

72-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Vilnius, 2024 04 06

9 – 10 klasės

1. Išspręskite lygtį $2x^2 + 6x + 9 = 7x\sqrt{2x + 3}$.
2. Keturkampis $ABCD$ yra įbrėžtas į apskritimą, $BC = CD$, $AD > AB$. Taškas E yra kraštinėje AD , taškas F yra kraštinės BC tęsinyje už taško B , o $AE = AB = AF$. Įrodykite, kad tiesės EF ir BD yra lygiagrečios.
3. Lentoje parašyti sveikieji skaičiai $1, 2, 3, \dots, 2024$. Kiekvienu žingsniu pasirenkami bet kurie du lentoje parašyti skaičiai ir vietoje jų lentoje parašomas tų dviejų skaičių aritmetinis vidurkis. (Pavyzdžiui, pirmu žingsniu vietoje 1 ir 2 galima parašyti 1,5, arba vietoje 1 ir 3 parašyti dar vieną dvejetą.) Po 2023 žingsnių lentoje liks vienintelis skaičius.
 - a) Nurodykite tokią keitimų seką, kad paskutinis skaičius būtų 99.
 - b) Ar egzistuoja tokia keitimų seka, kad paskutinis skaičius būtų 199,5?
4. Raskite visus pirminius skaičius p , kuriems egzistuoja natūralieji skaičiai n, x ir y , tenkinantys lygybę

$$p^n = x^3 + y^3.$$

11 – 12 klasės

1. Teigiami realieji skaičiai x, y ir z tenkina sąlygą $xyz = 32$. Raskite reiškinio $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2$ mažiausią galimą reikšmę.
2. Taškai D, E, F yra atitinkamai smailiojo trikampio ABC kraštinių BC, AC, AB vidurio taškai, atkarpos AP, BQ, CR yra šio trikampio aukštinės, taškai X, Y, Z atitinkamai yra atkarpų QR, PR, PQ vidurio taškai. Įrodykite, kad tiesės DX, EY, FZ kertasi viename taške.
3. Raskite visus natūraliuosius skaičius $n \geq 3$, su kuriais egzistuoja n nenulinių realiųjų skaičių x_1, x_2, \dots, x_n , kurie ir patys sudaro didėjančią aritmetinę progresiją, t. y. $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_n - x_{n-1} > 0$, ir jų atvirkštiniai $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$, surašyti galbūt kita tvarka, taip pat sudaro didėjančią aritmetinę progresiją.
4. Lentoje užrašytas skaičius $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Agnė ir Benas paeiliui į lentoje esančio skaičiaus bet kurią vietą prirašo bet kokį skaitmenį nuo 1 iki 9 ir taip gauna naują skaičių. Žaidimas baigiasi, jei kuriam nors žaidėjui pavyko įrašyti skaitmenį taip, kad gautasis skaičius yra natūraliojo skaičiaus kvadratas. Tas žaidėjas ir laimi žaidimą. Su kiekvienu $a = 1, 2, \dots, 9$ nustatykite, ar kuris nors žaidėjas turi laiminčiąją strategiją, ir jei taip, tai kuris. (Žaidimą pradeda Agnė.)