SEPTINTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO
MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilnius, 2024 m. kovo 16 d.

Sąlygos ir sprendimai

IX klasė

1. 2024 skaičių rinkinyje kiekvienas skaičius yra lygus likusių 2023 skaičių sumos kvadratui. Raskite visus tokius 2024 skaičių rinkinius.

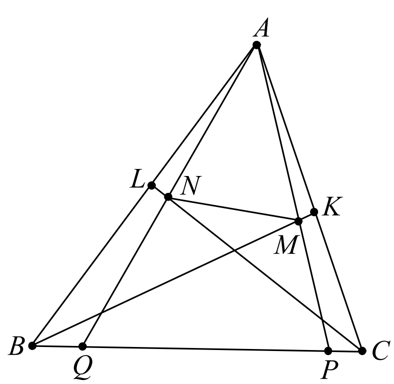
Sprendimas. Sakykime, kad ieškomieji skaičiai $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{2024}$, o $S -$ jų suma. Pagal sąlygą $x_1 = (S - x_1)^2,\ x_2 = (S - x_2)^2, \dots, x_{2024} = (S - x_{2024})^2$. Kadangi $0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{2024},$ tai $(S - x_1)^2 \ge (S - x_2)^2 \ge \cdots \ge (S - x_{2024})^2$. Kita vertus, į nelygybes $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{2024}$ įrašę skaičių $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$ išraiškas $x_1 = (S - x_1)^2,\ x_2 = (S - x_2)^2, \dots, x_{2024} = (S - x_{2024})^2$ turime, kad $(S - x_1)^2 \le (S - x_2)^2 \le \cdots \le (S - x_{2024})^2$. Iš gautų nelygybių seka, kad $(S - x_1)^2 = (S - x_2)^2 = \cdots = (S - x_{2024})^2$. Kadangi visi skaičiai $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$ yra neneigiami, tai $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2024}$. Iš čia $x_1 = (2024x_1 - x_1)^2$, todėl $x_1 = 0$ arba $x_1 = \frac{1}{2023^2}$.

Atsakymas: visi skaičiai lygūs 0, arba visi skaičiai lygūs $\frac{1}{2023^2}$.

2. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $\mathrm{BC} = \mathrm{a}, \mathrm{AC} = \mathrm{b}, \mathrm{AB} = \mathrm{c}$, atkarpos BK ir CL yra jo pusiaukampinės, taškai M ir N yra taško A ortogonaliosios projekcijos tiesėse BK ir CL. Raskite atkarpos MN ilgį.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesės AM ir AN kerta kraštinę BC taškuose P ir Q. Kadangi atkarpa CN yra trikampio ACQ aukštinė ir pusiaukampinė, tai trikampis ACQ yra lygiašonis, $CQ = AC = b$, o $AN = NQ$. Analogiškai trikampis ABP yra lygiašonis, $BP = AB = c$, o $AM = MP$. Iš čia seka, kad atkarpa MN yra trikampio APQ vidurio linija, taigi $MN = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}(BP + CQ - BC) = \frac{c+b-a}{2}$.

Atsakymas: $\frac{b+c-a}{2}$.



3. Į kiekvieną lentelės, kurioje yra 6 eilutės ir 7 stulpeliai, langelį įrašomas skaičius 0 arba 1 taip, kad visose eilutėse užrašytų skaičių sumos būtų skirtingos, o viduose stulpeliuose užrašytų skaičių sumos būtų vienodos. Nurodykite, kokios sumos gali gautis stulpeliuose.

Sprendimas. Kiekvienoje eilutėje įrašytų skaičių suma gali įgyti 8 reikšmes – nuo 0 iki 7. Kadangi visose eilutėse skaičių sumos yra skirtingos, tai iš tų aštuonių sumų kažkurių dviejų nėra. Sakykime, kad nėra sumų, lygių x ir y. Tuomet visų lentelėje esančių skaičių suma $0+1+2+3+4+5+6+7-x-y=28-(x+y)$. Kita vertus, kadangi visuose septyniuose stulpeliuose skaičių sumos yra vienodos, tai visų skaičių suma turi dalytis iš 7. Kadangi 28 dalijasi iš 7, tai iš čia seka, kad $x+y$ dalijasi iš 7. Kadangi x ir y yra sveikieji skaičiai nuo 0 iki 7, todėl turime tik vieną galimybę $x+y=7$. Taigi visų lentelėje esančių skaičių suma lygi 21, todėl kiekviename iš 7 stulpelių suma lygi 3. Kad tikrai tokios sumos gaunamos rodo šis pavyzdys:

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	1

4. Raskite sveikųjų skaičių poras (x, y), kurios yra lygties
$$x^3=y^3+2y^2+1$$
sprendiniai.

Sprendimas. Tarkime, kad pora (x, y) yra lygties sprendinys. Jei $y^2+3y>0$, tai $(y+1)^3=y^3+3y^2+3y+1=y^3+2y^2+(y^2+3y)+1>y^3+2y^2+1=x^3>y^3$, bet tarp skaičių $(y+1)^3$ ir y^3 nėra jokio kito sveikojo skaičiaus kubo. Tuomet turi būti $y^2+3y\leq 0$, t. y. $-3\leq y\leq 0$. Yra keturi sveikieji skaičiai $-3,-2,-1$ ir 0, tenkinantys šią nelygybę. Kai $y=0$, tai $x=1$, kai $y=-1$, $x^3=2$ – nėra sveikojo skaičiaus kubas, kai $y=-2$, $x=1$, o kai $y=-3$, $x=-2$.

Atsakymas: $(1,0),(1,-2)$, $(-2,-3)$.

X klasė

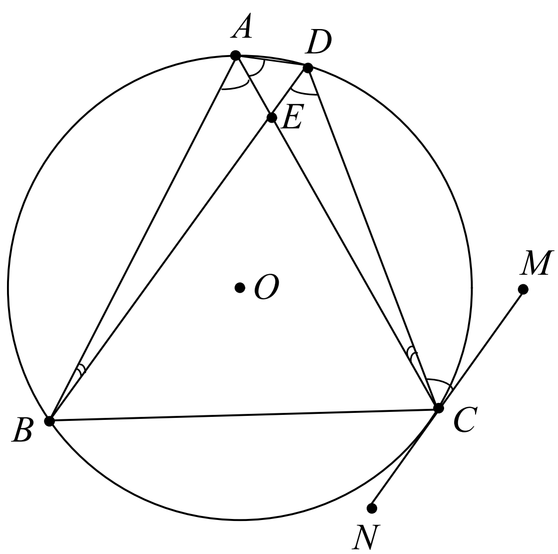
1. 2024 skaičių rinkinyje kiekvienas skaičius yra lygus likusių 2023 skaičių sumos kvadratui. Raskite visus tokius 2024 skaičių rinkinius.

Sprendimas. Žr. IX klasės 1 uždavinio sprendimą.

2. Lygiašonis trikampis ABC, kurio AB = AC = 6, BC = 4, įbrėžtas į apskritimą, tiesė MN yra šio apskritimo liestinė taške C, styga BD yra lygiagreti su liestine MN, tiesės AC ir BD susikerta taške E. Raskite atkarpos AE ilgį.

Sprendimas. Kadangi tiesės MN ir BD yra lygiagrečios, tai pagal kampų tarp liestinių ir stygų teoremą turime $\angle CAD = \angle MCD = \angle BDC = \angle BAC = \angle BAE$. Kadangi $\angle CAD = \angle BAE$, $\angle ABE = \angle ACD$, $AB = AC$, tai trikampiai ABE ir ACD lygūs. Iš čia seka, kad $BE = CD$. Kadangi lankai BC ir CD yra lygūs, tai $\angle BDC = \angle CBD$, todėl $CD = BC = BE = 4$. Pažymėję $AE = x$, iš trikampių AEB ir DEC panašumo gauname lygybę $\frac{AE}{DE} = \frac{AB}{CD}$, iš čia $DE = \frac{AE \cdot CD}{AB} = \frac{4x}{6} = \frac{2x}{3}$. Pagal susikertančių stygų teoremą $AE \cdot EC = BE \cdot ED$, t. y., $x(6-x) = 4 \cdot \frac{2x}{3}$. Iš čia gauname, kad $x = \frac{10}{3}$.

Atsakymas: $\frac{10}{3}$.



3. Į kiekvieną lentelės, kurioje yra 6 eilutės ir 7 stulpeliai, langelį įrašomas skaičius 0 arba 1 taip, kad visose eilutėse užrašytų skaičių sumos būtų skirtingos, o viduose stulpeliuose užrašytų skaičių sumos būtų vienodos. Nurodykite, kokios sumos gali gautis stulpeliuose.

   Sprendimas. Žr. X klasės Nr 3 sprendimą.

4. Su kuriuo natūraliuoju n natūraliųjų skaičių nuo 1 iki n sumos paskutiniai keturi skaitmenys yra 2024?

Sprendimas. Natūraliųjų skaičių nuo 1 iki n suma $1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$. Jei ši suma baigiasi skaičiais 2024, tai $n(n+1)$ turi baigtis 4048. Nesunkiai patikrinama, kad skaičiaus $n(n+1)$ liekana, gauta jį dalijant iš 5, gali būti tik 0, 1 arba 2. Bet 4048 dalijant iš 5 liekana yra 3.

Atsakymas: tokio skaičiaus nėra.

XI – XII klasės

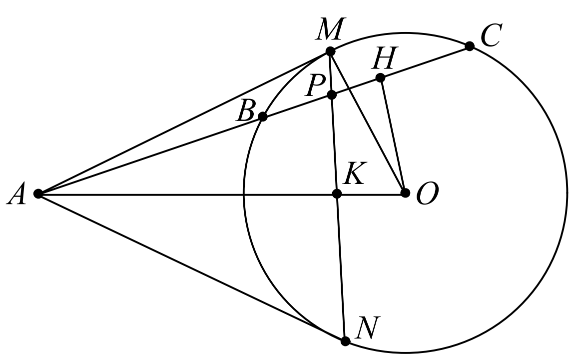
1. Teigiamiems realiesiems skaičiams a, b, c teisinga lygybė $a + b + c = 1$. Įrodykite nelygybę
$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Sprendimas. Iš nelygybės $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$ gauname, kad $\frac{ab}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2}$. Todėl $\frac{a^3}{a^2+b^2} = a - b\frac{ab}{a^2+b^2} \geq a - \frac{b}{2}$. Analogiškai $\frac{b^3}{b^2+c^2} \geq b - \frac{c}{2}$, $\frac{c^3}{c^2+a^2} \geq c - \frac{a}{2}$. Sudėję šias nelygybes ir atsižvelgę į sąlygą $a + b + c = 1$, gauname $\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq a + b + c - \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}$.

2. Iš taško A nubrėžta apskritimo kirstinė, kertanti jį taškuose B ir C, be to AB : BC = 2 : 3. Iš taško A nubrėžtos apskritimo liestinės liečia jį taškuose M ir N. Kokiu santykiu styga MN dalija atkarpą BC?

Sprendimas. Sakykime, kad atkarpos MN ir BC kertasi taške P, taškas O yra apskritimo centras, tiesės AO ir MN kertasi taške K, o OH yra statmuo iš taško O stygai BC. Žymėkime $AB = 2x$, $BC = 3x$, o kadangi taškas H yra atkarpos BC vidurys, tai $BH = \frac{3}{2}x$, todėl $AH = AB + BH = \frac{7}{2}x$. Kadangi statieji trikampiai AMK ir AOM turi bendrą kampą A, tai jie panašieji, todėl $\frac{AK}{AM} = \frac{AM}{AO}$, taigi $AM^2 = AK \cdot AO$. Statieji trikampiai APK ir AOH taip pat panašieji, todėl $\frac{AK}{AP} = \frac{AH}{AO}$, iš čia $AK \cdot AO = AP \cdot AH$. Iš gautųjų lygybių turime, kad $AM^2 = AP \cdot AH$. Kita vertus, pagal liestinės ir kirstinės savybę $AM^2 = AB \cdot AC$, taigi $AP \cdot AH = AB \cdot AC$. Iš čia $AP = \frac{AB \cdot AC}{AH} = \frac{20}{7}x$, todėl $PC = AC - AP = \frac{15}{7}x$, $PB = AP - AB = \frac{20}{7}x - 2x = \frac{6}{7}x$, taigi $BP : PC = \frac{6}{7} : \frac{15}{7} = 2 : 5$.

Atsakymas: 2 : 5.



3. Ant stalo į eilę sustatyta 101 šaškė, 5 iš jų yra baltos, likusios – juodos, o pirmoji ir paskutinė šaškė yra juodos. Du žaidėjai A ir B paeiliui ima po vieną bet kurią kraštinę šaškę. Žaidimą pradeda žaidėjas A ir žaidžiama iki tol, kol ant stalo nelieka baltų šaškių. Laimi tas žaidėjas, pas kurį yra daugiau baltų šaškių. Kuris iš žaidėjų turi laimėtiną strategiją? Nurodykite tą strategiją.

Sprendimas. Sunumeruokime šaškes nuo 1 iki 101, šaškes su lyginiais numeriais vadinkime lyginėmis, o su nelyginiais – nelyginėmis. Kadangi yra nelyginis skaičius šaškių, tai iš abiejų galų yra nelyginės šaškės, taigi žaidėjas A pirmuoju ėjimu ima nelyginę šaškę. Žaidėjas B suskaičiuoja, kurių baltų šaškių yra daugiau. Jei daugiau lyginių baltųjų šaškių, savo pirmuoju ėjimu jis ima lyginę šaškę, priversdamas žaidėją A imti nelyginę šaškę ir taip toliau. Taigi B ima tik lygines šaškes, o A – tik nelygines, todėl lentoje nelikus baltų šaškių, jų bus daugiau pas žaidėją B. Analogiškai, jei daugiau yra nelyginių baltų šaškių, žaidėjas B savo pirmuoju ėjimu ima nelyginę šaškę, todėl pas jį bus tik nelyginės šaškės, taigi nelyginių baltų pas jį bus daugiau.

Atsakymas: žaidėjas B turi laimėtiną strategiją.

4. Natūraliųjų skaičių seka (x_n) apibrėžiama lygybėmis $x_1 = 2,\ \ x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$, kai $n > 1$. Įrodykite, kad kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ skaičiai x_n ir n yra tarpusavyje pirminiai.

Sprendimas. Sakykime, kad skaičius p yra skaičiaus n daliklis, ir nagrinėkime sekos (x_n) narių dalybos iš p liekanas. Jei kuris nors sekos narys dalijasi iš $p,$ tai sekančio sekos nario dalybos iš p liekana yra $-1,$ o visų kitų po šio nario einančių sekos narių dalybos iš p liekanos lygios 1. Taigi jei sekos narys x_n dalijasi iš $p,$ tai prieš jį esantys sekos nariai nesidalija iš p ir nei vieno jų liekana dalijant iš p nelygi 1. Iš čia seka, kad visų sekos narių $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ liekanos dalijant iš p gali būti skaičiai 2, 3, ..., $p - 1$, todėl šiuos skaičius dalijant iš p galime gauti ne daugiau kaip $p - 2$ skirtingas liekanas. Kadangi sekos narių skaičius $n - 1 > p - 2$, tai bent dvi iš tų liekanų sutampa. Kadangi bet kurio sekos nario liekana, gauta jį dalijant iš $p,$ vienareikšmiškai nustatoma prieš jį einančio sekos nario liekana, tai liekanų seka yra periodinė, o jos periode nėra liekanos lygios 0. Iš čia seka, kad nei vienas sekos narys nesidalija iš p. Kadangi p yra bet kuris pirminis skaičiaus n daliklis, tai iš čia seka uždavinio tvirtinimas.