių sandaugai, padaugintai iš kampo tarp jų sinuso: $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\angle A = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin\angle A$. Kadangi $\angle A \in (0^0, 180^0)$, tai $\sin\angle A > 0$, todėl $\sin\angle A = \sqrt{1 - (\cos\angle A)^2} = \sqrt{1 - (\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|})^2} = \frac{\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{AD}^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})^2}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}$. Įrašę šią sinuso reikšmę, gauname tokią lygiagretainio $ABCD$ ploto formulę $S_{ABCD} = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AD}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})^2}$. Kadangi trikampio ABC plotas lygus pusei lygiagretainio $ABDC$ ploto, tai $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$.

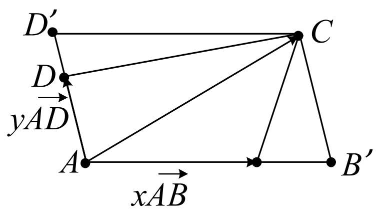
Sakykime, kad keturkampio $ABCD$ įstrižainės AC ir BD susikerta taške M, ojų sudaromas kampas $\angle AMB = \varphi$ (16 pav.). Tuomet $\angle CMD = \varphi$, $\angle BMC = \angle AMD = 180^0 - \varphi$, taigi $\sin\angle AMB = \sin\angle BMC = \sin\angle CMD = \sin\angle DMA = \sin\varphi$. Kadangi keturkampio $ABCD$ plotas lygus trikampių AMB, BMC, CMD ir DMA plotų sumai, tai $S_{ABCD} = S_{\Delta AMB} + S_{\Delta BMC} + S_{\Delta CMD} + S_{\Delta DMA} = \frac{1}{2}MA \cdot MB \sin\angle AMB + \frac{1}{2}MB \cdot MC \sin\angle BMC + \frac{1}{2}MC \cdot MD \sin\angle CMD + \frac{1}{2}MD \cdot MA \sin\angle DMA = \frac{1}{2}\sin\varphi \cdot (MA \cdot MB + MB \cdot MC + MC \cdot MD + MD \cdot MA) = \frac{1}{2}\big(MB(MA + MC) + MD(MC + MA)\big)\sin\varphi = \frac{1}{2}(MA + MC)(MB + MD)\sin\varphi = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\varphi$. Taigi įrodėme, kad keturkampio plotas lygus jo įstrižainių sandaugos pusei, padaugintai iš kampo tarp įstrižainių sinuso. Iš čia gauname tokią keturkampio ploto formulę $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AC}^2 \cdot \overrightarrow{BD}^2 - (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD})^2}$.



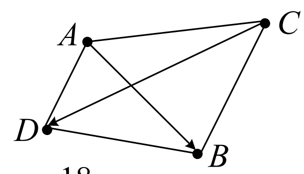
16 pav.

6 pavyzdys. Taškai $A(-2,-3)$, $B(7,7)$, $C(-3,1)$ ir $D(3,0)$ yra keturkampio viršūnės. Rasime jo plotą.

Sprendimas. Visų pirma nustatysime, kuri iš atkarpų AD ar AC yra keturkampio įstrižainė. Tą galima padaryti, atidedant duotuosius taškus koordinačių plokštumoje, bet galima patikrinti ir skaičiuojant. Pastebėkime (17 pav.), kad teisingas toks teiginys: jei atkarpa AC yra keturkampio $ABCD$ įstrižainė, tai išraiškoje $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$, kurios teisingumas išplaukia iš 1 teoremos, skaičiai x ir y yra teigiamieji skaičiai. Kadangi $\overrightarrow{AB} = \big(7-(-2)\big)\vec{\imath} + \big(7-(-3)\big)\vec{\jmath} = 9\vec{\imath} + 10\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{AC} = \big(-3-(-2)\big)\vec{\imath} + \big(1-(-3)\big)\vec{\jmath} = -\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$, o $\overrightarrow{AD} = \big(3-(-2)\big)\vec{\imath} + \big(0-(-3)\big)\vec{\jmath} = 5\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, tai $-\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} = x(9\vec{\imath} + 10\vec{\jmath}) + y(5\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})$. Kadangi vektoriai $\vec{\imath}$ ir $\vec{\jmath}$ yra nekolinearieji, tai šioje išraiškoje koeficientai prie šių vektorių turi sutapti. Iš čia seka, kad $\begin{cases} 9x + 5y = -1, \\ 10x + 3y = 4. \end{cases}$ Šios sistemos sprendinys $x = 1$, $y = -2$, todėl $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}$. Kadangi šioje išraiškoje vienas iš koeficientų yra neigiamas, tai atkarpa AC nėra įstrižainė. Ji yra keturkampio kraštinė, o kadangi iš gautos lygybės išplaukia, kad $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD}$, tai atkarpa AB yra keturkampio įstrižainė (18 pav.). Tuomet keturkampio plotas $S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{CD}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD})^2}$. Kadangi $\overrightarrow{CD} = 6\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, tai $\overrightarrow{AB}^2 = 9^2 + 10^2 = 181$, $\overrightarrow{CD}^2 = 6^2 + (-1)^2 = 37$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 9 \cdot 6 + 10 \cdot (-1) = 44$, tai ieškomasis plotas $S = \frac{1}{2}\sqrt{181 \cdot 37 - 44^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4761} = \frac{69}{2}$.



17 pav.



18 pav.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Taškas M yra trikampio ABC kraštinės AB vidurio taškas, O – trikampio pusiaukraštinių sankirtos taškas. Vektorius $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{MO}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$.
2. Taškas M yra lygiagretainio $ABCD$ kraštinės AD vidurys, o taškas N yra kraštinėje CD ir $CN : ND = 1 : 3$. Vektorius $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{CM}$ ir $\overrightarrow{BN}$.
3. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse BC ir CD yra taškai K ir L, be to, $BK : KC = 2 : 3$, $CL : LD = 5 : 3$. Tiesės DK ir BL kertasi taške M. Raskite kokiu santykiu taškas M dalija atkarpas DK ir BL.
4. Taškai P ir Q yra atitinkamai atkarpų AB ir CD vidurio taškai. Įrodykite, kad atkarpų AC, BD ir PQ vidurio taškai yra vienoje tiesėje.
5. Per lygiagretainio $ABCD$ viršūnę C nubrėžta tiesė d, kertanti tieses AB ir AD atitinkamai taškuose M ir N taip, kad $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC} = l\overrightarrow{AN}$. Raskite sumą $k + l$.
6. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 4$, $AC = 5$, kampas A lygus 45^0. Raskite trikampio pusiaukraštinės AM ir pusiaukampinės AD ilgius.
7. Stačiojo trikampio ABC statinių ilgiai $CA = 6$, $CB = 8$. Raskite kampo tarp jo pusiaukampinių CM ir BN kosinusą.
8. Taškas O yra apskritimo centras, taškai A, B ir C yra tokie apskritimo taškai, kad $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Raskite kampo AOB didumą.
9. Duotos trikampio viršūnių koordinatės $A(3, 0)$, $B(2, 7)$, $C(5, 3)$. Raskite trikampio plotą ir aukštinės AH ilgį.
10. Taškai $(-6, -1)$, $(-4, -4)$, $(-1, 4)$, $(-3, -3)$ yra keturkampio viršūnės. Raskite jo plotą.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2024 m. kovo 20 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA