

**SEPTINTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO  
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO  
MATEMATIKOS OLIMPIADA**

**Vilnius, 2024 m. kovo 16 d.**

**IX klasė**

1. 2024 skaičių rinkinyje kiekvienas skaičius yra lygus likusių 2023 skaičių sumos kvadratui. Raskite visus tokius 2024 skaičių rinkinius..
2. Trikampio  $ABC$  kraštinių ilgiai  $BC = a, AC = b, AB = c$ , atkarpos  $BK$  ir  $CL$  yra jo pusiaukampinės, taškai  $M$  ir  $N$  yra taško  $A$  ortogonaliosios projekcijos tiesėse  $BK$  ir  $CL$ . Raskite atkarpos  $MN$  ilgį.
3. Į kiekvieną lentelės, kurioje yra 6 eilutės ir 7 stulpeliai, langelį įrašomas skaičius 0 arba 1 taip, kad visose eilutėse užrašytų skaičių sumos būtų skirtingos, o visuose stulpeliuose užrašytų skaičių sumos būtų vienodos. Nurodykite, kokios sumos gali būti gautos stulpeliuose.
4. Raskite sveikųjų skaičių poras  $(x, y)$ , kurios yra lygties
$$x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$$
sprendiniai.

**X klasė**

1. 2024 skaičių rinkinyje kiekvienas skaičius yra lygus likusių 2023 skaičių sumos kvadratui. Raskite visus tokius 2024 skaičių rinkinius.
2. Lygiašonis trikampis  $ABC$ , kurio  $AB = AC = 6$ ,  $BC = 4$ , įbrėžtas į apskritimą, tiesė  $MN$  yra šio apskritimo liestinė taške  $C$ , styga  $BD$  yra lygiagreti su liestine  $MN$ , tiesės  $AC$  ir  $BD$  susikerta taške  $E$ . Raskite atkarpos  $AE$  ilgį.
3. Į kiekvieną lentelės, kurioje yra 6 eilutės ir 7 stulpeliai, langelį įrašomas skaičius 0 arba 1 taip, kad visose eilutėse užrašytų skaičių sumos būtų skirtingos, o visuose stulpeliuose užrašytų skaičių sumos būtų vienodos. Nurodykite, kokios sumos gali gautis stulpeliuose.
4. Su kuriuo natūraliuoju  $n$  natūraliųjų skaičių nuo 1 iki  $n$  sumos paskutiniai keturi skaitmenys yra 2024?

**XI – XII klasės**

1. Teigiamiems realiesiems skaičiams  $a, b, c$  teisinga lygybė  $a + b + c = 1$ . Įrodykite nelygybę
$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2} \geq \frac{1}{2}.$$
2. Iš taško  $A$  nubrėžta apskritimo kirstinė, kertanti jį taškuose  $B$  ir  $C$ , be to  $AB < AC$ ,  $AB : BC = 2 : 3$ . Iš taško  $A$  nubrėžtos apskritimo liestinės liečia jį taškuose  $M$  ir  $N$ . Kokiu santykiu styga  $MN$  dalija atkarpą  $BC$ ?
3. Ant stalo į eilę sustatyta 101 šaškė, 5 iš jų yra baltos, likusios – juodos, o pirmoji ir paskutinė šaškė yra juodos. Du žaidėjai  $A$  ir  $B$  paeiliui ima po vieną bet kurią kraštinę šaškę. Žaidimą pradeda žaidėjas  $A$  ir žaidžiama iki tol, kol ant stalo nelieka baltų šaškių. Laimi tas žaidėjas, pas kurį yra daugiau baltų šaškių. Kuris iš žaidėjų turi laimėtiną strategiją? Nurodykite tą strategiją.
4. Natūraliųjų skaičių seka  $(x_n)$  apibrėžiama lygybėmis  $x_1 = 2$ ,  $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$ , kai  $n > 1$ . Įrodykite, kad kiekvienam  $n \in \mathbb{N}$  skaičiai  $x_n$  ir  $n$  yra tarpusavyje pirminiai.