L I E T U V O S   J A U N Ų J Ų   M A T E M A T I K Ų   M O K Y K L A

IV. TIESINĖS LYGTYS IR DETERMINANTAI

(2023–2025)

Teorinę medžiagą parengė bei ketvirtąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis

1. Tiesinė lygtis. Tiesine lygtimi su n $(n \in \mathrm{N})$ nežinomųjų vadinama lygtis

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b,$$

kurioje $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ir b yra žinomi dydžiai (realieji skaičiai), o $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ – nežinomi dydžiai (realieji skaičiai).

Skaičiai $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ vadinami *koeficientais*, $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ – *nežinomaisiais*, o skaičius b vadinamas *laisvuoju nariu*.

Nežinomųjų reikšmių, tarkim, $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, ..., \overline{x}_n$ rinkinys $(\overline{x}_1; \overline{x}_2; \overline{x}_3; ...; \overline{x}_n)$ vadinamas tiesinės *lygties sprendiniu*, jeigu galioja lygybė

$$a_1 \cdot \overline{x}_1 + a_2 \cdot \overline{x}_2 + a_3 \cdot \overline{x}_3 + ... + a_n \cdot \overline{x}_n = b.$$

Jeigu nežinomųjų skaičius n yra nedidelis, tiesinės lygties nežinomieji ir jų koeficientai paprastai užrašomi skirtingomis raidėmis. Pavyzdžiui, tiesinė lygtis su vienu nežinuoju užrašoma pavidalu $ax = b$, tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais – pavidalu $ax + by = c$, o su trimis nežinomaisiais – pavidalu $ax + by + cz = d$ ir pan.

2. Tiesinės lygties sprendinių aibė. Tiesinės lygties

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

sprendinių $(\overline{x}_1; \overline{x}_2; \overline{x}_3; ...; \overline{x}_n)$ visuma vadinama *sprendinių aibe*. Jai pažymėti kartais vartosime raidę X.

Tuo atveju, kai tiesinė lygtis neturi nė vieno sprendinio, pavyzdžiui, tiesinė lygtis

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + ... + 0 \cdot x_n = 1,$$

vartosime *tuščiosios aibės* simbolį Ø ir rašysime: $X = \varnothing$.

Pati paprasčiausia yra tiesinė lygtis su vienu nežinomuoju $ax = b$.

Jei $a \neq 0$, ji turi tik vieną sprendinį – realųjį skaičių $\dfrac{b}{a}$.

Jei $a = 0$, yra du atvejai:

1) $b = 0$ ir 2) $b \neq 0$.

Pirmu atveju bet kuris realusis skaičius r yra tiesinės lygties $ax = b$ sprendinys (nes $0 \cdot r = 0$), o antru atveju tiesinė lygtis $ax = b$ neturi nė vieno sprendinio (rašytume $X = \varnothing$).

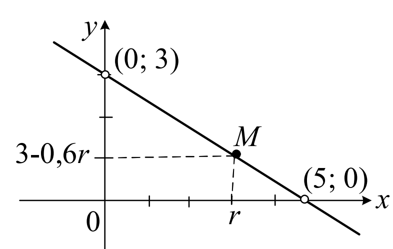
Glaustai prisiminkime ir gerai pažįstamą tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais $ax + by = c$.

Jei $a \neq 0$, tai bet kurį sprendinį galima užrašyti pavidalu $\left(\dfrac{c - b \cdot r}{a}; r\right)$, $r \in \mathrm{R}$, o jei $b \neq 0$, tai pavidalu $\left(r; \dfrac{c - a \cdot r}{b}\right)$, $r \in \mathrm{R}$.

Taip pat gerai žinome, kad ir vienu, ir kitu atveju gautume, jog tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais sprendinių aibės X geometrinis vaizdas (grafikas) yra kuri nors plokštumos tiesė.

Štai, pavyzdžiui, tiesinę lygtį $3x + 5y = 15$ užrašę pavidalu $y = 3 - 0,6x$ lengvai įsitikintume, kad kiekvienas jos sprendinys $(r; 3 - 0,6r)$, $r \in \mathrm{R}$, yra tiesės, einančios per taškus (0; 3) ir (5; 0), taškas M, kurio koordinatės $(r; 3 - 0,6r)$.

Tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ tenkina kiekviena realiųjų skaičių r_1 ir r_2 pora $(r_1; r_2)$, o lygtis $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$, $c \neq 0$, srendinių neturi.



1 pav.

3. Veiksmai su tiesinėmis lygtimis. Tiesinės lygties

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

ir skaičiaus λ *sandauga* yra tiesinė lygtis

$$(\lambda a_1)x_1 + (\lambda a_2)x_2 + (\lambda a_3)x_3 + \ldots + (\lambda a_n)x_n = \lambda b. \qquad (2)$$

Kad būtų trumpiau, (1) lygtį pažymėkime simboliu L. Tada (2) lygtį žymėsime simboliu λL. Štai, pavyzdžiui, tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais

$$L\colon\ 7x + 11y = 77$$

padauginę iš 3 gausime lygtį

$$3L\colon\ 21x + 33y = 231.$$

Dviejų tiesinių lygčių su n nežinomųjų

$$L_1\colon\quad a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 + \ldots + a_n'x_n = b'$$

ir

$$L_2\colon\quad a_1''x_1 + a_2''x_2 + a_3''x_3 + \ldots + a_n''x_n = b''$$

suma (žym. $L_1 + L_2$) yra tiesinė lygtis su n nežinomųjų

$$(a_1' + a_1'')x_1 + (a_2' + a_2'')x_2 + (a_3' + a_3'')x_3 + \ldots + (a_n' + a_n'')x_n = b' + b''.$$

Pavyzdžiui, tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais

$$2x + 3y + z = 6 \ \text{ ir } \ 4x - 2y + 3z = 4$$

suma yra tiesinė lygtis su trimis nežinomaisiais $6x + y + 4z = 10$.

Tegu L_1 ir L_2 yra tiesinės lygtys su n, $n \in \mathrm{N}$, nežinomųjų, o λ_1 ir λ_2 – realieji skaičiai. Tada tiesinių lygčių $\lambda_1 L_1$ ir $\lambda_2 L_2$ suma $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$ vadinama lygčių L_1 ir L_2 *tiesiniu dariniu*, o skaičiai λ_1 ir λ_2 – tiesinio darinio *koeficientais*.

Sudarykime kelių tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais

$$L_1\colon\quad 2x - y + 3z = 4$$

ir

$$L_2\colon\quad 3x + 2y - 4z = 1$$

tiesinius darinius, pavyzdžiui, $3L_1 + 2L_2$, $2L_1 + L_2$ ir $4L_1 + 3L_2$:

1) Padauginę L_1 iš 3 gausime lygtį

$$3L_1\colon\quad 6x - 3y + 9z = 12,$$

o L_2 padauginę iš 2 gausime lygtį

$$2L_2\colon\quad 6x + 4y - 8z = 2.$$

Skaičiuodami sumą $3L_1 + 2L_2$ gausime:

$$(6x - 3y + 9z) + (6x + 4y - 8z) = 12 + 2,$$
$$(6+6)x + (-3+4)y + (9-8)z = 14,$$
$$12x + y + z = 14.$$

Taigi tiesinis darinys $3L_1 + 2L_2$ yra tiesinė lygtis su trimis nežinomaisiais

$$12x + y + z = 14.$$

2) Panašiai skaičiuodami gautume, kad tiesinis darinys $2L_1 + L_2$ yra tiesinė lygtis su trimis nežinomaisiais $7x + 0 \cdot y + 2z = 9$, kurią galima suvokti ir kaip tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais $7x + 2z = 9$.

3) Tiesinis darinys $4L_1 + 3L_2$ yra $17x + 2y + 0 \cdot z = 19$. Šios lygties sprendinių aibė priklauso tik nuo x ir y, nes z gali būti bet kuris realusis skaičius. Taigi ir ją galima suvokti kaip tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais $17x + 2y = 19$.

4. Tiesinių lygčių sistemos sprendimas eliminuojant nežinomuosius. Trumpam sugrįžkime prie to, ką jau gerai mokame – išspręskime, pavyzdžiui, tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} 2x+7y=14, \\ 5x+3y=15. \end{cases} \tag{3}$$

Iš pradžių pirmą lygtį padauginkime iš (–5), antrą lygtį padauginkime iš 2, o tada pirmą lygtį pridėkime prie antros lygties. Taip gausime naują lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x+7y=14, \\ 0\cdot x-29y=-40, \end{cases} \tag{4}$$

kurios sprendinį visai nesunku rasti:

$$0\cdot x-29y=-40 \Rightarrow 29y=-40 \Rightarrow y=\frac{40}{29};$$

$$2x+7\cdot\frac{40}{29}=14 \Rightarrow 2x=14-\frac{280}{29} \Rightarrow x=7-\frac{140}{29}=\frac{7(29-20)}{29}=\frac{63}{29}.$$

Vadinasi, (4) lygčių sistemos sprendinys yra $\left(\frac{63}{29};\frac{40}{29}\right)$. Kartu jis yra ir (3) lygčių sistemos sprendinys (galima įsitikinti tiesiogiai patikrinus).

Jei pažymėtume (kad ir mintyse) (3) sistemos pirmą lygtį simboliu L_1, o antrą – simboliu L_2, tai visai lengvai suprastume, kad (4) sistemos antra lygtis $0\cdot x-29y=-40$ yra lygčių

$$L_1:\quad 2x+7y=14 \quad \text{ir} \quad L_2:\quad 5x+3y=15$$

tiesinis darinys $(-5)L_1+2L_2$.

Taip pat aišku, kad (4) sistema yra gauta iš (3) sistemos, jos antrą lygtį L_2 pakeitus tiesiniu dariniu $(-5)L_1+2L_2$.

Svarbu suprasti ir tai, kad tiesinio darinio koeficientus tikslinga pasirinkti taip, kad gautos lygties kurio nors nežinomojo koeficientas būtų lygus nuliui – taip eliminuojamas tas nežinomasis.

Taikydami nežinomųjų eliminavimo metodą išspręskime porą tiesinių lygčių su didesniu nežinomųjų skaičiumi sistemų.

1 pavyzdys. Išspręskime tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x+2y-2z=4, \\ 3x-y+6z=4, \\ 2x+y-4z=2, \\ x+y+2z=4. \end{cases} \tag{5}$$

Sprendimas. Pasirinkime, pavyzdžiui, ketvirtą lygtį (mintyse pažym. L_4) ir pabandykime eliminuoti nežinomąjį y iš pirmos, antros ir trečios lygčių (taigi iš L_1, L_2 ir L_3). Tai galima padaryti kad ir taip:

1) Ketvirtą lygtį L_4: $x_1+y+2z=4$ padauginus (mintyse ar juodraštyje) iš –2 ir pridėjus prie pirmos lygties L_1: $x+2y-2z=4$. Kitaip sakant, pirmą lygtį pakeitus tiesiniu dariniu $L_1+(-2)L_4$, taiga lygtimi $-x+0\cdot y-6z=-4$.

2) Antrą lygtį L_2: $3x-y+6z=4$ pakeitus tiesiniu dariniu L_2+L_4.

3) Trečią lygtį L_3: $2x+y-4z=2$ pakeitus tiesiniu dariniu $L_3+(-1)L_4$.

Taip gausime naują (bet ekvivalenčią!) tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} -x+0\cdot y-6z=-4, \\ 4x+0\cdot y+8z=8, \\ x+0\cdot y-6z=-2, \\ x+y+2z=4. \end{cases} \tag{6}$$

Praleidę nuliui lygius dėmenis turėsime tokią sistemą:

$$\begin{cases} -x \qquad -6z = -4, \\ 4x \qquad +8z = 8, \\ \quad x \qquad -6z = -2, \\ \quad x + y + 2z = 4. \end{cases}$$

Dabar pasirinkime pirmą lygtį (čia jos žymuo bus vėl L_1) ir eliminuokime nežinomąjį x iš antros, trečios ir ketvirtos lygčių, pakeisdami jas tiesiniais dariniais:

1) lygtį L_2: $4x + 0 \cdot y + 8z = 8$ – tiesiniu dariniu $L_2 + 4L_1$;

2) lygtį L_3: $x + 0 \cdot y - 6z = -2$ – tiesiniu dariniu $L_3 + L_1$;

3) lygtį L_4: $x + y + 2z = 4$ – tiesiniu dariniu $L_4 + L_1$.

Praleidę nuliui lygius dėmenis, gausime dar vieną (vėl ekvivalenčią!) keturių tiesnių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} -x \quad -6z = -4, \\ \qquad -16z = -8, \\ \qquad -12z = -6, \\ \qquad y - 4z = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Ši lygčių sistema turi vienintelį sprendinį – realiųjų skaičių trejetą $\left(1;\ 2;\ \frac{1}{2}\right)$.

Lengva įsitikinti, kad jis tenkina ir (6), ir (5) lygčių sistemą. Vadinasi, (5) lygčių sistema turi vienintelį sprendinį $\left(1;\ 2;\ \frac{1}{2}\right)$.

Ats.: $\left(1;\ 2;\ \frac{1}{2}\right)$.

2 pavyzdys. Išspręskime tiesinių lygčių su keturiais nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 7. \end{cases} \tag{8}$$

Sprendimas. Iš pradžių eliminuokime nežinomąjį x_1 iš pirmos lygties ir iš trečios lygties, tuo tikslu pirmą lygtį

$$L_1:\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 6$$

pakeisdami tiesiniu dariniu $L_1 + (-2)L_2$, o trečią lygtį

$$L_3:\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 7$$

pakeisdami tiesiniu dariniu $L_3 + (-4)L_2$.

Tiesinis darinys $L_1 + (-2)L_2$ yra tiesinė lygtis $0 \cdot x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -4$, o tiesinis darinys $L_3 + (-4)L_2$ yra tiesinė lygtis $0 \cdot x_1 + 6x_2 - 9x_3 - 7x_4 = -13$, todėl (8) lygčių sistema ekvivalenti šiai tiesinių lygčių su keturiais nežinomaisiais sistemai:

$$\begin{cases} \quad 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ \quad 6x_2 - 9x_3 - 7x_4 = -13. \end{cases} \tag{9}$$

Dabar eliminuokime x_2 iš antros ir iš trečios lygties, pakeisdami lygtį

$$L_2:\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$$

tiesiniu $3L_2 + L_1$, taigi tiesine lygtimi $3x_1 + 0 \cdot x_2 + 5x_3 + 0 \cdot x_4 = 11$, o lygtį

$$L_3:\ 0 \cdot x_1 + 6x_2 - 9x_3 - 7x_4 = -13$$

pakeisdami tiesiniu dariniu $L_3 + (-2)L_1$, taigi tiesine lygtimi $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 7x_3 - x_4 = -5$.

Gausime ekvivalenčią tiesinių lygčių su keturiais nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -4, \\ 3x_1 \quad + 5x_3 \qquad = 11, \\ \qquad - 7x_3 - x_4 = -5. \end{cases} \tag{10}$$

Trečią lygtį padauginkime iš –3 ir gautą lygtį pridėkime prie pirmos lygties. Kitaip sakant, tiesinę lygtį $L_1:\ 0\cdot x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -4$ pakeiskime tiesiniu dariniu $L_1 + (-3)L_3$, t. y. tiesine lygtimi $0\cdot x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 0\cdot x_4 = 11.$ Šiuo veiksmu nežinomasis x_4 eliminuojamas iš (10) sistemos pirmos lygties.

Belieka išspręsti šią tiesinių lygčių su keturiais nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} 3x_2 + 20x_3 \qquad = 11, \\ 3x_1 \qquad + 5x_3 \qquad = 11, \\ \qquad - 7x_3 - x_4 = -5. \end{cases} \tag{11}$$

Iš antros lygties gauname, kad $x_1 = \frac{1}{3}(11 - 5x_3),$ iš pirmos lygties gauname, kad $x_2 = \frac{1}{3}(11 - 20x_3),$ o iš ketvirtos lygties – $x_4 = 5 - 7x_3.$

Matome, kad jei x_3 yra bet kuris realusis skaičius r, tai realiųjų skaičių rinkinys $\left(\frac{1}{3}(11-5r); \frac{1}{3}(11-20r); r; 5-7r\right)$ yra (11) sistemos sprendinys. Dėl (8), (9), (10) ir (11) sistemų ekvivalentumo darome išvadą, kad (8) tiesinių lygčių su keturiais nežinomaisiais sistema turi be galo daug sprendinių ir jie yra užrašomi pavidalu $\left(\frac{1}{3}(11-5r); \frac{1}{3}(11-20r); r; 5-7r\right),\ r \in \mathrm{R}.$

Ats.: $\left(\frac{1}{3}(11-5r); \frac{1}{3}(11-20r); r; 5-7r\right),\ r \in \mathrm{R}.$

5. Tiesinių lygčių su n, $n \in \mathrm{N}$, nežinomųjų kvadratinė sistema. Susitarkime bet kurią tiesinių lygčių sistemą vadinti *kvadratine tiesinių lygčių sistema*, jeigu jos lygčių skaičius sutampa su nežinomųjų skaičiumi.

Bendrasis kvadratinės tiesinių lygčių sistemos su n, $n \in \mathrm{N}$, nežinomųjų pavidalas yra

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n. \end{cases} \tag{12}$$

6. Kvadratinės tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos sprendinio formulė. Bet kurią dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą galima užrašyti pavidalu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2; \end{cases} \tag{13}$$

čia a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, c_1 ir c_2 gali būti bet kurie realieji skaičiai. Beje, simboliai su dvigubais indeksais skaitomi taip: „*a* vienas vienas – simbolis a_{11}, „*a* du vienas“ – simbolis a_{21} ir t. t.

Ieškodami (13) sistemos sprendinio, taikykime nežinomųjų eliminavimo metodą (žr. 1 ir 2 pavyzdžius). Kad būtų mažiau papildomų rūpesčių sudarant tiesinius darinius, apsiribokime atveju, kai tarp koeficientų a_{11}, a_{12}, a_{21} ir a_{22} nėra nė vieno nuliui lygaus skaičiaus. Kita vertus, jei tarp (13) sistemos lygčių koeficientų būtų bent vienas lygus nuliui, jos sprendinių aibę būtų galima rasti iš karto.

Iš pradžių eliminuokime nežinomąjį x_1 iš antros lygties, o paskui (esant galimybei) eliminuokime nežinomąjį x_2 iš pirmos lygties. Tuo tikslu antrą lygtį pakeiskime tiesiniu dariniu $a_{11}L_2 + (-a_{21})L_1$, taigi tiesine lygtimi

$$(a_{11}a_{21} - a_{21}a_{11})x_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}c_2 - c_1a_{21}.$$

Gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ 0 \cdot x_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}c_2 - c_1a_{21}. \end{cases} \tag{14}$$

Pažymėjus

$$d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ ir } d_2 = a_{11}c_2 - c_1a_{21},$$

ji įgis pavidalą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ 0 \cdot x_1 + \quad dx_2 = d_2. \end{cases} \tag{15}$$

Esant sąlygai $d \neq 0,$ galima eliminuoti nežinomąjį x_2 iš pirmos lygties pakeičiant ją tiesiniu dariniu $dL_1 + (-a_{12})L_2$ – tiesine lygtimi

$$da_{11}x_1 + 0 \cdot x_2 = dc_1 - a_{12}d_2.$$

Gautume ekvivalenčią tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} da_{11}x_1 + 0 \cdot x_2 = dc_1 - a_{12}d_2, \\ 0 \cdot x_1 + \ dx_2 = d_2. \end{cases} \tag{16}$$

Kadangi

$$dc_1 - a_{12}d_2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})c_1 - a_{12}(a_{11}c_2 - c_1a_{21}) = a_{11}a_{22}c_1 - a_{12}a_{21}c_1 - a_{12}a_{11}c_2 + a_{12} \cdot c_1a_{21} =$$
$$= a_{11}a_{22}c_1 - a_{12}a_{21}c_2 = a_{11}(c_1a_{22} - a_{12}c_2),$$

tai (16) sistemos pirma lygtis tampa lygtimi

$$da_{11}x_1 + 0 \cdot x_2 = a_{11}(c_1a_{22} - a_{12}c_2).$$

Padalijus iš a_{11} ir pažymėjus

$$d_1 = c_1a_{22} - a_{12}c_2,$$

ji įgyja pavidalą $d_1x_1 + 0 \cdot x_2 = d_1.$

Taip vietoj (15) gauname ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} dx_1 + 0 \cdot x_2 = d_1, \\ 0 \cdot x_1 + dx_2 = d_2, \end{cases} \tag{17}$$

iš kurios išplaukia, jog skaičių

$$x_1 = \frac{d_1}{d} \quad \text{ir} \quad x_2 = \frac{d_2}{d} \tag{18}$$

pora $\left(\frac{d_1}{d}; \frac{d_2}{d}\right)$ yra vienintelis (13) sistemos sprendinys.

Šiose sprendinio komponenčių x_1 ir x_2 formulėse

$$d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{19}$$

$$d_1 = c_1a_{22} - a_{12}c_2, \tag{20}$$

$$d_2 = a_{11}c_2 - c_1a_{21}. \tag{21}$$

Tęsdami (13) lygčių sistemos sprendimo analizę, sugrįžkime prie (15) sistemos ir aptarkime atvejį, kai $d = 0.$

Šiuo atveju (15) sistema bus pavidalo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = d_2. \end{cases}$$

Aišku, kad ji neturės nė vieno sprendinio, jei $d_2 \neq 0.$ O atveju $d_2 = 0$ ji turės be galo daug sprendinių, kurių aibė sutaps su tiesinės lygties $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1$ sprendinių aibe $\left(r; \frac{1}{a_{12}}\left(c_1 - a_{11} \cdot r\right) \right)$, $r \in \mathrm{R}$;

čia turime mintyje pradinę prielaidą, jog $a_{11} \neq 0$ ir $a_{12} \neq 0$.

Apibendrinant atliktą (13) sistemos sprendimą, galima padaryti tokias išvadas:

1) kvadratinė tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais (13) sistema turi vienintelį sprendinį $\left(\frac{d_1}{d}; \frac{d_2}{d} \right)$, jei $d \neq 0$;

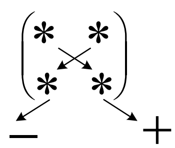
2) (13) sistema turi be galo daug sprendinių, jei $d = 0$ ir $d_1 = d_2 = 0$;

3) (13) sistema neturi nė vieno sprendinio, jei $d = 0$ ir bent vienas iš skaičių d_1 ir d_2 nelygus nuliui.

Skaičiai d, d_1 ir d_2 čia vadinami (13) lygčių sistemos (antros eilės) *determinantais*. Jų skaičiavimo (19)–(21) formulėms lengviau prisiminti, pakaktų sudaryti tris 2×2 matmenų skaičių lenteles (*matricas*)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{pmatrix}$$

ir pagal jas apskaičiuoti d, d_1 ir d_2 reikšmes taikant schemą



Skaičiuojant praktiškai, paprastai rašoma taip:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \tag{19a}$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix} = c_1 a_{22} - a_{12} c_2; \tag{20a}$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix} = a_{11} c_2 - c_1 a_{21}. \tag{21a}$$

3 pavyzdys. Išspręskime kvadratinę tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} 5x + 7y = 1, \\ 4x - 13y = 38. \end{cases}$$

Sprendimas. Sudarykime tris matricas:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -13 \end{pmatrix}, \quad A_x = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 38 & -13 \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 38 \end{pmatrix}$$

ir apskaičiuokime jų determinantus (žymėdami atitinkamai d, d_x ir d_y). Gausime:

$$d = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -13 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-13) - 7 \cdot 4 = -65 - 28 = -93,$$

$$d_x = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 38 & -13 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-13) - 7 \cdot 38 = -13 - 266 = -279,$$

$$d_y = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 38 \end{vmatrix} = 5 \cdot 38 - 1 \cdot 4 = 190 - 4 = 186.$$

Vadinasi, $x = \frac{d_x}{d} = \frac{-279}{-93} = 3$, $y = \frac{d_y}{d} = \frac{186}{-93} = -2$, o pora (3; –2) yra lygčių sistemos sprendinys.

Ats.: (3; –2).

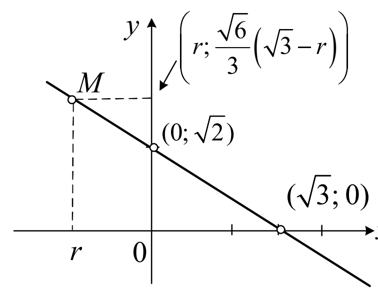
4 pavyzdys. Išspręskime kvadratinę tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cdot x+\sqrt{3}\cdot y=\sqrt{6}, \\ 2\sqrt{3}\cdot x+3\sqrt{2}\cdot y=6. \end{cases} \tag{22}$$

Sprendimas. Apskaičiuokime tris determinantus:

$$d=\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 3\sqrt{2} \end{vmatrix},\quad d_x=\begin{vmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{3} \\ 6 & 3\sqrt{2} \end{vmatrix}\quad \text{ir}\quad d_y=\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} & 6 \end{vmatrix}.$$

Gausime, kad $d=0$, $d_x=0$ ir $d_y=0$. Vadinasi, (22) sistema turi be galo daug sprendinių. O kokia jų aibė? Imkim ir padauginkim pirmą lygtį iš $\sqrt{6}$ – gausim antrą lygtį. Vadinasi, ir viena, ir kita lygtis apibrėžia tą pačią tiesę (žr. 2 pav.), einančią per taškus $(\sqrt{3};0)$ ir $(0;\sqrt{2})$. Todėl (22) sistemos sprendinių aibę sudaro realiųjų skaičių poros $\left(r;\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\sqrt{3}-r\right)\right)$, $r\in \mathrm{R}$.



2 pav.

Ats.: $\left(r;\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\sqrt{3}-r\right)\right)$, $r\in \mathrm{R}$.

7. O kas toliau? Toliau – kvadratinė tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistema ir jos bendrojo sprendinio formulės paieška. Tada – kvadratinė tiesinių lygčių su dar didesniu nežinomųjų skaičiumi. Ir vis ilgesni, painesni skaičiavimai, kuriuose visai nesunku pasiklysti.

Toliau – neišvengiamai artima pažintis su matricomis, jų sudėtimi, daugyba, įvairiais matricų tiesiniais dariniais, su kvadratinės matricos determinanto savybėmis, kol atsiras gebėjimas rasti kvadratinės matricos A atvirkštinę matricą A^{-1}, kol ateis supratimas, kad bet kurią kvadratinę tiesinių lygčių sistemą įmanoma užrašyti pavidalu $Ax=c$, o jos sprendinį – formule $x=A^{-1}c$.

Vis dėlto ne čia padėkime paskutinį tašką. Pažintį su determinantų taikymu pratęskime mokydamiesi spręsti kvadratinę tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=c_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=c_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=c_3. \end{cases} \tag{23}$$

Jos bendrąjį sprendinį $(x_1;x_2;x_3)$ galima užrašyti keturių kvadratinių matricų

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad A_1=\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{pmatrix}\quad \text{ir}\quad A_3=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{pmatrix}.$$

determinantais atitinkamai d, d_1, d_2 ir d_3, jei $d\neq 0$. Formulės tokios:

$$x_1=\frac{d_1}{d},\quad x_2=\frac{d_2}{d},\quad x_3=\frac{d_3}{d}. \tag{24}$$

Bet determinantų skaičiavimas šiuo atveju gerokai sunkesnis:

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}= \tag{25}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}),$$

$$d_1=\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=c_1\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} c_2 & a_{23} \\ c_3 & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} c_2 & a_{22} \\ c_3 & a_{13} \end{vmatrix}, \tag{26}$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & a_{23} \\ c_3 & a_{33} \end{vmatrix} - c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & c_2 \\ a_{31} & c_3 \end{vmatrix}, \qquad (27)$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{23} & c_3 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & c_2 \\ a_{32} & c_3 \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & c_2 \\ a_{31} & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (28)$$

Atveju $d = 0$ gautume, kad (23) sistema arba turi be galo daug sprendinių, arba neturi nė vieno sprendinio.

Sprendžiant konkrečius uždavinius tuo galima įsitikinti išsprendus lygčių sistemą eliminuojant nežinomuosius.

Išspręskime kelias tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemas ir tuo baikime pažintį su determinantų taikymu sprendžiant kvadratines tiesinių lygčių sistemas.

5 pavyzdys. Išspręskime kvadratinę tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = -2, \\ -3x + y - 5z = 8, \\ x + 4y - 8z = 3. \end{cases} \qquad (29)$$

Sprendimas. Iš pradžių apskaičiuokime sistemos lygčių koeficientų matricos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

determinantą *d*. Pagal (25) formulę,

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(1 \cdot (-8) - (-5) \cdot 4) - 3((-3) \cdot (-8) - (-5) \cdot 1) + ((-3) \cdot 4 - 1 \cdot 1) =$$
$$= 2 \cdot 12 - 3 \cdot 29 + (-13) = 24 - 87 - 13 = -76.$$

Kadangi $d \neq 0$, darome išvadą, jog (29) lygčių sistema turi vienintelį sprendinį $(x;\, y;\, z)$, kurio komponentės apskaičiuojamos pagal formules

$$x = \frac{d_1}{d}, \quad y = \frac{d_2}{d}, \quad z = \frac{d_3}{d};$$

čia

$$d_1 = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= -2(1 \cdot (-8) - (-5) \cdot 4) - 3(8 \cdot (-8) - (-5) \cdot 3) + (8 \cdot 4 - 1 \cdot 3) =$$
$$= -2 \cdot 12 - 3 \cdot (-49) + 29 = -24 + 147 + 29 = 152,$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 8 & -5 \\ 1 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(8 \cdot (-8) - (-5) \cdot 3) + 2((-3) \cdot (-8) - (-5) \cdot 1) + ((-3) \cdot 3 - 8 \cdot 1) =$$
$$= 2 \cdot (-49) + 2 \cdot 29 - 17 = -98 + 58 - 17 = -57,$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(1\cdot 3 - 8\cdot 4) - 3((-3)\cdot 3 - 8\cdot 1) - 2((-3)\cdot 4 - 1\cdot 1) =$$

$$= 2\cdot(-29) - 3\cdot(-17) - 2\cdot(-13) = -58 + 51 + 26 = 19.$$

Vadinasi, $x = \frac{152}{-76} = -2, \quad y = \frac{-57}{-76} = \frac{3}{4}, \quad z = \frac{19}{-76} = -\frac{1}{4}.$

Ats.: $\left(-2; \frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\right).$

6 pavyzdys. Išspręskime kvadratinę tiesinių lygčių sistemą su trimis nežinomaisiais

$$\begin{cases} x + 3y - 7z = 11, \\ 2x - y + 2z = -1, \\ 3x + 2y - 5z = 7. \end{cases} \tag{30}$$

Sprendimas. Šios sistemos lygčių koeficientų matrica yra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Skaičiuodami jos determinantą (pagal (25) formulę), gauname, kad

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + (-7)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 3\cdot(-16) - 7\cdot 7 = 0\,.$$

Kadangi $d = 0$, nėra galimybės taikyti (24) formulių, todėl (30) lygčių sistemos sprendimą tęskime taikydami nežinomųjų eliminavimo metodą. Iš pradžių eliminuokime x iš antros ir iš trečios lygties, tuo tikslu antrą lygtį pakeisdami tiesiniu dariniu $L_2 + (-2)L_1$, o trečią lygtį – tiesiniu dariniu $L_3 + (-3)L_1$. Gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} x + 3y - 7z = 11, \\ 0\cdot x - 7y + 16z = -23, \\ 0\cdot x - 7y + 16z = -26. \end{cases}$$

Eliminuodami y trečią lygtį pakeiskime tiesiniu dariniu $L_3 + (-1)L_2$. Gausime ekvivalenčią tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + 3y - 7z = 11, \\ 0\cdot x - 7y + 16z = -23, \\ 0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z = -3. \end{cases} \tag{31}$$

Aišku, kad trečia lygtis neturi nė vieno sprendinio. Vadinasi, (31) sistema, taigi ir (30), sprendinių neturi.

Ats.: Ø.

7 pavyzdys. Išspręskime tiesinių lygčių sistemą su trimis nežinomaisiais

$$\begin{cases} 5x - 7y + 4z = 2, \\ -x + 3y + z = 3, \\ 7x - 13y + 2z = -4. \end{cases} \tag{32}$$

Sprendimas. Iš pradžių apskaičiuokime sistemos lygčių koeficientų matricos $A=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 7 & -13 & 2 \end{pmatrix}$ determinantą d:

$$d=\begin{vmatrix} 5 & -7 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 7 & -13 & 2 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -13 & 2 \end{vmatrix}-(-7)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -13 \end{vmatrix}=5\cdot 19+7\cdot(-9)+4\cdot(-8)=95-63-32=0.$$

Toliau taikykime nežinomųjų eliminavimo metodą. Pirmą (32) sistemos lygtį pakeiskime tiesiniu dariniu L_1+5L_2, o trečią – tiesiniu dariniu L_3+7L_2.

Gausime ekvivalenčią tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} 0\cdot x+8y+9z=17, \\ -x+3y+\ z=3, \\ 0\cdot x+8y+9z=17. \end{cases} \tag{33}$$

Matome, kad trečia lygtis sutampa su pirma lygtimi, todėl (33) sistema, taigi ir (32), yra ekvivalenti dviejų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemai

$$\begin{cases} -x+3y+z=3, \\ \qquad 8y+9z=17. \end{cases} \tag{34}$$

Iš trečios lygties išplaukia, kad

$$y=\frac{1}{8}(17-9z).$$

Tada

$$-x+3\cdot\frac{1}{8}(17-9z)+z=3 \Rightarrow -x+\frac{51}{8}-\frac{19}{8}z=3 \Rightarrow x=\frac{27}{8}-\frac{19}{8}z=\frac{1}{8}(27-19z).$$

Pasirinkę $z=r,\ r\in\mathrm{R}$, gausime trejetą $\left(\frac{1}{8}(27-19r);\frac{1}{8}(17-9r);r\right)$, kuris tenkina ne tik (34), bet ir (32) lygčių sistemą.

Vadinasi, (32) sistema turi be galo daug sprendinių, kuriuos galima užrašyti pavidalu $\left(\frac{1}{8}(27-19r);\frac{1}{8}(17-9r);r\right),\ r\in\mathrm{R}$.

Ats.: $\left(\frac{1}{8}(27-19r);\frac{1}{8}(17-9r);r\right),\ r\in\mathrm{R}.$

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} (\sqrt{2}+\sqrt{3})x+(\sqrt{5}-\sqrt{3})y=1, \\ (\sqrt{6}+2)x+(\sqrt{10}-\sqrt{6})y=2. \end{cases}$$

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \sqrt{5}\cdot x+\ \sqrt{2}\cdot y=6, \\ 5\sqrt{2}\cdot x+2\sqrt{5}\cdot y=6\sqrt{10}. \end{cases}$$

3. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} (\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)x+(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)y=2\sqrt{2}, \\ (2\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)x+(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)y=\sqrt{3}. \end{cases}$$

4. Apskaičiuokite kvadratinės matricos

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5}\\ 1+\sqrt{2} & 1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5}\\ 2+\sqrt{2} & 2+\sqrt{3} & 2+\sqrt{5}\end{pmatrix}\quad \text{determinantą.}$$

5. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases}2x+3y-5z=8,\\ 3x-2y-3z=-3,\\ 2x+5y+8z=27.\end{cases}$$

6. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases}5x-2y+9z=-7,\\ -2x+y-4z=5,\\ 3x-6y-8z=12.\end{cases}$$

7. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases}x+y-z=0,\\ 2x-3y+z=1,\\ 2x+y+2z=7.\end{cases}$$

8. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases}x+2y+z=2,\\ 3x-y+2z=10,\\ 2x-3y+z=9.\end{cases}$$

9. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases}x+y+z=5,\\ 2x+3y+4z=14,\\ x-y+3z=3,\\ x+4y+z=11.\end{cases}$$

10. Eliminuodami nežinomuosius išspręskite lygčių sistemą su keturiais nežinomaisiais

$$\begin{cases}x_1+x_2=4,\\ x_2+x_3=5,\\ 2x_1+x_3+x_4=3,\\ x_1-x_2+2x_4=-4.\end{cases}$$

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2024 m. gegužės 10 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA