72-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Vilnius, 2024 04 06

Uždavinių sąlygos ir sprendimai

9–10 klasės

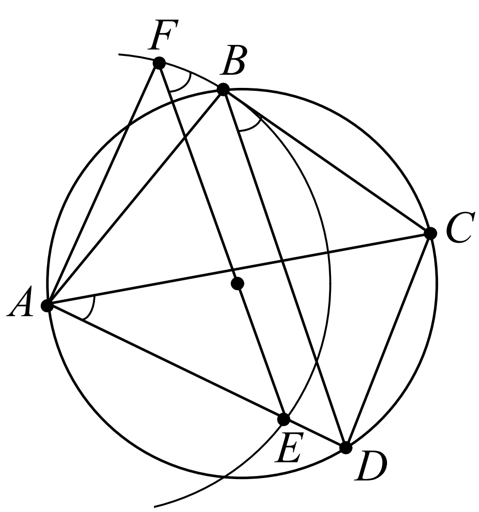
1. Išspręskite lygtį $2x^2 + 6x + 9 = 7x\sqrt{2x+3}$.

Sprendimas. Kadangi su visais x teisinga nelygybė $2x^2 + 6x + 9 > 0,$ tai turi būti $x > 0$. Pažymėjus $u = \sqrt{2x+3}$, lygtis tampa $2x^2 + 3u^2 = 7xu.$ Iš čia $(2x^2 - ux) + (3u^2 - 6ux) = 0$, $x(2x-u) + 3u(u-2x) = 0$, $(2x-u)(x-3u) = 0$. Todėl $2x - u = 0$ arba $x - 3u = 0$. Pirmuoju atveju gauname lygtį $2x = \sqrt{2x+3}$, $4x^2 = 2x + 3$, teigiamasis šios kvadratinės lygties sprendinys $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{4}$. Antruoju atveju $x = 3\sqrt{2x+3}$, $x^2 = 18x + 27$, teigiamasis šios lygties sprendinys $x_2 = 9 + 6\sqrt{3}$.

Atsakymas: $\frac{1+\sqrt{13}}{4}$, $9 + 6\sqrt{3}$.

2. Keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą, $BC = CD$, $AD > AB.$ Taškas E yra kraštinėje AD, taškas F yra kraštinės BC tęsinyje už taško B, o $AE = AB = AF$. Įrodykite, kad tiesės EF ir BD yra lygiagrečios.

Sprendimas. Iš įbrėžtinių kampų savybių turime lygybes $\angle BAC = \angle BDC = \angle DBC = \angle DAC$, taigi įstrižainė AC yra kampo BAD pusiaukampinė. Kadangi pagal sąlygą trikampis BAE yra lygiašonis, tai jo viršūnės kampo pusiaukampinė yra ir aukštinė, taigi $AC \perp BE$. Pagal sąlygą taškai E, B, F yra apskritime, kurio centras A, o spindulys $AE = AB = AF$. Remiantis centrinių ir įbrėžtinių kampų savybėmis $\angle EFB = \frac{1}{2}\angle EAB = \angle EAC = \angle DAC = \angle DBC$, o tai ir reiškia, kad tiesės EF ir BD yra lygiagrečios.



3. Lentoje parašyti sveikieji skaičiai 1, 2, 3, ..., 2024. Kiekvienu žingsniu pasirenkami bet kurie du lentoje parašyti skaičiai ir vietoje jų lentoje parašomas tų dviejų skaičių aritmetinis vidurkis. (Pavyzdžiui, pirmu žingsniu vietoje 1 ir 2 galima parašyti 1,5, arba vietoje 1 ir 3 parašyti dar vieną dvejetą.) Po 2023 žingsnių lentoje liks vienintelis skaičius.
   a) Nurodykite tokią keitimų seką, kad paskutinis skaičius būtų 99.
   b) Ar egzistuoja tokia keitimų seka, kad paskutinis skaičius būtų 199,5?

Sprendimas. Tiek a) atveju, tiek b) atveju tokia keitimų seka yra. Atveju a) pirmuoju ėjimu 2024 ir 2022 keičiame į 2023, antruoju – 2023 ir 2023 keičiame į 2023, trečiuoju ėjimu – 2023 ir 2021 keičiame į 2022 ir t. t. Po k tokių keitimų paskutiniai skaičiai bus $2024-k+1,\ 2024-k-1,\ 2024-k-2, \ldots$. Po $k=1922$ keitimų lentoje turėsime skaičius $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 97,\ 98,\ 99,\ 100,\ 101,\ 103$. Dabar $k+1$ - uoju keitimu sukeičiame 1 ir 3 į 2, po to 2 ir 2 – į 2, dar po to 2 ir 4 – į 3 ir t. t. Po 1922+97 keitimų lentoje liks skaičiai 97, 99, 100, 101, 103. Tuomet keturiais paskutiniais keitimais 101 ir 103 keičiame į 102, 100 ir 102 – į 101, 97 ir 101 – į 99, ir galiausiai 99 ir 99 – į 99.

Atveju b) analogiškai paskutinius skaičius keičiame nuo 2024, 2023, ... iki skaičių 1, 2, 3, ..., 198, 199, 200, 202, tam prireiks 1823 keitimų. Tada atliekame 198 keitimus nuo pirmųjų skaičių iki skaičių 198, 200, 202. Dabar 200 ir 202 keičiame į 201, o galiausiai 198 ir 201 – į 199,5.

4. Raskite visus pirminius skaičius p, kuriems egzistuoja natūralieji skaičiai n, x ir y, tenkinantys lygybę $p^n = x^3 + y^3$.

Sprendimas. Kai $p=2$, tai galime imti $n=x=y=1$, nes $2^1 = 1^3 + 1^3$. Kai $p=3$, tai imame $n=x=2,\ y=1$, nes $3^2 = 2^3 + 1^3$. Tarkime, kad $p>3$ – pirminis skaičius, ir yra natūralieji skaičiai n, x, y, kuriems teisinga lygybė $p^n = x^3 + y^3$. Sakykime, kad n yra mažiausias galimas toks natūralusis skaičius. Kadangi $p \neq 2$, tai $(x,y) \neq (1,1)$. Todėl $x+y>1$ ir $x^2-xy+y^2 = (x-y)^2+xy>1$. Taigi iš lygybės $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ išplaukia, kad tiek $x+y$, tiek $x^2-xy+y^2=(x-y)^2+xy$ yra pirminio skaičiaus p laipsniai, didesni už 1. Todėl skaičius $(x+y)^2-(x^2-xy+y^2)=3xy$ dalijasi iš p. Kadangi $p>3$, tai iš p dalijasi arba x, arba y. Kadangi $x+y$ dalijasi iš p ir bent vienas iš dėmenų dalijasi iš p, tai abu skaičiai x ir y dalijasi iš p. Taigi $n>3$ (nes $x^3+y^3 \geq 2p^3$). Pažymėję $n_1=n-3,\ x_1=\frac{x}{p},\ y_1=\frac{y}{p}$, gauname lygybę $p^{n_1} = x_1^3+y_1^3$, tačiau $n_1<n$ – prieštara.

Atsakymas: $p=2$ ir $p=3$.

11–12 klasės

1. Teigiami realieji skaičiai x, y ir z tenkina sąlygą $xyz=32$. Raskite reiškinio
$$x^2+4xy+4y^2+2z^2$$
mažiausią galimą reikšmę.

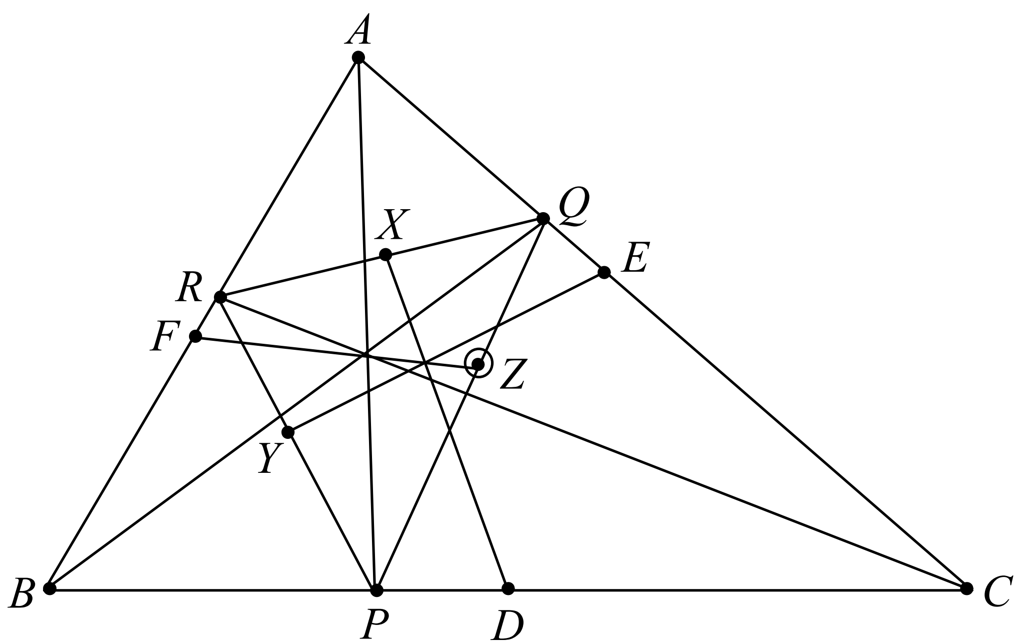
Sprendimas. Du kartus pritaikę aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę, gauname: $x^2+4xy+4y^2+2z^2=(x^2+4y^2)+4xy+2z^2 \geq 2\sqrt{x^2\cdot 4y^2}+4xy+2z^2=4xy+4xy+2z^2 \geq$

$3\sqrt[3]{4xy\cdot 4xy\cdot 2z^2}=3\sqrt[3]{32(xyz)^2}=96.$ Lygybė pasiekiama, kai $x^2=4y^2$ ir $4xy=2z^2$, t. y., kai $(x,y,z)=(4,2,4)$.

Atsakymas: 96.

2. Taškai D,E,F yra atitinkamai smailiojo trikampio ABC kraštinių BC,AC,AB vidurio taškai, atkarpos AP,BQ,CR yra šio trikampio aukštinės, taškai X,Y,Z atitinkamai yra atkarpų QR,PR,PQ vidurio taškai. Įrodykite, kad tiesės DX,EY,FZ kertasi viename taške.

Sprendimas. Kadangi atkarpa CR yra aukštinė, tai trikampis CBR statusis, todėl $RD=DC=DB$, taigi $DR=\frac{1}{2}BC$. Analogiškai iš stačiojo trikampio BQC gauname, kad $DQ=DB=DC=\frac{1}{2}BC$. Iš lygybės $DR=DQ$ aišku, kad taškas D yra atkarpos RQ vidurio statmenyje, taigi tiesė DX yra atkarpos QR vidurio statmuo. Analogiškai gauname, kad tiesės EY ir FZ yra atkarpų PR ir PQ vidurio statmenys, taigi šie vidurio statmenys kertasi viename taške, kuris yra apie trikampį PRQ apibrėžto apskritimo centras.



3. Raskite visus natūraliuosius skaičius $n\geq 3$, su kuriais egzistuoja n nenulinių realiųjų skaičių $x_1,x_2,\dots,x_n$, kurie ir patys sudaro didėjančią aritmetinę progresiją, t. y.
$$x_2-x_1=x_3-x_2=\cdots=x_n-x_{n-1}>0,$$
ir jų atvirkštiniai $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\dots,\frac{1}{x_n}$, surašyti galbūt kita tvarka, taip pat sudaro didėjančią aritmetinę progresiją.

Sprendimas. Kai $n=3$, tai tinka trejetas $-1,\frac{1}{2},\ 2$, kadangi jis yra lygiai toks pat, kaip ir atvirkštinių skaičių trejetas $-1,2,\frac{1}{2}$. Kai $n=4$, tai tinka ketvertas $-3,-1,1,3$, kadangi atvirkštinių skaičių ketvertas $-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\ 1$ taip pat yra didėjanti aritmetinė progresija. Tarkime, kad $n\geq 5$. Tada arba trys didžiausi pirmosios progresijos nariai yra teigiami, arba trys mažiausi jos nariai yra neigiami. Pažymėkime tuos skaičius $x-d, x, x+d,$ čia $d>0$. Tada jiems atvirkštiniai skaičiai $\frac{1}{x-d}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x+d}$ yra arba trys mažiausi teigiami ($0<\frac{1}{x+d}<\frac{1}{x}<\frac{1}{x-d}$), arba trys didžiausi neigiami ($\frac{1}{x-d}<\frac{1}{x}<\frac{1}{x+d}<0$) atvirkštinių skaičių aibės elementai. Abiem atvejais

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{x-d}+\frac{1}{x+d}=\frac{x+d+x-d}{x^2-d^2}=\frac{2x}{x^2-d^2}.$$

Taigi $2x^2-2d^2=2x^2$, todėl $d=0$ – prieštara.

Atsakymas: $n=3, n=4$.

4. Lentoje užrašytas skaičius $a \in \{1,2,\dots,9\}$. Agnė ir Benas paeiliui į lentoje esančio skaičiaus bet kurią vietą parašo bet kokį skaitmenį nuo 1 iki 9 ir taip gauna naują skaičių. Žaidimas baigiasi, jei kuriam nors žaidėjui pavyko įrašyti skaitmenį taip, kad gautasis skaičius yra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Tas žaidėjas ir laimi žaidimą. Su kiekvienu $a=1,2,\dots,9$ nustatykite, ar kuris nors žaidėjas turi laiminčiąją strategiją, ir jei taip, tai kuris. (Žaidimą pradeda Agnė.)

Sprendimas. Kadangi skaičiai 81, 25, 36, 49 yra natūraliojo skaičiaus kvadratai, tai Agnė iš karto pirmuoju ėjimu gali laimėti žaidimą, kai $a \neq 7$. Tarkime, kad $a=7$. Kadangi jokio skaičiaus kvadratas nesibaigia skaitmeniu 7, ir joks skaičius 71, 72, ..., 79 nėra kvadratas, tai pirmuoju ėjimu Agnė laimėti negali. Įrodysime, kad kiekvienas žaidėjas visada gali prirašyti paskutiniuoju skaitmeniu 2 arba 3 taip, kad jis nepralaimės, taigi nei vienas iš žaidėjų laiminčiosios strategijos neturi. Tarkime priešingai. Tada atsiras toks natūralusis skaičius $x,$ kad ir prie skaičiaus $\overline{x2}$, ir prie skaičiaus $\overline{x3}$ bus galima prirašyti skaitmenį taip, kad gautasis skaičius bus natūraliojo skaičiaus kvadratas. Kadangi kvadratas nesibaigia nei skaitmeniu 2, nei skaitmeniu 3, tai naujasis skaitmuo turi būti rašomas paskutiniuoju. Tada egzistuoja du kvadratai, užrašomi kaip $\overline{x2y}$ ir $\overline{x3z}$, čia $x \in \mathbb{N}$ ir $y, z \in \{1,2,\dots,9\}$. Šių skaičių skirtumas ne didesnis kaip 19, o dviejų bent tris skaitmenis turinčių kvadratų skirtumas yra ne mažesnis, nei $121-100=21$. Gautoji prieštara įrodo, kad nei vienas žaidėjas neturi laiminčiosios strategijos.

Atsakymas: kai $a \neq 7,$ tai Agnė gali laimėti jau pirmu ėjimu, o kai $a=7$, tai nei vienas iš žaidėjų neturi laiminčiosios strategijos.