LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

Jaunajam matematikui

25

2022–2024 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Užduotys

STOJAMOJI UŽDUOTIS

1. Tėvo metų skaičius yra 5 didesnis už trijų jo sūnų metų sumą. Po 10 metų tėvas bus dvigubai vyresnis už vyriausiąjį sūnų, po 20 metų – dvigubai vyresnis už vidurinįjį sūnų, o po 30 metų bus dvigubai vyresnis už jaunėlį. Kiek metų yra tėvui ir kiekvienam sūnui?

2. Iš uosto tuo pačiu metu išplaukė du motorlaiviai – vienas į pietus, o kitas – į rytus. Po 2 valandų atstumas tarp jų buvo 174 km. Į rytus plaukiantis motorlaivis kas valandą nuplaukdavo 3 km daugiau, nei kitas. Raskite kiekvieno motorlaivio greitį.

3. Grupė mokinių sutarė organizuoti kelionę, visi mokėdami po lygiai. Kelionės kaina yra tarp 170 ir 195 eurų. Vėliau du mokiniai atsisakė vykti, todėl likusieji turėjo sumokėti po 1 eurą daugiau. Kiek kainavo kelionė?

4. Triženklio skaičiaus skaitmenys yra pirminiai skaičiai, o kiekvienas skaitmuo yra šio skaičiaus daliklis. Raskite visus tokius triženklius skaičius.

5. Su kuria **neigiama** a reikšme funkcija $f(x) = ax^2 + 2x + 6$ intervale $\left[1 - \frac{1}{a}; 2 - \frac{1}{a}\right]$ įgyja mažiausią reikšmę, lygią 3 ?

6. Išspręskite lygtį

$$\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}.$$

7. Išspręskite nelygybę

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}.$$

8. Išspręskite lygčių sistemą

$$\sqrt{\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}} = \frac{5}{2},$$
$$|x+y| = 5.$$

9. Atkarpos AE ir BF yra lygiašonio trikampio ABC $(AB = BC)$ aukštinės, $FC : BC = 2 : 5$. Raskite santykį $AE : BF$.

10. Stačiakampės trapecijos įstrižainės yra statmenos, jos aukštinė lygi 2, didesnysis pagrindas lygus 3. Raskite mažesniojo pagrindo ilgį.

I. UŽDAVINIAI, SPRENDŽIAMI SUDARANT LYGTIS IR JŲ SISTEMAS

Teorinę medžiagą parengė ir pirmąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis (Vilniaus universitetas)

Iš patirties žinome, kad tekstiniai (žodiniai) darbo, judėjimo, mišinių (lydinių) ir kiti panašūs uždaviniai dažnai sprendžiami sudarant lygtis bei lygčių sistemas. Bet ne vien tik jie. Štai, pavyzdžiui, tiesių $y = 2x + 7$ ir $y = 3x + 9$ susikirtimo taško M koordinatės turi tenkinti ir vienos tiesės lygtį $y = 2x + 7$, ir kitos tiesės lygtį $y = 3x + 9$, nes tas taškas yra ir vienoje tiesėje, ir kitoje tiesėje. Vadinasi, taško M koordinatėms rasti reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} y = 2x + 7, \\ y = 3x + 9, \end{cases}$$

kurią galima užrašyti, pavyzdžiui, ir taip:

$$\begin{cases} 2x - y = -7, \\ 3x - y = -9. \end{cases}$$

Išsprendę ją gautume, kad $x = -2,\ \ y = 3.$ Iš čia išplauktų išvada, jog pora (–2; 3) yra tiesių susikirtimo taško M koordinatės.

Siekdami labiau įsigilinti į šią temą, kartu išnagrinėkime kelis konkrečius pavyzdžius. Ką gali žinoti, gal tai padės įveikti visus šios temos uždavinius.

1 pavyzdys. Du automobiliai važiuoja apskritimu, kurio ilgis 3600 metrų. Pirmas automobilis per vieną sekundę nuvažiuoja 4 metrais toliau už antrą, todėl visą apskritimą jis įveikia 10 sekundžių greičiau. Koks yra kiekvieno automobilio greitis?

Sprendimas. Tegu v yra pirmo automobilio greitis (m/sek). Tada (pagal sąlygą) antro automobilio greitis yra $(v-4)$ m/sek.

Pirmas automobilis visą ratą įveikia per $\dfrac{3600}{v}$ sekundžių, o antras – per $\dfrac{3600}{v-4}$ sekundžių. Pagal sąlygą, laiko skirtumas yra 10 sekundžių, todėl turi galioti lygybė

$$\frac{3600}{v-4} - \frac{3600}{v} = 10.$$

Tos lygties ir pakanka greičiui rasti. Beje, ji turi du sprendinius: $v_1 = 40$ ir $v_2 = -36.$ Bet (pagal prasmę) tinka tik $v = 40.$ Taigi pirmo automobilio greitis yra 40 m/sek = 144 km/h, o antro – 36 m/sek = 129,6 km/h.

Ats.: 144 km/h ir 129,6 km/h.

2 pavyzdys. Du broliai gyvena už 400 metrų nuo mokyklos. Eidamas į mokyklą, vyresnysis brolis nužingsniuoja 300 žingsnių mažiau už jaunesnįjį brolį, nes jo žingsnis yra 30 centimetrų ilgesnis. Koks yra kiekvieno brolio žingsnio ilgis?

Sprendimas. Jei jaunesniojo brolio žingsnis būtų x metrų ilgio, tai jis suskaičiuotų $\dfrac{400}{x}$ žingsnių. Tada $\dfrac{400}{x+0{,}3}$ būtų vyresniojo brolio žingsnių skaičius. Pagal sąlygą, turėtų galioti lygybė $\dfrac{400}{x} - \dfrac{400}{x+0{,}3} = 300.$ Iš čia gauname ekvivalenčią kvadratinę lygtį $10x^2 + 3x - 4 = 0$ $(x \neq 0$ ir $x \neq -0{,}3),$ turinčią du sprendinius: $x_1 = -0{,}8$ ir $x_2 = 0{,}5.$ Tačiau tinka tik antras.

Taigi jaunesniojo brolio žingsnio ilgis 0,5 m, o vyresniojo – 0,8 m.

Ats.: 0,5 m ir 0,8 m.

3 pavyzdys (Diofanto uždavinys). Skaičių 100 reikia du kartus suskaidyti į du dėmenis taip, kad pirmo skaidinio didesnysis dėmuo būtų dvigubai didesnis už antro skaidinio mažesnįjį dėmenį, o antro skaidinio didesnysis dėmuo būtų trigubai didesnis už pirmo skaidinio mažesnįjį dėmenį.

Sprendimas. Tegu pirmo skaidinio dėmenys yra a ir b, $a < b$, o antro – c ir d, $c < d$. Remdamiesi sąlyga, gauname tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} a + b = 100, \\ c + d = 100, \\ b = 2c, \\ d = 3a. \end{cases}$$

Spręsdami šią sistemą, gauname:

$$\begin{cases} a+2c=100, \\ c+3a=100, \\ \quad b=2c, \\ \quad d=3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=100-2c, \\ c+3(100-2c)=100, \\ \quad b=2c, \\ \quad d=3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=100-2c, \\ c=40, \\ b=80, \\ d=3a. \end{cases}$$

Taigi $a=20$, $b=80$, $c=40$, $d=60$.

Ats.: 20 ir 80; 40 ir 60.

4 pavyzdys. Baseinas pripildomas vandeniu 5 vamzdžiais:
pirmu vamzdžiu –per 24 minutes;
antru, trečiu ir ketvirtu –per 20 minučių;
antru, trečiu ir penktu – per 30 minučių;
pirmu ir penktu – per 15 minučių.

Apskaičiuokime, per kiek laiko baseinas būtų pripildytas vandeniu atsukus visų penkių vamzdžių čiaupus.

Sprendimas. Tegu *V* yra baseino tūris, *t* – ieškomas laikas (min.), o x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – baseino pripildymo sparta (*V* dalis per 1 min.) atitinkamai pirmu, antru, trečiu, ketvirtu ir penktu vamzdžiu.

Aišku, kad

$$t=\frac{V}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}.$$

Sumai $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ rasti sudarykime lygčių sistemą

$$\begin{cases} 24x_1 = V, \\ 20(x_2+x_3+x_4) = V, \\ 30(x_2+x_3+x_5) = V, \\ 15(x_1+x_5) = V. \end{cases}$$

Ji yra ekvivalenti šiai sistemai:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{24}V, \\ x_2+x_3+x_4 = \frac{1}{20}V, \\ x_2+x_3+x_5 = \frac{1}{30}V, \\ x_1+x_5 = \frac{1}{15}V. \end{cases}$$

Kadangi $x_1=\frac{1}{24}V$, tai iš ketvirtos lygties gauname, kad

$$x_5=\frac{1}{15}V-\frac{1}{24}V=\frac{3}{120}V=\frac{1}{40}V.$$

Iš trečios lygties randame x_2+x_3, o tada iš antros lygties – x_4 reikšmę:

$$x_2+x_3=\frac{1}{30}V-x_5=\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{40}\right)V=\frac{1}{120}V;$$

$$x_4=\frac{1}{20}V-(x_2+x_3)=\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{120}\right)V=\frac{5}{120}V=\frac{1}{24}V.$$

Matome, kad nėra galimybės apskaičiuoti dydžių x_2 ir x_3 reikšmes. Bet tai nėra kliūtis ieškomai sumai rasti:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1+(x_2+x_3)+x_4+x_5=\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{24}+\frac{1}{40}\right)V=\frac{7}{60}V.$$

Vadinasi, $t=\frac{60}{7}=8\frac{4}{7}$.

Ats.: $8\frac{4}{7}$.

5 pavyzdys. Raskime visas parametro a reikšmes, kurioms esant kvadratinė lygtis

$$x^2 - \frac{15}{4}x + a^2 = 0$$

turi du sprendinius ir vienas iš jų yra lygus antro sprendinio kvadratui.

Sprendimas. Kad lygtis turėtų du sprendinius, jos diskriminantas $D = \left(\frac{15}{4}\right)^2 - 4a^2 = \frac{1}{16}(225 - 64a^2)$ turi būti teigiamas. Spręsdami nelygybę $D > 0$ gauname:

$$225 - 64a^2 > 0 \Rightarrow a^2 < \frac{225}{64} \Rightarrow |a| < \frac{15}{8}.$$

Taigi (1) lygtis turi du sprendinius, jei $a \in \left(-\frac{15}{8}; \frac{15}{8}\right)$.

Tegu x_1 ir x_2 yra (1) lygties sprendiniai. Pagal Vijeto teoremą,

$$x_1 + x_2 = \frac{15}{4} \text{ ir } x_1 \cdot x_2 = a^2.$$

Ieškant parametro a reikšmių, kurioms esant galioja sąlyga $x_1 = x_2^2$, reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_2^2 + x_2 = \frac{15}{4}, \\ x_2^2 \cdot x_2 = a^2. \end{cases}$$

Gausime:

$$\begin{cases} 4x_2^2 + 4x_2 - 15 = 0, \\ x_2^3 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x_2 + 1)^2 - 16 = 0, \\ x_2^3 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + 1 = \pm 4, \\ x_2^3 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{5}{2} \text{ arba } x_2 = \frac{3}{2}, \\ x_2^3 = a^2. \end{cases}$$

Iš čia gauname, kad $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 = \frac{9}{4}$, ir $a^2 = \frac{27}{8}$. Todėl $a = \pm\sqrt{\frac{27}{8}} = \pm\sqrt{\frac{54}{16}} = \pm\frac{3\sqrt{6}}{4}$. Nesunku įsitikinti, kad ir skaičius $-\frac{3\sqrt{6}}{4}$, ir skaičius $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ priklauso intervalui $\left(-\frac{15}{8}; \frac{15}{8}\right)$. Vadinasi, $a \in \left\{-\frac{3\sqrt{6}}{4}; \frac{3\sqrt{6}}{4}\right\}$.

Ats.: $a \in \left\{-\frac{3\sqrt{6}}{4}; \frac{3\sqrt{6}}{4}\right\}$.

6 pavyzdys. Raskime parabolės lygtį, žinodami, kad ši parabolė eina per taškus (1; 4), (–2; –5) ir (3; 0), o jos simetrijos ašis yra lygiagreti su koordinačių sistemos ašimi Oy.

Sprendimas. Ieškomos parabolės bendroji lygtis yra $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Pagal sąlygą, turi galioti šios lygybės:

$$a + b + c = 4, \;\; 4a - 2b + c = -5, \;\; 9a + 3b + c = 0.$$

Iš jų sudarome ir sprendžiame lygčių (nežinomieji čia yra a, b ir c) sistemą:

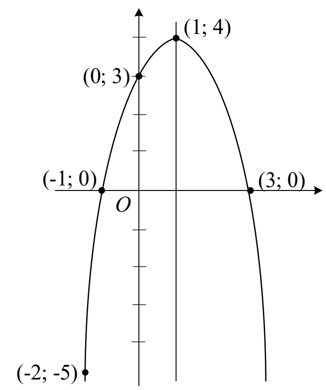
$$\begin{cases} a + b + c = 4, \\ 4a - 2b + c = -5, \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 4 - a - b, \\ 4a - 2b + (4 - a - b) = -5, \\ 9a + 3b + (4 - a - b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 4 - a - b, \\ 3a - 3b = -9, \\ 8a + 2b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 4 - a - b, \\ a - b = -3, \\ 4a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 4 - a - b, \\ a = b - 3, \\ 4(b - 3) + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 4 - a - b, \\ a = b - 3, \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 2, c = 3.$$

Taigi ieškoma parabolės lygtis yra

$$y = -x^2 + 2x + 3.$$

Šios parabolės šakos leidžiasi žemyn (žr. pav.), viršūnės taško koordinatės yra (1; 4); su ašimi Oy ji susikerta taške (0; 3), o su ašimi Ox susikerta taškuose (3; 0) ir (-1; 0).



Ats.: $y = -x^2 + 2x + 3$.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Lygus laukas yra stačiakampio formos. Vieno krašto taške M yra akmuo, nuo artimiausio kampo nutolęs per vieną dešimtąją to krašto ilgio dalį.

Einant iš taško M iki tolimiausio kampo sklypo kraštu ir ėjimo kryptį keičiant tik vieną kartą tektų sugaišti 1 h 3 min, o einant į tą kampą tiesiai per lauką pakaktų 45 min. Kelionė sklypo įstrižaine užtruktų daugiau kaip 48 min.

Apskaičiuokite, per kelias minutes iš taško M galima nueiti (tuo pačiu pastoviu greičiu kaip ir kitur) iki artimiausio kampo.

2. Du grybautojai miške rado po 40 grybų, tarp kurių per abu buvo 52 baravykai, Apskaičiuokite, kiek baravykų rado kiekvienas grybautojas, jei žinoma, kad pirmojo grybautojo baravykų ir likusių grybų skaičiaus santykis yra 4 kartus didesnis už antrojo grybautojo baravykų ir likusių grybų skaičiaus santykį.

3. Du darbininkai tam tikrą darbą atliko per 10 dienų, bet pirmas darbininkas paskutines dvi dienas nedirbo. Per pirmas 7 dienas buvo atlikta 80 % viso darbo. Apskaičiuokite, per kelias dienas visą darbą galėtų atlikti pirmas darbininkas.

4. Iš A į B išvažiavo krovininis automobilis, o po valandos – ir lengvasis automobilis. Punktą B abu automobiliai pasiekė tuo pačiu laiko momentu. Jei vienas iš jų būtų išvažiavęs iš A į B, o kitas – iš B į A (tuo pačiu laiko momentu), tai būtų susitikę po 1 h 12 min.

Kiek laiko iš A į B važiavo krovininis automobilis?

5. Indas pripiltas 96 % koncentracijos rūgšties tirpalo. Nupylus 2,5 litro, į jį įpilta tiek pat 80 % koncentracijos tos pačios rūgšties tirpalo. Pakartojus tokį pat veiksmą (nupylus 2,5 litro gauto tirpalo ir įpylus tiek pat 80 % koncentracijos tirpalo), rūgšties koncentracija tirpale pasidarė 89 %.

Kokia indo talpa?

6. Yra trys lydiniai, sudaryti iš metalų A, B ir C. Pirmą lydinį sudaro tik metalai A ir B, kurių masių santykis 3:5; antrą – tik metalai B ir C, kurių masių santykis 1:2, o trečią – tik A ir C, kurių masių santykis 2:3.

Iš šių lydinių gautas naujas lydinys, kuriame metalų A, B ir C santykis yra 3:5:2.

Raskite pirmo, antro ir trečio lydinio masių santykį šiame lydinyje.

7. Sugalvotas teigiamas sveikasis skaičius. Reikėjo jį padidinti 200 000 vienetų ir gautą skaičių patrigubinti. Tačiau pakako prirašyti prie sugalvoto skaičiaus skaitmenį 2 (dešinėje pusėje) ir buvo gautas tas pats rezultatas.

Koks skaičius buvo sugalvotas?

8. Apskaičiuokite funkcijos f, tenkinančios sąlygą $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x > 0$, reikšmę $f(4)$.

9. Nustatykite, ar yra parabolė, kuri eitų per taškus $M_1(1; 3)$, $M_2(0; 5)$, $M_3(2; 5)$ ir $M_4(-1; 11)$, o simetrijos ašis būtų lygiagreti su koordinačių sistemos ašimi Oy. Jeigu taip, parašykite jos lygtį.

10. Raskite tokią a ir b reikšmių porą (a; b), kad tiesė $y = ax + b$ eitų per tašką (–1; 1) ir per tiesių $y = 3x - 5$ ir $y = x + 1$ susikirtimo tašką M.

II. ALGEBRINĖS LYGTYS

Teorinę medžiagą parengė ir antrąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis (Vilniaus universitetas)

Algebrine lygtimi su nežinomuoju x vadinama tokia lygtis, kurią galima užrašyti pavidalu

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0; \tag{1}$$

čia a_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1, n$, bet kurie realieji skaičiai, bet $a_n \neq 0$. Natūralusis skaičius n vadinamas *lygties laipsniu*.

Jei $n = 1$, algebrinė lygtis vadinama *tiesine lygtimi*; paprastai ji užrašoma pavidalu $ax + b = 0$, $a \neq 0$.

Jei $n = 2$, algebrinė lygtis vadinama *kvadratine lygtimi*; paprastai ji užrašoma pavidalu $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Tiek su tiesine lygtimi, tiek su kvadratine lygtimi mūsų jaunieji matematikai yra gerai susipažinę, todėl šioje temoje nagrinėsime tik aukštesnio laipsnio algebrines lygtis.

Kiekvienos algebrinės lygties *sprendinys* suvokiamas vienodai – tai realusis skaičius, sakykim a, kuriam esant daugianario $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ reikšmė lygi nuliui; taigi jei galioja lygybė

$$a_n \cdot a^n + a_{n-1} \cdot a^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot a + a_0 = 0.$$

Ar sunku įsitikinti, kad konkretus skaičius yra algebrinės lygties sprendinys? Ir taip, ir ne – nelygu, koks yra tas skaičius ir koks yra lygties laipsnis. Štai, pavyzdžiui, skaičius 3 yra trečiojo laipsnio lygties

$$2x^3 - 12x^2 + 19x - 3 = 0 \tag{2}$$

sprendinys, nes $2 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 19 \cdot 3 - 3 = 54 - 108 + 57 - 3 = 0$, o atsakyti į klausimą, ar $x = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$ yra šios lygties sprendinys, nebe taip lengva. Vis dėlto galima įsitikinti, kad ir jis tenkina lygtį, nes

$$x = \frac{3+\sqrt{7}}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{16+6\sqrt{7}}{4} = \frac{8+3\sqrt{7}}{2} \Rightarrow x^3 = x \cdot x^2 = \frac{3+\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{8+3\sqrt{7}}{2} = \frac{45+17\sqrt{7}}{4},$$

o tada gauname, kad

$$2x^3 - 12x^2 + 19x - 3 = 2 \cdot \frac{45+17\sqrt{7}}{4} - 12 \cdot \frac{8+3\sqrt{7}}{2} + 19 \cdot \frac{3+\sqrt{7}}{2} - 3 =$$
$$= \frac{(45+17\sqrt{7}) - 12(8+3\sqrt{7}) + 19(3+\sqrt{7})}{2} - 3 = \frac{6}{2} - 3 = 0.$$

Taigi skaičius $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ taip pat yra (2) lygties sprendinys. Visai panašiai galėtume įsitikinti (paliekame tai atlikti savarankiškai), kad (2) lygtis turi dar ir trečią sprendinį – realųjį skaičių $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$.

Apskritai tarp n-tojo laipsnio algebrinių lygčių galima rasti tokių, kurios turi lygiai n sprendinių, ir be galo daug tokių, kurios turi mažiau negu n sprendinių ar net nė vieno. Bet nėra nė vienos algebrinės n-tojo laipsnio lygties, kuri turėtų daugiau kaip n sprendinių. Pastarąją išvadą reikėtų pagrįsti teoriniais samprotavimais, taigi įrodyti, nes konkrečių atvejų analizės nepakanka. Vis dėlto įrodymą praleisime.

1 pavyzdys. Įrodykime, kad ketvirtojo laipsnio (algebrinė) lygtis

$$x^4 + 6x^2 - 12x + 11 = 0 \tag{3}$$

neturi sprendinių.

Įrodymas. Kairėje lygybės pusėje esantį daugianarį pertvarkykime, pavyzdžiui, taip:

$$x^4 + 6x^2 - 12x + 11 = (x^4 + 2x^2 + 1) + (4x^2 - 12x + 9) + 1 = (x^2+1)^2 + (2x-3)^2 + 1,$$

ir pasidarys visiškai aišku, kad vietoj x įrašę bet kurį realųjį skaičių gausime teigiamą daugianario reikšmę, taigi nė vienos nuliui lygios reikšmės. Vadinasi, (3) lygtis tikrai neturi sprendinių.

2 pavyzdys. Išspręskime trečiojo laipsnio lygtį

$$x^3+2x^2-x-2=0. \qquad (4)$$

Sprendimas. Kadangi

$$x^3+2x^2-x-2=(x^3+2x^2)-(x+2)=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x^2-1)=(x+2)(x-1)(x+1),$$

tai (4) lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$(x+2)(x-1)(x+1)=0.$$

Iš čia ir gauname, kad (4) lygybė galioja tik vienu iš trijų atveju:

$$x+2=0, \quad x-1=0 \quad \text{ir} \quad x+1=0,$$

taigi, jei $x=-2,\ x=1$ arba $x=-1.$

Išvada aiški: (4) lygtis turi tris sprendinius – realiuosius skaičius -2; -1; 1.

Ats.: -2; -1; 1.

Kad būtų paprasčiau, daugianarį $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0;\ \ a_n\neq 0,$ pažymėkime $P(x).$ Tada (1) lygtį bus galima užrašyti pavidalu $P(x)=0.$

Apibrėžimas. Sakoma, kad daugianaris $P(x)$ dalijasi iš dvinario $x-a$, jeigu yra toks daugianaris $Q(x)$, kuriam esant galioja lygybė

$$P(x)=(x-a)Q(x). \qquad (5)$$

Pavyzdžiui, trečiojo laipsnio daugianaris $P(x)=x^3+2x^2-x-2$ (žr. 2 pvz.) dalijasi iš trijų dvinarių: $x+2,\ \ x-1$ ir $x+1,$ nes

1) $x^3+2x^2-x-2=(x+2)\cdot((x-1)(x+1))=(x+2)(x^2-1);$ (6)

2) $x^3+2x^2-x-2=(x-1)\cdot((x+2)(x+1))=(x-1)(x^2+3x+2);$ (7)

3) $x^3+2x^2-x-2=(x+1)\cdot((x+2)(x-1))=(x+1)(x^2+x-2).$ (8)

Daugianarį $Q(x)$ visada galima rasti dalijant $P(x)$ iš $x-a$ kampu. O suprasti tokią dalybą visai nesunku ir be išsamaus aprašymo – pakaks pavyzdžių. Dalydami ką tik nagrinėtą daugianarį

$$P(x)=x^3+2x^2-x-2$$

paeiliui iš $x+2,\ \ x-1$ ir $x+1,$ gausime:

$$\begin{array}{l|l}
_\,x^3+2x^2-x-2 & x+2 \\ \cline{2-2}
\ \ x^3+2x^2 & x^2-1 \\ \cline{1-1}
\qquad\quad _\,-x-2 & \\
\qquad\qquad -x-2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
_\,x^3+2x^2-x-2 & x-1 \\ \cline{2-2}
\ \ x^3-\ x^2 & x^2+3x+2 \\ \cline{1-1}
\quad _\,3x^2-x-2 & \\
\quad\ \ 3x^2-3x & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad _\,2x-2 & \\
\qquad\qquad 2x-2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
_\,x^3+2x^2-x-2 & x+1 \\ \cline{2-2}
\ \ x^3+\ x^2 & x^2+x-2 \\ \cline{1-1}
\quad _\,x^2+x-2 & \\
\quad\ \ x^2+x & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad _\,2x-2 & \\
\qquad\qquad 2x-2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Vadinasi,

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2}=x^2-1, \quad \frac{x^3+2x^2-x-2}{x-1}=x^2+3x+2, \quad \frac{x^3+2x^2-x-2}{x+1}=x^2+x-2.$$

Aišku, čia turima mintyje, kad $x\neq -2$ (pirmoje lygybėje), $x\neq 1$ (antroje lygybėje) ir $x\neq -1$ (trečioje lygybėje). Matome, kad $Q(x)$ išraiškos tokios pat kaip (6), (7) ir (8) lygybėse.

O ką gautume dalydami $P(x)=x^3+2x^2-x-2$ iš $x-a$, jei $a\notin\{-2;-1;1\}$? Žinoma, kad turėtų atsirasti nelygi nuliui liekana, nes priešingu atveju skaičius a būtų lygties $P(x)=0$ sprendinys, o jų aibė (šiuo atveju) yra $\{-2;-1;1\}$. Abejonėms išsklaidyti pasirinkime $a=-3$ ir padalykime (kampu) $P(x)$ iš $x+3$:

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{\ }x^3+2x^2-x-2 & \underline{x+3} \\
\underline{x^3-3x^2\quad\ } & x^2-x+2 \\
\quad \underline{\ }-x^2-x-2 & \\
\quad \underline{-x^2-3x} & \\
\qquad \underline{\ }2x-2 & \\
\qquad \underline{2x+6} & \\
\qquad\quad -8 &
\end{array}
$$

Šios dalybos rezultatą galima užrašyti dvejopai:

$$x^3+2x^2-x-2=(x+3)(x^2-x+2)-8 \tag{9}$$

arba

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+3}=x^2-x+2-\frac{8}{x+3};\quad x\neq -3.$$

Įrašę $x=-3$ į (9) lygybę, gautume, kad

$$P(-3)=(-3)^3+2(-3)^2-(-3)-2=-8.$$

Vadinasi, daugianario $P(x)=x^3+2x^2-x-2$ dalybos iš dvinario $x-(-3)=x+3$ liekana (skaičius -8) sutampa su daugianario $P(x)$ reikšme taške $x=-3$, taigi su skaičiumi $P(-3)$.

Bezu teorema (Etienne Bezout (1730-1783) – prancūzų matematikas).

Daugianario

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0,\quad a_n\neq 0,$$

dalybos iš dvinario $x-a$, $a\in\mathbf{R}$, *liekana yra* $P(a)$.

Remiantis šia teorema galima tvirtinti, jog kiekvienam n-tojo laipsnio daugianariui $P(x)$ galima rasti tokį daugianarį $Q(x)$ (jis turi būti $(n-1)$-jo laipsnio), kad galiotų lygybė

$$P(x)=(x-a)Q(x)+P(a). \tag{10}$$

O svarbiausia išvada, išplaukianti iš Bezu teoremos yra šis teiginys:

Realusis skaičius a yra algebrinės lygties $P(x)=0$ *sprendinys tik kai daugianario* $P(x)$ *dalybos iš dvinario* $x-a$ *liekana lygi nuliui.*

Štai, pavyzdžiui, trečiojo laipsnio daugianario – kvadratinio trinario

$$P(x)=13x^2+275x-288$$

reikšmė, kai $x=1$, lygi nuliui, todėl jis dalijasi iš dvinario $x-1$. Dalydami kampu gauname:

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{\ }13x^2+275x-288 & \underline{x-1} \\
\underline{13x^2-13x\qquad\ } & 13x+288 \\
\qquad \underline{\ }288x-288 & \\
\qquad \underline{288x-288} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Vadinasi, $P(x)=13x^2+275x-288=(x-1)(13x+288)$. Todėl kvadratinę lygtį

$$13x^2+275x-288=0$$

galima išspręsti ir taip:

$$13x^2+275x-288=0 \Rightarrow (x-1)(13x+288)=0 \Rightarrow x-1=0 \ \text{ arba } \ 13x+288=0.$$

Iš čia gautume du sprendinius: $x=1$ ir $x=-\dfrac{288}{13}$.

Aišku, kad tuos pačius sprendinius gautume ir taikydami tą metodą, kurį visi gerai mokame taikyti.

Čia pat atkreipkime dėmesį ir į tai, kad pademonstruotą kvadratinės lygties

$$P(x)=0, \quad P(x)=ax^2+bx+c, \quad a\neq 0,$$
sprendimo būdą galima taikyti tik tada, kai pasiseka „pamatyti“ tokią x reikšmę, kuriai esant $P(x)=0$. Kitaip sakant, kai pasiseka atspėti vieną šios lygties sprendinį. Tuo tarpu kvadratinės lygties sprendimas skaičiuojant kvadratinio trinario diskriminantą $D=b^2-4ac$ yra universalus – jį galima taikyti sprendžiant kiekvieną kvadratinę lygtį.

3 pavyzdys. Išspręskime trečiojo laipsnio lygtį
$$5x^3+7x^2+13x+11=0. \tag{11}$$
Sprendimas. Nesunku įsitikinti, kad skaičius -1 yra (11) lygties sprendinys. O tai reiškia, kad daugianaris $P(x)=5x^3+7x^2+13x+11$ dalijasi iš dvinario $x-(-1)=x+1$. Dalydami kampu gauname:
$$\begin{array}{l|l}
-\,5x^3+7x^2+13x+11 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{5x^3+5x^2} & 5x^2+2x+11 \\
\quad -\,2x^2+13x+11 & \\
\quad \underline{2x^2+2x} & \\
\qquad -\,11x+11 & \\
\qquad \underline{11x+11} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$
Dabar (11) lygtį pakeiskime ekvivalenčia lygtimi
$$(x+1)(5x^2+2x+11)=0 \tag{12}$$
ir pamatysime, kad $x=-1$ yra vienintelis jos sprendinys, nes
$$5x^2+2x+11=4x^2+(x^2+2x+1)+10=4x^2+(x+1)^2+10>0,$$
kai x yra bet kuris realusis skaičius.

Taigi (11) lygtis turi vienintelį sprendinį – realųjį skaičių -1.

Ats.: -1.

4 pavyzdys. Išspręskime ketvirtojo laipsnio algebrinę lygtį
$$5x^4-17x^3-6x^2+68x-56=0. \tag{13}$$
Sprendimas. Iš pradžių pabandykime rasti skaičių a (geriau sveikąjį), kuriam esant daugianario
$$P(x)=5x^4-17x^3-6x^2+68x-56$$
reikšmė $P(a)$ lygi nuliui. Tiesiogiai tikrindami, gauname, kad $P(0)\neq 0$, $P(1)\neq 0$, $P(-1)\neq 0$, bet $P(2)=0$, $P(-2)=0$, o toliau vėl nieko.

Taip ir sužinojome, kad (13) lygtis tikrai turi du sprendinius – realiuosius skaičius 2 ir -2. Kitus jos sprendinius (jeigu jų būtų) galima rasti skaidant $P(x)$ dauginamaisiais. Kadangi $P(x)$ dalijasi ir iš dvinario $x-2$, ir iš dvinario $x+2$, tai jis tikrai dalijasi ir iš sandaugos $(x-2)(x+2)=x^2-4$. Dalmens ieškokime dalydami kampu:
$$\begin{array}{l|l}
-\,5x^4-17x^3-6x^2+68x-56 & x^2-4 \\ \cline{2-2}
\underline{5x^4-20x^2} & 5x^2-17x+14 \\
\quad -\,-17x^3+14x^2+68x-56 & \\
\quad \underline{-17x^3+68x} & \\
\qquad -\,14x^2-56 & \\
\qquad \underline{14x^2-56} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$
Vadinasi, $P(x)=(x^2-4)(5x^2-17x+14)$. Todėl (13) lygtis yra ekvivalenti lygčiai
$$(x^2-4)(5x^2-17x+14)=0\,. \tag{14}$$

Du jos sprendinius ($x=2$ ir $x=-2$) jau žinome, o likusius (jeigu jų būtų) nesunku sužinoti išsprendus kvadratinę lygtį

$$5x^2-17x+14=0.$$

Gausime, kad

$$x=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4\cdot5\cdot14}}{10}=\frac{17\pm\sqrt{289-280}}{10}=\frac{17\pm3}{10}.$$

Iš čia $x=1{,}4$ arba $x=2$. Skaičius 2 yra ir lygties $x^2-4=0$ sprendinys.

Taigi (13) lygtis turi tris sprendinius – realiuosius skaičius 2, -2 ir 1,4.

Ats.: 2, -2 ir 1,4.

Atkreipkime dėmesį į daugianario

$$P(x)=5x^4-17x^3-6x^2+68x-56$$

skaidinį dauginamaisiais $x-2$, $x+2$ ir $x-1{,}4$. Jis yra toks:

$$P(x)=5(x-2)^2\cdot(x+2)\cdot(x-1{,}4),$$

nes $P(x)=(x^2-4)(5x^2-17x+14)=(x-2)(x+2)\cdot5(x-2)(x-1{,}4).$

Kad ir trumpam, bet vis tiek sustokime prie daugianario $P(x)$ skaidymo dalijant $P(x)$ iš dvinario $x-a$, nes gebėjimas išskaidyti $P(x)$ dauginamaisiais labai palengvina lygties $P(x)=0$ sprendimą. Štai antrame pavyzdyje gavome, kad

$$P(x)=x^3+2x^2-x-2=(x+2(x-1)(x+1), \tag{14}$$

trečiame

$$P(x)=5x^3+7x^2+13x+11=(x+1)(5x^2+2x+11), \tag{15}$$

o ketvirtame pavyzdyje

$$P(x)=5x^4-17x^3-6x^2+68x-56=5(x-2)^2(x+2)(x-1{,}4). \tag{16}$$

Matome, kad (15) skaidinyje yra kvadratinis trinaris $5x^2+2x+11,$ nors (pagal Vijeto teoremą) jį būtų galima užrašyti sandauga $5(x-x_1)(x-x_{2)}.$ Bet tai neįmanoma, nes nėra tokių realiųjų skaičių x_1 ir x_2, kad būtų $P(x_1)=0$ ir $P(x_2)=0$ (žr. 3 pvz.).

Išsprendę daugiau algebrinių lygčių $P(x)=0,$ galėtume ir patys (atidžiai įsižiūrėdami) pamatyti labai svarbių daugianario $P(x)$ savybių. O viena daugianario

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0,\ \ a_n\neq0,$$

savybė yra tokia:

Jeigu daugianario $P(x)$ koeficientai yra sveikieji skaičiai ir $a_n=1,$ tai realusis skaičius a, kuriam esant galioja lygybė $P(a)=0,$ gali būti tik sveikasis skaičius ir (be to) laisvojo nario a_0 daliklis.

5 pavyzdys. Išskaidykime dauginamaisiais šiuos daugianarius:

a) $P(x)=x^3-7x^2+7x+15;$

b) $P(x)=x^4-3x^3-6x^2+28x-24;$

c) $P(x)=x^4+3x^3-31x^2-31x-70.$

Sprendimas. a) Laisvasis narys yra 15. Jo dalikliai yra $\pm1,\pm3,\pm5$ ir ±15. Tik tarp šių aštuonių skaičių tikslinga ieškoti tokio *a*, kad būtų $P(a)=0.$

Iš pradžių pakanka vieno tokio skaičiaus, pavyzdžiui, $a=-1.$ Padaliję $P(x)$ iš $x-a=x+1,$ gauname, kad

$$P(x)=(x+1)(x^2-8x+15).$$

O kvadratinio trinario $x^2-8x+15$ reikšmė lygi nuliui, kai $a=3$ (arba 5). Todėl padaliję jį iš $x-3$ (arba $x-5$), gauname, kad

$$x^2-8x+15=(x-3)(x-5).$$

Vadinasi, $P(x)=x^3-7x^2+7x+15=(x+1)(x-3)(x-5).$

Ats.: $x^3-7x^2+7x+15=(x+1)(x-3)(x-5).$

b) Laisvojo nario -24 dalikliai yra $\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm8; \pm12$ ir $\pm24.$ Tiesiogiai skaičiuodami gauname, kad $P(1)\neq 0,$ $P(-1)\neq 0,$ bet $P(2)=0.$ Todėl galima $P(x)$ padalyti iš dvinario $x-2$ ir toliau tęsti $P(x)$ skaidymą dauginamaisiais nagrinėjant dalmenį

$$Q(x)=x^3-x^2-8x+12,$$

nes $P(x)=(x-2)Q(x)=(x-2)(x^3-x^2-8x+12).$

Daugianario $Q(x)$ laisvojo nario dalikliai yra $\pm1; \pm2; \pm3; \pm4$ ir $\pm12.$ Kadangi $Q(x)=0,$ kai $x=2,$ tai padalijęs $Q(x)$ iš $x-2,$ gauname, kad $Q(x)=(x-2)(x^2+x-6)$ ir $x^2+x-6=(x-2)(x+3).$

Vadinasi,

$P(x)=x^4-3x^3-6x^2+28x-24=(x-2)\cdot(x-2)(x^2+x-6)=(x-2)\cdot(x-2)\cdot(x-2)(x+3)=(x-2)^3(x+3).$

Ats.: $x^4-3x^3-6x^2+28x-24=(x-2)^3(x+3).$

c) Daugianario $P(x)=x^4+3x^3-31x^2-31x-70$ laisvojo nario -70 dalikliai yra

$$\pm1, \pm2, \pm5, \pm7, \pm10, \pm14, \pm35, \pm70.$$

Matome, kad skaičiaus a, kuriam galiotų lygybė $P(a)=0,$ paieška gali būti gana ilga ir reikalaujanti didelio atidumo, bet vistiek tikrinkime. Gauname, kad $P(1)\neq 0,$ $P(-1)\neq 0,$ $P(2)\neq 0,$ $P(-2)\neq 0.$ Bet $P(5)=0$ ir $P(-7)=0.$ Padalijęs $P(x)$ iš dvinarių $(x-5)$ ir $(x+7)$ sandaugos

$$(x-5)(x+7)=x^2+2x-35,$$

gauname, kad

$$P(x)=(x-5)(x+7)(x^2+2x-35).$$

Kadangi $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0,$ kai $x\in\mathbf{R},$ tai tolesnis $P(x)$ skaidymas dvinariais $x-a$ neįmanomas.

Ats.: $x^4+3x^3-31x^2-31x-70=(x-5)(x+7)(x^2+x+2).$

6 pavyzdys. Išspręskime algebrinę lygtį

$$x^6-2x^4-3x^2+6. \qquad (17)$$

Sprendimas. Daugianario $P(x)=x^6-2x^4-3x^2+6$ laisvojo nario dalikliai yra $\pm1, \pm2, \pm3$ ir $\pm6,$ bet nė vienas iš jų nėra (17) lygties sprendinys. Todėl šios lygties sprendimas skaidant $P(x)$ dauginamaisiais yra problemiškas. Būtų neteisinga tvirtinti, kad toks būdas neįmanomas, nes išvada, kad tarp laisvojo nario daliklių nėra nė vieno skaičiaus a, kuris tenkintų sąlygą $P(a)=0,$ tereiškia, kad $P(x)$ skaidinyje dauginamaisiais tikrai negali būti dvinario $x-a.$

Pasirinkę keitinį $t=x^2,$ gauname trečiojo laipsnio lygtį

$$t^3-2t^2-3t+6=0. \qquad (18)$$

Kadangi $t^3-2t^2-3t+6=(t^3-2t^2)-(3t-6)=t^2(t-2)-3(t-2)=(t-2)(t^2-2),$ tai (18) lygtis ekvivalenti lygčiai

$$(t-2)(t^2-2)=0,$$

kurios sprendiniai yra $t_1=2,$ $t_2=-\sqrt{3}$ ir $t_3=\sqrt{3}.$ Bet $t_2=-\sqrt{3}$ netinka, nes turi būti $t\geq 0.$ Taigi $t\in\{2;\sqrt{3}\}.$

O tada iš lygčių $x^2=2$ ir $x^2=\sqrt{3}$ gauname keturis (17) lygties sprendinius: $\pm\sqrt{2}$ ir $\pm\sqrt[4]{3}.$

Ats.: $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt[4]{3}.$

7 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=24\,. \qquad (19)$$

Sprendimas. Jei x būtų sveikasis skaičius, tai kairėje pusėje gautume keturių sveikųjų skaičių (teigiamų arba neigiamų), einančių iš eilės, sandaugą. O kadangi $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, tai (19) lygybė galios, jei $x = 0$ arba $x = 5$.

Taigi turime du (19) lygties sprendinius. Dabar pertvarkykime reiškinį

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - 24.$$

Gausime:

$$P(x) = ((x-1)(x-2)) \cdot ((x-3)(x-4)) - 24 = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12) - 24 =$$
$$= x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 40x = x(x^3 - 10x^2 + 35x - 40).$$

Kadangi $\dfrac{x^3 - 10x^2 + 35x - 40}{x-5} = x^2 - 5x + 8$, tai $P(x) = x(x-5)(x^2 - 5x + 8)$.

Vadinasi, lygtis $P(x) = 0$ (taigi (19)) turi du sprendinius – realiuosius skaičius 0 ir 5, nes

$$x^2 - 5x + 8 = (x - 2{,}5)^2 + 1{,}75 > 0.$$

Kitas sprendimo būdas. Kadangi

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = ((x-1)(x-4))((x-2)(x-3)) = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6),$$

tai pasirinkę $t = x^2 - 5x + 4$ gausime kvadratinę lygtį $t(t+2) = 24$, kurią nesunku išspręsti:

$$t(t+2) = 24 \Rightarrow t^2 + 2t = 24 \Rightarrow (t+1)^2 = 25 \Rightarrow t = -1 \pm 5.$$

Iš čia gauname, kad $t = -6$ arba $t = 4$.

Jei $t = -6$, tai

$$x^2 - 5x + 4 = -6 \Rightarrow x^2 - 5x + 10 = 0,$$

o pastaroji lygtis sprendinių neturi, nes $x^2 - 5x + 10 > 0$.

Jei $t = 4$, tai

$$x^2 - 5x + 4 = 4 \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ arba } x = 5.$$

Gauname tuos pačius du (19) lygties sprendinius.

Ats.: 0; 5.

8 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$(x^2 + 3x + 6)(x^2 + 7x + 16) = 41. \tag{20}$$

Sprendimas. Sudauginę ir atlikę kitus skaičiavimus, gauname ekvivalenčią lygtį

$$x^4 + 10x^3 + 43x^2 + 90x + 55 = 0. \tag{21}$$

Aišku, kad ji neturi nė vieno teigiamo sprendinio. Todėl ieškant a, kad būtų $P(a) = 0$, pakanka tikrinti tik neigiamus laisvojo nario 55 daliklius $-1; -5; -11$ ir -55. Bet nė vienas netenkina sąlygos $P(a) = 0$.

Lygties kairėje pusėje esantį daugianarį $P(x)$ pertvarkykime taip:

$$P(x) = x^4 + 10x^3 + 43x^2 + 90x + 55 = (x^4 + 10x^3 + 25x^2) + (18x^2 + 90x) + 55 =$$
$$= (x^2 + 5x)^2 + 18(x^2 + 5x) + 55.$$

Pažymėję $t = x^2 + 5x$, gauname kvadratinę lygtį

$$t^2 + 18t + 55 = 0.$$

Tada

$$(t+9)^2 - 26 = 0 \Rightarrow t = -9 \pm \sqrt{26}.$$

Jei $t = -9 - \sqrt{26}$, tai

$$x^2 + 5x = -9 - \sqrt{26} \Rightarrow x^2 + 5x + 9 + \sqrt{26} = 0.$$

Bet pastaroji lygtis sprendinių neturi, nes

$$x^2 + 5x + 9 + \sqrt{26} = (x + 2{,}5)^2 + 2{,}75x + \sqrt{26} > 0, \text{ jei } x \in \mathbf{R}.$$

Jei $t = -9 + \sqrt{26}$, tai

$$x^2+5x=-9+\sqrt{26} \Rightarrow x^2+5x+9-\sqrt{26}=0 \Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4(9-\sqrt{26})}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{4\sqrt{26}-11}}{2}.$$

Taigi (21) lygtis turi du sprendinius – realiuosius skaičius $\frac{-5-\sqrt{4\sqrt{26}-11}}{2}$ ir $\frac{-5+\sqrt{4\sqrt{26}-11}}{2}$.

Ats.: $\frac{-5\pm\sqrt{4\sqrt{26}-11}}{2}$.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite lygtį $x^3-19x+30=0$.

2. Išspręskite lygtį $(x+1)(x+2)(x+3)=990$.

3. Išspręskite lygtį $x^3+x^2=36$.

4. Išspręskite lygtį $x^6-x^3=2$.

5. Išspręskite lygtį $x^4=(x+1)^4$.

6. Išspręskite lygtį $(x^2+6x)^2-(x+3)^2=11$.

7. Išspręskite lygtį $(x-6)^4+(x-8)^4=16$.

8. Išspręskite lygtį $x^4-6x^3-21x^2+104x-42=0$.

9. Išspręskite lygtį $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$.

10. Įrodykite, kad lygtis $x^4-x^3+x^2+2x+12=0$ neturi sprendinių.

III. APSKRITIMAI

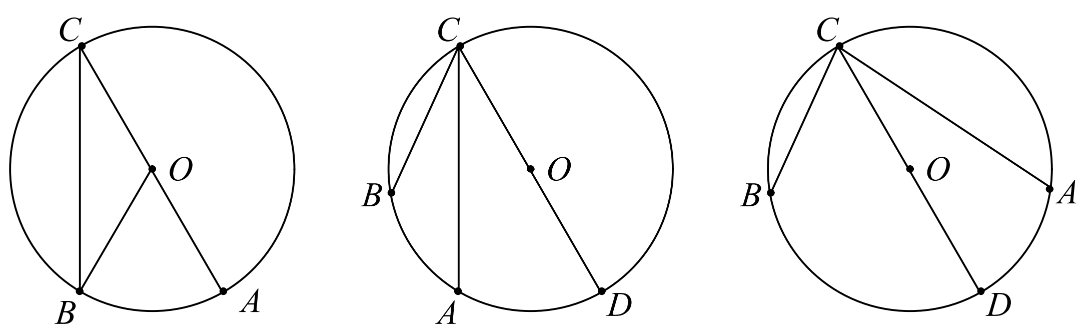
Teorinę medžiagą parengė ir trečiąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

1. Centriniai ir įbrėžtiniai kampai. Kaip žinome, *apskritimas* – tai aibė plokštumos taškų, duotuoju atstumu R nutolusių nuo duotojo plokštumos taško O. Taškas O yra vadinamas apskritimo *centru*, o atkarpa OM, jungianti apskritimo centrą su bet kuriuo to apskritimo tašku M, vadinama apskritimo *spinduliu*. Visi apskritimo spinduliai yra lygūs, jų ilgis lygus R. Atkarpa AB, jungianti du apskritimo taškus, vadinama apskritimo *styga*. Jei apskritimo styga eina per jo centrą, tai ji vadinama apskritimo *skersmeniu*. Apskritimo dalis, esanti tarp dviejų jo taškų A ir B, vadinama apskritimo *lanku*, kurio galai yra taškai A ir B. Du duotieji apskritimo taškai nustato du apskritimo lankus, kurių galai yra tie taškai.

Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo centras, vadinamas *centriniu kampu*. Kampas, kurio viršūnė yra apskritimo taškas, o kraštinės tą apskritimą kerta, vadinamas *įbrėžtiniu kampu*. Jei taškas O yra apskritimo centras, o A ir B – apskritimo taškai, tai centrinio kampo AOB didumas yra lygus lanko AB didumui.

1 teorema. Jei A ir B – du apskritimo taškai, taškas O – jo centras, o taškas C yra apskritimo taškas, esantis toje pačioje tiesės AB pusėje, kaip ir taškas O, tai kampo ACB didumas lygus kampo AOB didumo pusei.

Teoremą pirmiausia įrodysime, kai atkarpa AC – apskritimo skersmuo (1 pav.). Kadangi trikampis COB yra lygiašonis, tai $\angle OBC = \angle OCB$. Kampas AOB yra trikampio OBC priekampis, todėl $\angle AOB = \angle OBC + \angle OCB = 2\angle OCB = 2\angle ACB$. Kai atkarpa AC nėra apskritimo skersmuo, tai brėžiame skersmenį CD. Tuomet $\angle ACB = \angle DCB - \angle DCA$ (2a pav.), arba $\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB$ (2b pav.). Abiem atvejais teoremos tvirtinimas seka iš šių lygybių ir ką tik įrodyto fakto.



1 pav. 2a pav. 2b pav.

Iš įrodytos teoremos išplaukia tokių teiginių teisingumas:

1 išvada. Visiems apskritimo taškams M, esantiems vienoje stygos AB pusėje, kampai AMB yra lygūs.

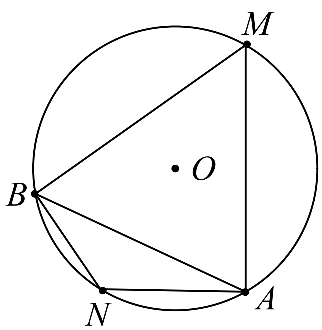
2 išvada. Jei AB ir CD – dvi lygios apskritimo stygos, o apskritimo taškas M yra toje pačioje tiesės AB pusėje, taškas N yra toje pačioje tiesės CD pusėje kaip ir apskritimo centras, arba abu yra skirtingose pusėse, nei apskritimo centras, tai kampai AMB ir CND yra lygūs.

3 išvada. Jei atkarpa AB yra apskritimo skersmuo, tai bet kuriam apskritimo taškui C kampas ACB yra statusis.

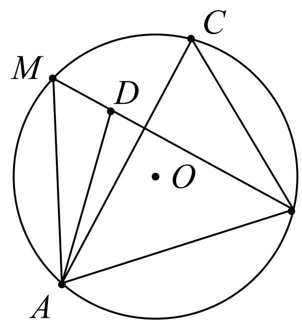
4 išvada. Jei apskritimo taškai M ir N yra skirtingose tiesės, kurioje yra apskritimo styga AB, pusėse (3 pav.), tai $\angle AMB + \angle ANB = 180^0$.

5 išvada. Jei apskritimo lankai AB ir CD yra lygūs, tai stygos AB ir CD irgi yra lygios.

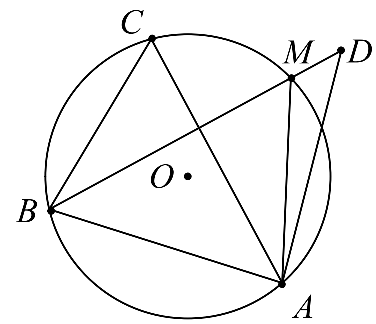
2 teorema. Jei du taškai C ir D yra vienoje tiesės AB pusėje ir $\angle ACB = \angle ADB$, tai taškai A, B, C, D yra viename apskritime.



3 pav.



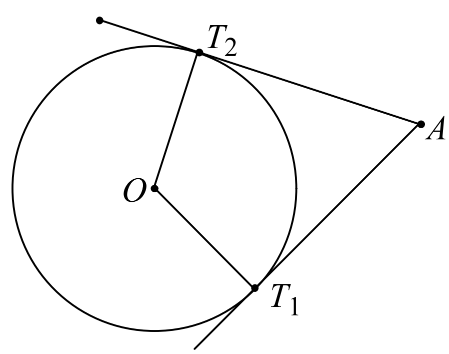
4a pav.



4b pav.

Teoremą įrodysime prieštaros būdu. Apie trikampį ABC apibrėžkime apskritimą, tuomet taškas D gali būti šio apskritimo viduje (4a pav.), šio apskritimo išorėje (4b pav.) arba priklausyti šiam apskritimui. Pirmuoju ir antruoju atvejais sakykime, kad tiesė BD taške M kerta šio apskritimo lanką AB, esantį toje pačioje tiesės AB pusėje, kaip ir taškas C. Iš 1 išvados gauname, kad $\angle AMB = \angle ACB$. Pirmuoju atveju, kai taškas D yra apskritimo viduje, kampas ADB yra trikampio DMA priekampis, todėl $\angle ADB > \angle AMB$, taigi $\angle ADB > \angle ACB$. Antruoju atveju kampas AMB yra trikampio AMD priekampis, todėl $\angle AMB > \angle ADB$, taigi $\angle ADB < \angle ACB$. Abiem atvejais gavome $\angle ADB \neq \angle ACB$, ši prieštara įrodo, kad taškas D negali būti nei apskritimo viduje, nei išorėje, taigi jis yra apskritimo taškas.

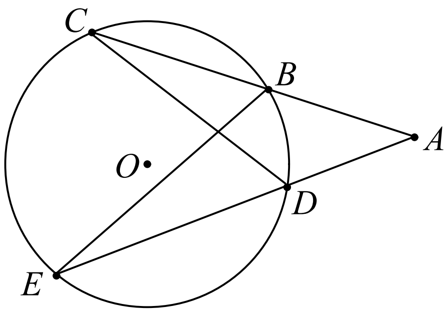
2. Apskritimų liestinės ir kirstinės. Tiesė, turinti su apskritimu du bendrus taškus, vadinama apskritimo *kirstine*, o tiesė, turinti su apskritimu vieną bendrą tašką, vadinama apskritimo *liestine*. Apskritimo liestinė yra statmena tiesei, jungiančiai apskritimo centrą O su lietimosi tašku. Atvirkščiai, jei taškas A yra bendras tiesės l ir apskritimo taškas, o spindulys OA yra statmenas tiesei l, tai ši tiesė yra apskritimo liestinė, liečianti jį taške A. Per kiekvieną apskritimo tašką yra nubrėžiame vienintelė jo liestinė. Jei taškas A yra apskritimo išorėje, tai per jį nubrėžiamos dvi apskritimo liestinės, liečiančios jį taškuose T_1 ir T_2 (5 pav.) ir $AT_1 = AT_2$.



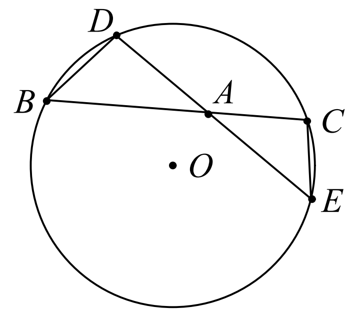
5 pav.

3 teorema. Jei iš taško A yra nubrėžtos dvi apskritimo kirstinės, kertančios apskritimą atitinkamai taškuose B, C ir D, E, tai $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

Teoremos įrodymas, kai taškas A yra apskritimo išorėje (6a pav.), išplaukia iš įbrėžtinių kampų BCD ir BED lygumo, iš čia sekančio trikampių ABE ir ADC panašumo ir iš šio panašumo išplaukiančios lygybės $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$. Analogiškai teorema įrodoma ir kai taškas A yra apskritimo viduje (6b pav.).

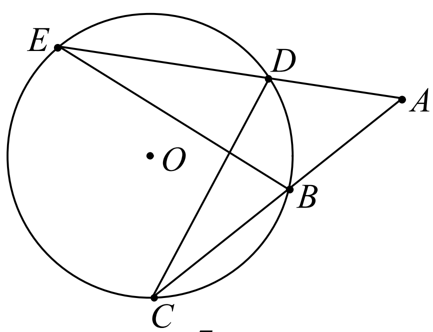


6a pav.

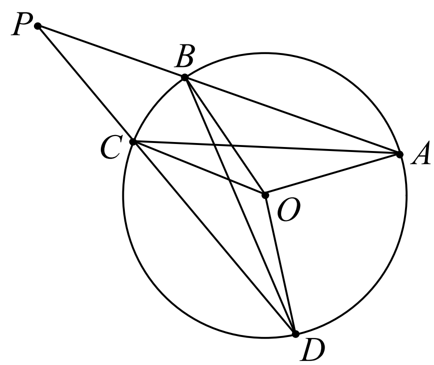


6b pav.

Teisingas ir atvirkščias teiginys: jei tiesė, einanti per taškus B, C ir tiesė, einanti per taškus $D, E,$ susikerta tsaške A ir yra teisinga lygybė $AB \cdot AC = AD \cdot AE$, tai taškai B, C, D, E yra viename apskritime (7 pav.). Įrodymui duotąją lygybę perrašome $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$. Kadangi trikampių ABE ir ADC kampas A yra bendras, tai iš šios lygybės seka, kad šie trikampiai yra panašieji, todėl $\angle ACD = \angle AEB,$ tuomet iš 2 teoremos gauname, kad taškai B, C, D, E yra viename apskritime.



7 pav.



8 pav.

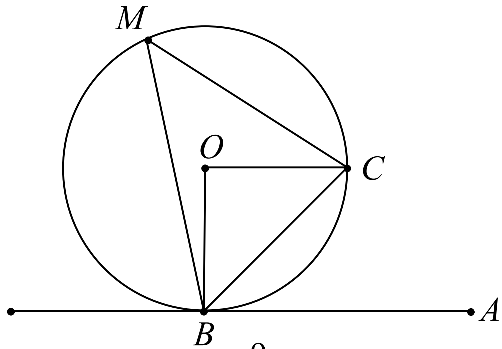
1 pavyzdys. Apskritimo kirstinės AB ir CD susikerta taške $P,$ esančiame apskritimo išorėje, apskritimo centrinis kampas, kuris remiasi į lanką $AD,$ lygus $\alpha,$ o centrinis kampas, besiremiantis į lanką BC lygus $\beta.$ Rasime atkarpos PD ilgį ir kampo APD didumą, jei $AB = 3, BP = 2, PC = \frac{5}{2}$ (8 pav.).

Sprendimas. Sakykime, kad taškas O yra duotojo apdskritimo centras. Taikydami 3 teoremą gauname lygybę $PD \cdot PC = PB \cdot PA$. Kadangi $PA = PB + AB = 2 + 3 = 5,$ tai $PD = \frac{PB \cdot PA}{PC} = \frac{2 \cdot 5}{2{,}5} = 4.$ Iš trikampio BPD taikydami 1 teoremą turime $\angle APD = \angle BPD = 180^0 - \angle PBD - \angle PDB = (180^0 - \angle PBD) - \angle CDB = \angle ABD - \angle CDB = \frac{1}{2}\angle AOD - \frac{1}{2}\angle COB = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{\alpha - \beta}{2}.$

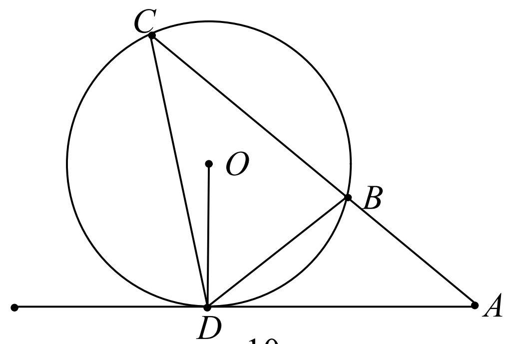
4 teorema. Jei tiesė AB taške B liečia apskritimą, o atkarpa BC yra apskritimo styga, tai bet kuriam apskritimo taškui M, esančiam kitoje tiesės BC pusėje nei taškas A, yra teisinga lygybė $\angle BMC = \angle ABC$ (9 pav.).

Tikrai, kadangi apskritimo spindulys OB yra statmenas tiesei $AB,$ tai $\angle ABC = 90^0 - \angle OBC = 90^0 - \frac{1}{2}(180^0 - \angle BOC) = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BMC.$

Teisingas ir atvirkštinis teiginys: jei taškas B yra bendras apskritimo ir tiesės AB taškas, atkarpa BC yra apskritimo styga, o bet kuriam apskritimo taškui M, esančiam kitoje tiesės BC pusėje, nei taškas A, yra teisinga lygybė $\angle BMC = \angle ABC$, tai tiesė AB yra apskritimo liestinė, liečianti jį taške B (9 pav.). Tikrai $\angle ABO = \angle ABC + \angle OBC = \angle BMC + \frac{1}{2}(180^0 - \angle BOC) = \frac{1}{2}\angle BOC + \frac{1}{2}(180^0 - \angle BOC) = 90^0$, o tai ir reiškia, kad tiesė AB yra apskritimo liestinė.



9 pav.



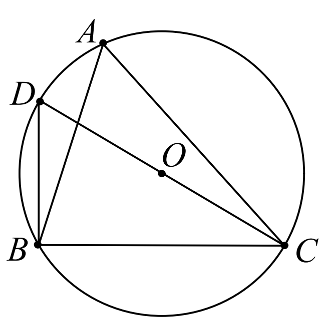
10 pav.

5 teorema. Jei iš taško A nubrėžta apskritimo liestinė liečia jį taške D, o iš to paties taško nubrėžta kirstinė kerta apskritimą taškuose B ir C, tai $AD^2 = AB \cdot AC$ (10 pav.).

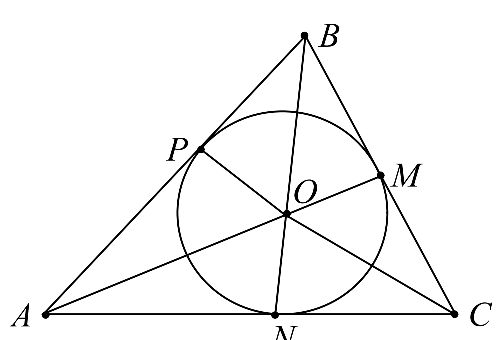
Iš tikrųjų iš 4 teoremos išplaukia, kad $\angle ADB = \angle BCD = \angle ACD$, todėl trikampiai ACD ir ADB yra panašieji. Iš jų panašumo seka lygybė $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AB}$, iš kurios gauname įrodomąją lygybę.

Atvirkščiai, jei taškai A, B, C yra vienoje tiesėje, taškas D tai tiesei nepriklauso ir yra teisinga lygybė $AD^2 = AB \cdot AC$, tai tiesė AD liečia per taškus B, C, D einantį apskritimą taške D. Iš tikrųjų duotoji lygybė perrašoma $\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AD}$. Kadangi trikampių ACD ir ADB kampas A yra bendras, o jį sudarančios kraštinės proporcingos, tai šie trikampiai yra panašieji. Todėl $\angle ACD = \angle ADB$, o tuomet iš 4 teoremos išplaukia, kad tiesė AD taške taške D liečia per taškus B, C, D einantį apskritimą.

3. Įbrėžtieji ir apibrėžtieji apskritimai. Jei trikampio ABC visos viršūnės yra apskritimo taškai, tai apskritimas vadinamas apie trikampį ABC *apibrėžtuoju apskritimu*, o trikampis ABC vadinamas *įbrėžtuoju* į apskritimą. Kaip žinome, apie kiekvieną trikampį yra apibrėžiamas vienintelis apskritimas, kurio centras yra trikampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas. Apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulio ilgį R su trikampio kraštinėmis ir trikampio kampų sinusais sieja sinusų teorema $\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{AC}{sun\,\angle B} = \frac{BC}{\sin\angle A} = 2R$ (11 pav.). Kadangi trikampio ABC plotui S teisinga lygybė



11 pav.



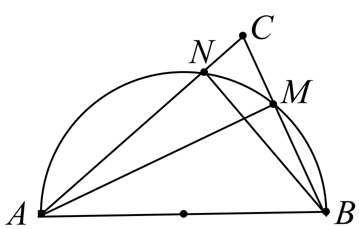
12 pav.

$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A$, tai įrašę iš sinusų teoremos $\sin \angle A = \frac{BC}{2R}$, gauname tokią trikampio ploto formulę $S = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R}$.

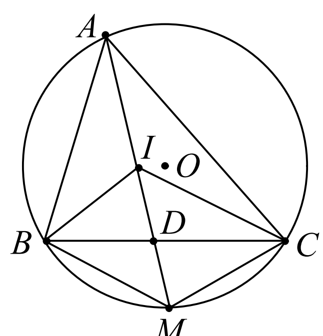
Apskritimas, kuris liečia visas trikampio ABC kraštines, yra vadinamas *įbrėžtuoju* į trikampį ABC, o trikampis ABC vadinamas *apibrėžtuoju* apie apskritimą. Į kiekvieną trikampį yra įbrėžiamas vienintelis apskritimas, kurio centras yra trikampio pusiaukampinių sankirtos taškas. Sakykime, kad į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas kraštines BC, CA, AB liečia atitinkamai taškuose M, N, P (12 pav.). Kaip įprasta žymėkime $a = BC,\ b = AC,\ c = AB,\ 2p = a + b + c$. Jei $AP = AN = x$, $BP = BM = y,\ CM = CZ = z$, tai $x + y = c,\ y + z = a,\ z + x = b,\ 2x + 2y + 2z = 2p$. Iš šių lygybių randame $x = p - a,\ y = p - b,\ z = p - c$. Jei taškas O yra į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras (12 pav.), tai trikampių $AOB,\ BOC$ ir AOC aukštinės OP, OM ir ON lygios įbrėžto į trikampį apskritimo spinduliui r, todėl tų trikampių plotai atitinkamai lygūs $\frac{1}{2}cr,\ \frac{1}{2}ar,\ \frac{1}{2}br$. Tuomet trikampio ABC plotas $S = \frac{1}{2}(a + b + c)r$, taigi $S = pr$.

2 pavyzdys. Lygiašonio trikampio $ABC, AB = AC,\ \angle A = 40^0$. Šoninė kraštinė AB yra pusapskritimio skersmuo. Kitos dvi trikampio kraštinės dalija pusapskritimį į tris lankus (13 pav.). Rasime šių lankų didumus.

Sprendimas. Lygiašonio trikampio kampai prie pagrindo lygūs $\angle B = \angle C = \frac{1}{2}(180^0 - \angle A) = 70^0$. Sakykime, kad tiesės AC ir ir BC kerta pusapskritimį atitinkamai taškuose N ir M. Kadangi atkarpa AB yra apskritimo skersmuo, tai $\angle ANB = 90^0 > \angle ACB$, taigi taškas C yra apskritimo išorėje (2 teorema). Kadangi lankas AB lygus 180^0, o pagal įbrėžtinių kampų savybę (1 teorema) lanko ANM didumas lygus $2\angle ABM = 2\angle ABC = 140^0$, tai lanko MB didumas lygus $180^0 - 140^0 = 40^0$, o $\angle MAB = 20^0$. Iš stačiojo trikampio BNC randame, kad $\angle CBN = \angle CNB - \angle ACB = 90^0 - 70^0 = 20^0$, todėl lanko NM didumas lygus 40^0. Iš čia seka, kad lanko AN didumas $180^0 - 40^0 - 40^0 = 100^0$.



13 pav.

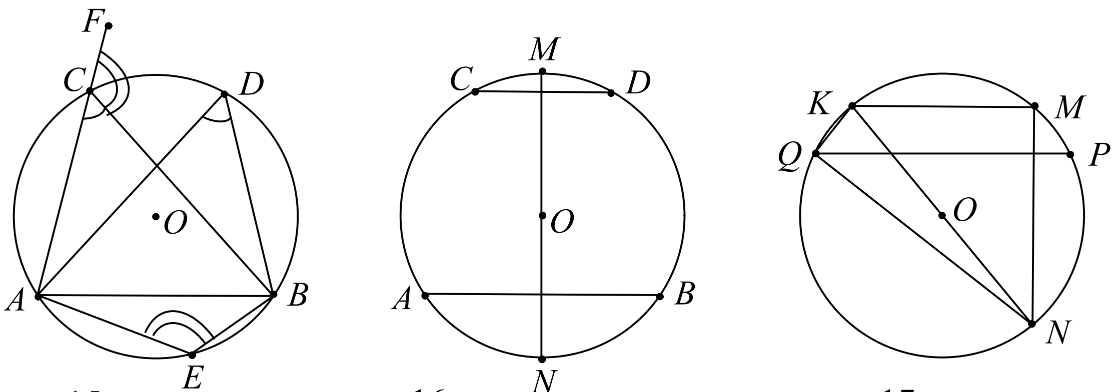


14 pav.

3 pavyzdys. Sakykime, kad taškas I yra įbrėžto į trikampį ABC apskritimo centras (14 pav.), kampo A pusiaukampinė kerta kraštinę BC taške D, o apibrėžtą apie trikampį ABC apskritimą – taškuose A ir M. Įrodysime, kad a) $\angle BIC = 90^0 + \frac{1}{2}\angle A$, b) $MB = MC = MI$, c) $MD \cdot MA = MB^2$.

Sprendimas. Kadangi atkarpos AI, BI, CI yra trikampio kampų pusiaukampinės, tai iš trikampio BIC turime, kad $\angle BIC = 180^0 - \angle IBC - \angle ICB = 180^0 - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C = 180^0 - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 180^0 - \frac{1}{2}(180^0 - \angle A) = 90^0 + \frac{1}{2}\angle A$, taigi a) dalis įrodyta. Įrodydami b) dalį pastebėkime, kad įbrėžtiniai kampai MBC ir MAC lygūs, nes jie remiasi į tą patį lanką BC. Todėl $\angle IBM = \angle IBC + \angle CBM = \angle IBC + \angle CAM = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle A$. Kadangi kampas BIM yra trikampio AIB priekampis, tai $\angle BIM = \angle IAB + \angle IBA = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B$. Kadangi $\angle IBM = \angle BIM$, tai trikampis BIM lygiašonis, $MB = MI$. Kad $MB = MC$ išplaukia iš to, kad taškas M yra lanko BC vidurio taškas. Kadangi $\angle DAB = \angle MBC$, tai pagal 4 teoremą tiesė MB yra apie trikampį ABD apibrėžto apskritimo liestinė, todėl pagal 5 teoremą teisinga lygybė $MB^2 = MA \cdot MD$, taigi įrodyta ir c) dalis.

4. **Keturi taškai viename apskritime**. Kaip seka iš 1 teoremos 1 išvados, jei taškai C ir D yra vienoje tiesės AB pusėje ir $\angle ACB = \angle ADB$, tai taškai A, B, C, D yra viename apskritime. Jei taškas E yra kitoje tiesės AB pusėje nei taškai C ir D, o $\angle ACB + \angle AEB = 180^0$, tai taškai A, B, C, E yra viename apskritime (15 pav.). Jei taškas F yra atkarpos AC tęsinyje už taško C ir $\angle FCB = \angle AEB$, tai taškai A, B, C, E yra viename apskritime. Šio fakto įrodymas seka iš lygybės $\angle FCB + \angle ACB = 180^0$, todėl $\angle ACB + \angle AEB = 180^0$, taigi taškai A, B, C, E yra viename apskritime.



15 pav. 16 pav. 17 pav.

6 teorema. Jei apskritimo stygos AB ir CD lygiagrečios, tai lankai AC ir BD yra lygūs.

Teoremos įrodymui užtenka nubrėžti skersmenį MN, statmeną duotosioms stygoms (16 pav.), ir pastebėti, kad apskritimo lankai AC ir BD yra simetriški tiesės MN atžvilgiu.

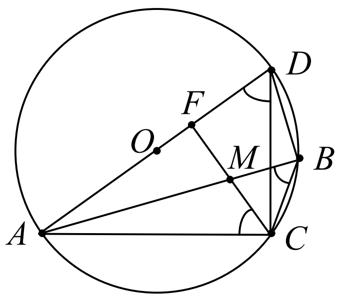
4 pavyzdys. Atkarpos MN ir PQ yra statmenos apskritimo stygos. Rasime atkarpos MP ilgį, jei $NQ = a$, o apskritimo spindulio ilgis lygus R.

Sprendimas. Per tašką M nubrėžkime stygą MK lygiagrečią su styga PQ (17 pav.). Kadangi stygos MN ir PQ yra statmenos, tai $\angle KMN = 90^0$, todėl atkarpa NK yra apskritimo dskersmuo. Iš čia seka, kad $\angle KQN = 90^0$, todėl iš stačiojo trikampio NKQ turime $KQ = \sqrt{NK^2 - NQ^2} = \sqrt{(2R)^2 - a^2}$. Kadangi stygos PQ ir MK yra lygiagrečios, tai pagal 6 teoremą lankai MP ir KQ yra lygūs, taigi lygios ir juos atitinkančios stygos. Taigi $MP = KQ = \sqrt{4R^2 - a^2}$.

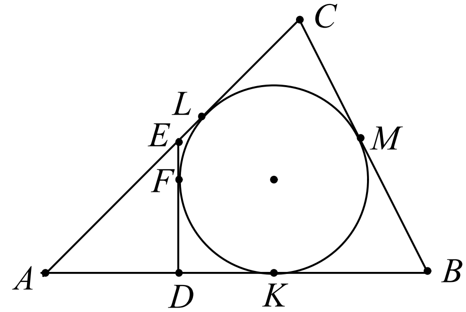
Dažnai uždavinio sąlygoje nėra nurodytas koks nors apskritimas, bet kartais pavyksta rasti keturis taškus, esančius viename apskritime. Tai paprastai palengvina uždavinio sprendimą.

5 pavyzdys. Trikampio ABC kampas C yra bukasis, iš taško C iškeltas statmuo tiesei AC, iš taško B iškeltas statmuo tiesei AB, šie abu statmenys susikerta taške D. Iš viršūnės C nubrėžta trikampio ADC aukštinė CF kerta kraštinę AB taške M (18 pav.). Rasime kraštinės AC ilgį, jei $AM = a, MB = b$.

Sprendimas. Kadangi $\angle ACD = \angle ABD = 90^0$, o taškai B ir C yra vienoje tiesės AD pusėje, tai taškai A, C, B, D yra apskritime, kurio skersmuo yra atkarpa AD. Tuomet $\angle ABC = \angle ADC = 90^0 - \angle FCD = \angle FCA = \angle MCA$. Trikampių ACM ir ABC kampas BAC yra bendras, o ką tik įrodėme, kad kampai MCA ir ABC yra lygūs, todėl šie trikampiai yra panašieji. Iš jų panašumo išplaukia, kad $\frac{AC}{AB} = \frac{AM}{AC}$, todėl $AC^2 = AB \cdot AM = (a+b)a$.



18 pav.



19 pav.

6 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 10$, $AC = 12$, $BC = 6$. Į trikampį įbrėžtas apskritimas, šio apskritimo liestinė kerta kraštines AB ir AC taškuose D ir E. Rasime trikampio ADE perimetrą (19 pav.).

Sprendimas. Sakykime, kad įbrėžtas į trikampį ABC apskritimas trikampio kraštines AB, AC, BC liečia atitinkamai taškuose K, L, M, o šio apskritimo liestinė jį liečia taške F. Tuomet trikampio ADE perimetras $P = AD + DE + AE = AD + DF + FE + AE$. Pagal iš vieno taško nubrėžtų apskritimo liestinių savybes ir 3 skyrelyje gautas lygybes $DF = DK$, $EF = EL$, $AD + DF = AD + DK = AK$, $AE + EF = AE + EL = AL$, $AK = AL = p - BC$, čia p – trikampio ABC pusperimetris. Taigi $P = AD + DE + AE = (AD + DF) + (FE + AE) = (AD + DK) + (AE + EL) = AK + AL = 2(p - BC) = 2 \cdot (\frac{1}{2}(6 + 10 + 12) - 6) = 16$.

Kaip matome iš šio pavyzdžio sprendimo trikampio ADE perimetras nepriklauso nuo taško F, esančio įbrėžto apskritimo lanke KL, parinkimo.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Apskritimo stygos AC ir BD susikerta apskritimo viduje esančiame taške P, $AP = 6$, $PC = 1, BD = 5$, $DP > PB$, centrinis kampas, besiremiantis į lanką AD, kuriame nėra taškų B ir D, lygus α, o centrinis kampas, besiremiantis į lanką BC, kuriame nėra taškų A ir D, lygus β. Raskite atkarpų PD ir PB ilgius ir kampo APD didumą.

2. Du apskritimai kertasi taškuose A ir B. Tiesėje AB yra taškas P, esantis šių apskritimų išorėje ir $PA > PB$. Per jį nubrėžtos abejų apskritimų kirstinės: viena jų kerta vieną apskritimą taškuose C ir D, $PC > PD$, o kita kerta kitą apskritimą taškuose E ir F, $PE > PF$. Raskite kampą CEF, jei $\angle PDF = \alpha$.

3. Iš taško B nubrėžtos apskritimo liestinės, kurios liečis apskritimą taškuose D ir E. Atkarpoje BD yra yaškas A toks, kad $AB = 13$. Apskritimas, einantis per taškus A, E, D, kerta atkarpą BE taške C, be to, $AC = 1$. Raskite trikampio ABC plotą.

4. Per apskritimo išorėje esantį tašką S nubrėžtos dvi apskritimo kirstinės, viena jų kerta apskrinimą taškuose A ir B, $SA < SB$, kita kirstinė apskritimą kerta taškuose C ir D, $SC < SD$. Gautųjų apskritimo lankų santykis $AC : CD : DB : BA = 2 : 3 : 5 : 8$. Raskite kampo ASC didumą.

5. Per apskritimo išorėje esantį tašką E nubrėžtos dvi apskritimo kirstinės, viena jų kerta apskrinimą taškuose A ir B, $EA > EB$, kita kirstinė apskritimą kerta taškuose C ir D, $EC < ED$. Kampas BEC lygus 60^0, kampas ABD yra tris kartus didesnis už kampą BAC. Įrodykite, kad atkarpa AD yra apskritimo skersmuo.

6. Taškas I yra į trikampį ABC įbtrėžto apskritimo centras, atkarpa atkarpa AD yra kampo A pusiaukampinė, tiesė AD kerta apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo lanką taške M, $AD = 9$, $DM = 3$. Raskite atkarpos AI ilgį.

7. Taškas I yra į statųjį trikampį $ABC, (\angle C = 90^0)$ įbrėžto apskritimo centras, atkarpa CE yra trikampio ABC pusiaukampinė ir yra teisinga lygybė $CI : IE = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Raskite trikampio ABC smailiųjų kampų didumus.

8. Apskritimo susikertančios stygos AB ir CD yra statmenos, $AD = m$, $BC = n$. Raskite apskritimo spindulio ilgį.

9. Stačiojo trikampio KLN, $\angle L = 90^0$, taškas P yra aukštinėje LH, iš taško N nuleistas statmuo NM į tiesę KP. Raskite kraštinės KL ilgį, jei $KP = a$, $PM = b$.

10. Smailiojo kampo MAN viduje yra nubrėžtas apskritimas, liečiantis spindulius AM ir AN taškuose B ir C, apskritimo spindulys lygus 5, atkarpos BC ilgis lygus 8. Mažesniame apskritimo lanke BC yra taškas D, per tašką D nubrėžta apskritimo liestinė, kertanti atkarpas AB ir AC atitinkamai taškuose F ir E. Raskite trikampio AFE perimetrą.

IV. RACIONALIOSIOS IR IRACIONALIOSIOS NELYGYBĖS

Teorinę medžiagą parengė bei ketvirtąją užduotį sudarė dr. (HP) Eugenijus Stankus

Dažnai sprendžiant matematikos, fizikos, chemijos, ekonomikos bei kitų mokslo šakų uždavinius gaunamas atsakymas išraiška, kuri sudaryta iš raidžių ir skaičių. Tuomet įrašant vietoje raidžių (jas galime vadinti *kintamaisiais*) jų reikšmes apskaičiuojama skaitinė atsakymo reikšmė. Tokias išraiškas, vadinamas *reiškiniais*, ypač patogu naudoti atliekant įvairius tyrimus.

Reiškiniai, sudaryti iš skaičių ir kintamųjų naudojant sudėties, atimties, daugybos, dalybos bei kėlimo racionaliuoju laipsniu veiksmus, vadinami *algebriniais reiškiniais*. Jeigu su kintamaisiais atliekami tik sudėties, atimties ir daugybos (įskaitant kėlimą natūraliuoju laipsniu) veiksmai, tai toks reiškinys vadinamas *sveikuoju reiškiniu*. Jei algebriniame reiškinyje naudojami tik sudėties, atimties, daugybos ir dalybos veiksmai nors kartą dalijant iš reiškinio su kintamuoju, tai turime *trupmeninį reiškinį*. Sveikieji ir trupmeniniai reiškiniai vadinami *racionaliaisiais reiškiniais*.

Jeigu algebriniame reiškinyje traukiamos šaknys iš kintamųjų ar iš reiškinių su kintamaisiais arba jie keliami racionaliaisiais laipsniais, tai jis vadinamas *iracionaliuoju reiškiniu*.

1 *pavyzdys*. Algebrinių reiškinių pavyzdžiai:

ax^2+bx+c, $\dfrac{3a^5}{\sqrt[4]{2}}+2ab+\dfrac{5}{6}$, $\sqrt{3}y^2x+5z-\dfrac{2}{3}(x^2+y^3)$ – sveikieji; $\dfrac{3x^2-5x+4}{2x-5}+4x$, $\dfrac{(a-b)^5}{a^2+b^2}-3ab$ – trupmeniniai; $\sqrt{3x^2+2x-1}$, $\dfrac{y^5+6y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt[3]{xy}$, $(2x+3)^{\frac{2}{3}}+3\sqrt{x+5}-4x$ – iracionalieji reiškiniai.

Užrašydami kokį nors reiškinį svarbu žinoti su kokiomis kintamųjų reikšmėmis jis turi prasmę (yra apibrėžtas). Jeigu algebrinis reiškinys gautas sprendžiant konkretų uždavinį, tai pati uždavinio sąlyga nusako su kokiomis kintamųjų reikšmėmis jį prasminga nagrinėti. Pavyzdžiui, stačiakampio gretasienio tūrio formulėje $V=a\cdot b\cdot c$ kintamieji gali būti tik teigiami skaičiai – iš vienos viršūnės išeinančių briaunų ilgiai. Jei reiškinys nesusietas su konkrečiu uždaviniu, tai jo *apibrėžimo sritimi* laikoma aibė tokių kintamųjų reikšmių, kurias įrašius į reiškinį, visi reiškinio veiksmai turės prasmę. Pavyzdžiui, reiškinio $\dfrac{x}{\sqrt{5-x}}$ apibrėžimo sritis yra intervalas $(-\infty;5)$.

Kai norima nustatyti su kuriomis kintamojo reikšmėmis vienas reiškinys įgyja mažesnes arba didesnes reikšmes negu kitas reiškinys, sprendžiama nelygybė. Šioje užduotyje nagrinėsime tik nelygybes su vienu kintamuoju. Kintamąjį, kurio reikšmių ieškome, vadinsime *nežinomuoju*. Taigi nelygybės gali būti tokios: $A(x)<B(x)$, $A(x)>B(x)$, $A(x)\le B(x)$, $A(x)\ge B(x)$; čia $A(x)$ ir $B(x)$ yra vieno kintamojo x algebriniai reiškiniai (kartais vienas iš šių reiškinių gali būti skaičius). Jeigu abu šie reiškiniai racionalieji, tai nelygybė – *racionalioji*, jeigu bent vienas iš šių reiškinių iracionalusis, tai turime *iracionaliąją* nelygybę.

Nelygybės apibrėžimo sritimi vadinama kintamojo reikšmių, su kuriomis visi nelygybės reiškiniai turi prasmę, aibė. *Nelygybės sprendiniu* vadinama nežinomojo reikšmė, su kuria nelygybė tampa teisinga skaitine nelygybe. *Išspręsti nelygybę* reiškia surasti visų jos sprendinių aibę, kuri gali būti ir tuščia.

Kaip nelygybės sprendžiamos? Nelygybės pertvarkomos keičiant jas paprastesnėmis, kurių sprendiniai jau nesunkiai surandami. Jei dviejų nelygybių sprendinių aibės tokios pat, tai jos vadinamos *ekvivalenčiomis* (nelygybių ekvivalentumui pažymėti naudosime dvipusę rodyklę $\Leftrightarrow$). Pertvarkydami nelygybę gausime ekvivalenčią jai nelygybę, jeigu: prie abiejų nelygybės pusių pridėsime po tą patį skaičių; abi nelygybės puses padauginsime iš to paties teigiamo skaičiaus arba iš reiškinio, apibrėžto visoje realiųjų skaičių aibėje ir įgyjančio tik teigiamas reikšmes; abi nelygybės puses padauginsime iš to paties neigiamo skaičiaus arba iš reiškinio, apibrėžto visoje realiųjų skaičių aibėje ir įgyjančio tik neigiamas reikšmes, ir pakeisime nelygybės ženklą priešingu.

Panagrinėsime mokyklinės matematikos kurse dažniausiai sutinkamas nelygybes bei jų sprendimo būdus.

Racionaliosios nelygybės.

Tiesinės nelygybės. Paprasčiausios racionaliosios nelygybės yra tiesinės nelygybės – jų reiškinių aukščiausias nežinomojo laipsnis yra pirmas. Po ekvivalenčių pertvarkymų tokios nelygybės paprastai suvedamos iki pavidalo $ax > b$ arba $ax < b,$ arba $ax \geq b$, arba $ax \leq b$, kurių sprendiniai lengvai surandami. Čia *a* ir *b* – realieji skaičiai, $a \neq 0$.

1 *pavyzdys*. Išspręskime nelygybę $2x - 3 > x - \frac{1}{3}(2 - x)$.

Sprendimas. $2x - 3 > x - \frac{1}{3}(2 - x) \;\Leftrightarrow 6x - 9 > 3x - 2 + x \;\Leftrightarrow 2x > 7 \Leftrightarrow x > \frac{7}{2}$.

Ats. $x \in \left(\frac{7}{2};\ +\infty\right)$.

Kvadratinės nelygybės. Kai nelygybės reiškinių aukščiausias nežinomojo laipsnis yra antras, tai nelygybė vadinama kvadratine. Kiekvieną kvadratinę nelygybę ekvivalenčiai pertvarkant galima suvesti iki pavidalo $ax^2 + bx + c > 0$ (žinoma, nelygybės ženklas gali būti ir $<$ arba $\geq$, arba $\leq$). Čia *a*, *b* ir *c* – realieji skaičiai, $a \neq 0$. Pastarosios nelygybės sprendinių aibę galima rasti naudojantis kvadratinio trinario funkcijos $y = ax^2 + bx + c$ savybėmis.

2 *pavyzdys*. Išspręskime nelygybę $5(x-1)^2 + 3x \leq 3$.

Sprendimas. $5(x-1)^2 + 3x \leq 3 \Leftrightarrow 5x^2 - 7x + 2 \leq 0$. Kadangi lygties $5x^2 - 7x + 2 = 0$ sprendiniai yra $x_1 = 1$ ir $x_2 = \frac{2}{5}$, tai duotosios nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $\left[\frac{2}{5}; 1\right]$. Sprendžiant tokias nelygybes patogu naudotis atitinkamos kvadratinio trinario funkcijos grafiku.

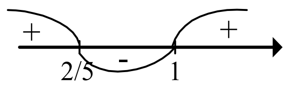
Ats. $x \in \left[\frac{2}{5}; 1\right]$.

Nelygybių sprendimas intervalų metodu. Pažintį su šiuo metodu pradėkime nuo 2 pavyzdžio nelygybės $5x^2 - 7x + 2 \leq 0$ kito sprendimo būdo. Išskaidę kvadratinį trinarį dauginamaisiais gausime nelygybę $5\left(x - \frac{2}{5}\right)(x - 1) \leq 0$ arba $\left(x - \frac{2}{5}\right)(x - 1) \leq 0$. Pateiktoje lentelėje matome

x-2/5	-	+	+
x-1	-	-	+
(*x*-2/5)(*x*-1)	+	-	+
		2/5	1

kairiosios nelygybės pusės dauginamųjų ir sandaugos ženklus realiųjų skaičių tiesės intervaluose $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right), \left(\frac{2}{5}; 1\right)$ ir $(1; +\infty)$. Duotąją nelygybę tenkina intervalo $\left(\frac{2}{5}; 1\right)$ taškai dar prijungus intervalo galus. Taigi gauname atsakymą $x \in \left[\frac{2}{5}; 1\right]$.

Atkreipkime dėmesį, kad sandaugos $(x - \frac{2}{5})(x - 1)$ ženklas intervaluose $(1; +\infty)$, $\left(\frac{2}{5}; 1\right)$, $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right)$ pereinant juos iš dešinės į kairę kinta taip: +, -, +. Todėl kartais patogiau naudotis tokia schema:



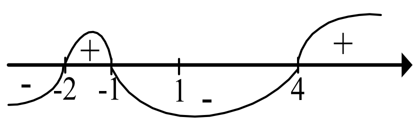
Šioje schemoje iš karto matome nagrinėjamos griežtos nelygybės sprendinių aibę. Ar intervalų galai tenkina nelygybę, turime patikrinti. Šis metodas, vadinamas *intervalų metodu*, tinka ne tik kvadratinėms bet ir sudėtingesnėms nelygybėms spręsti.

3 *pavyzdys*. Išspręskime nelygybę $\frac{(x+2)(x-1)^2}{4+3x-x^2} \geq 0.$

Sprendimas. Taikant intervalų metodą patogu nelygybę pakeisti jai ekvivalenčia, kurios kairiąją pusę sudarytų tik pavidalo $(x-a)^k, k \in Z$, reiškinių sandauga:

$$\frac{(x+2)(x-1)^2}{4+3x-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)^2}{(x+1)(x-4)} \leq 0$$

Skaičių tiesėje pažymėkime taškus $x=-2, x=-1, x=1, x=4$, t. y. taškus, kuriuose daugikliai $(x-a)^k=0$. Vadinkime juos *atraminiais* taškais. Atkreipkime dėmesį, kad intervale $(4;+\infty)$ paskutiniosios nelygybės kairioji pusė yra teigiama, o pereinant per atraminius taškus reiškinio ženklas keičiasi priešingu (žr. pateiktą schemą). Tik reikia būti atidžiais su atraminiais taškais $x=a$, kuriems reiškinys $x-a$ įeina lyginiu laipsniu, – pereinant šiuos taškus reiškinio ženklas nepasikeičia. Šiame pavyzdyje toks taškas yra $x=1$. Iš schemos matome kurių intervalų taškai yra nelygybės sprendiniai, tai – intervalų $(-\infty;\ -2)$ ir $(-1;\ 4)$ taškai. Atraminius taškus



turime patikrinti atskirai: $x=-2$ ir $x=1$ nelygybę tenkina, o taškai $x=-1$ ir $x=4$ nepriklauso apibrėžimo sričiai. Taigi duotosios nelygybės sprendinių aibė yra: $x \in (-\infty;-2] \cup (-1;4)$.

Iracionaliosios nelygybės. Iracionaliųjų nelygybių sprendimas kiek sudėtingesnis negu racionaliųjų. Taip yra dėl kelių priežasčių – sudėtingiau nustatyti jų apibrėžimo sritį (nustatant ją dažnai tenka spręsti nelygybių sistemas), taip pat reikia būti atidžiais pertvarkant iracionaliąją nelygybę į jai ekvivalenčią racionaliąją nelygybę (ypač tais atvejais, kai norint „išsivaduoti iš iracionalumų“ abi nelygybės pusės keliamos tam tikru laipsniu).

Kartais iracionaliosios nelygybės sprendimas susiveda vien tik į apibrėžimo srities nustatymą. Jei nelygybės apibrėžimo sritis yra tuščia aibė, aišku, kad nelygybė sprendinių neturi.

4 *pavyzdys*. Išspręskime nelygybę $\sqrt{-x^2+5x-6}-\sqrt{(4-x)(x-5)}>0$.

Sprendimas. Nustatykime nelygybės apibrėžimo sritį:

$$\begin{cases} -x^2+5x-6 \geq 0, \\ (4-x)(x-5) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) \leq 0, \\ (x-4)(x-5) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [2;3], \\ x \in [4;5] \end{cases} \Rightarrow \emptyset.$$

Darome išvadą – nelygybė sprendinių neturi.

Ats. $\emptyset$.

1 *pastaba*. Prisiminkime, kad $\sqrt[2k]{f(x)} \geq 0,\ k \in \mathrm{N},$ reiškinio apibrėžimo srityje (t. y. kai $f(x) \geq 0$).

2 *pastaba*. Nelygybė išlieka galioti abi jos puses keliant lyginiu laipsniu tik tuomet, kai abi jos pusės yra neneigiami reiškiniai.

5 *pavyzdys*. Išspręskime nelygybę $\sqrt{x+18}<2-x$.

Sprendimas. Nelygybės apibrėžimo sritis yra: $x + 18 \geq 0 \ \Rightarrow x \geq -18$. Toliau iš karto aišku – kai $2 - x \leq 0$, tai nelygybė sprendinių neturi (žr. 1 pastabą).

Tegu dabar $2 - x > 0$. Tuomet (žr. 2 pastabą):

$$\sqrt{x+18} < 2 - x \ \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x > 0, \\ x \geq -18, \\ x + 18 < (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \geq -18, \\ x^2 - 5x - 14 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 2), \\ x \in [-18; +\infty), \\ x \in (-\infty; -2) \cup (7; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [-18; -2).$$

Ats. $x \in [-18; -2)$.

6 *pavyzdys*. Išspręskime nelygybę $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 2x - 5$.

Sprendimas. Nelygybės apibrėžimo sritis yra: $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \ \Rightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

Kai $2x - 5 \leq 0$, t. y. kai $x \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$, tai nelygybė teisinga šio intervalo ir apibrėžimo srities sankirtoje (žr. 1 pastabą) : $\begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right], \\ x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [2; \frac{5}{2}]$.

Kai $2x - 5 > 0$, gausime:

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{5}{2}; +\infty\right), \\ x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty), \\ x^2 - 3x + 2 > (2x-5)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(\frac{5}{2}; +\infty\right), \\ x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty), \\ 3x^2 - 17x + 23 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(\frac{5}{2}; +\infty\right), \\ x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty), \\ x \in \left(\frac{17 - \sqrt{13}}{6}; \frac{17 + \sqrt{13}}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$x \in \left(\frac{5}{2}; \frac{17 + \sqrt{13}}{6}\right).$$

Apjungę aukščiau gautą sprendinių aibę, kai $2x - 5 \leq 0$, su pastarąja, gauname visą nelygybės sprendinių aibę: $x \in (-\infty; 1] \cup [2; \frac{17 \ \ \sqrt{13}}{6})$.

Ats. $x \in (-\infty; 1] \cup [2; \frac{17+\sqrt{13}}{6})$.

7 *pavyzdys*. Išspręskime nelygybę $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$.

Sprendimas. Nustatykime nelygybės apibrėžimo sritį: $\begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ x - 1 \geq 0, \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3, \\ x \geq 1, \\ x \geq 0{,}5 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1.$

Abi nelygybes puses pakėlę kvadratu ir ją pertvarkę gausime ekvivalenčią nelygybę:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow 2\sqrt{(x+3)(x-1)} < 3.$$

Dar kartą pakelkime abi puses kvadratu. Po pertvarkymų gauname:

$$2\sqrt{(x+3)(x-1)} < 3 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 21 < 0 \Rightarrow -\frac{7}{2} < x < \frac{3}{2}.$$

Vadinasi, turėsime:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ -\frac{7}{2} < x < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x < \frac{3}{2}.$$

Ats. $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right)$.

8 *pavyzdys*. Išspręskime nelygybę $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$.

Sprendimas. Nustatykime nelygybės apibrėžimo sritį: $\begin{cases} 1-4x^2 \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Kai $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$, tai $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3 \Leftrightarrow 1-\sqrt{1-4x^2} < 3x \Leftrightarrow 1-3x < \sqrt{1-4x^2}$.

Jeigu $1-3x \leq 0$, t. y. $x \geq \frac{1}{3}$, tai nelygybė $1-3x < \sqrt{1-4x^2}$ galioja su $x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$.

Jeigu $1-3x > 0$, t. y. $x < \frac{1}{3}$, o atsižvelgus į apibrėžimo sritį, $0 < x < \frac{1}{3}$, tuomet: $1-3x < \sqrt{1-4x^2} \Leftrightarrow (1-3x)^2 < 1-4x^2 \Leftrightarrow x(13x-6) < 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{6}{13}$. Kadangi $\frac{1}{3} < \frac{6}{13}$, tai šiuo atveju (kai $1-3x > 0$) nelygybę tenkina intervalo $\left(0; \frac{1}{3}\right)$ taškai.

Apjungę abu atvejus gauname tokius nelygybės sprendinius: $x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right] \cup \left(0; \frac{1}{3}\right) = \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Tegu $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right)$. Tuomet: $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3 \Leftrightarrow 1-\sqrt{1-4x^2} > 3x \Leftrightarrow 1-3x > \sqrt{1-4x^2} \Leftrightarrow (1-3x)^2 > 1-4x^2 \Leftrightarrow x(13x-6) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{6}{13}; +\infty\right)$. Taigi šiuo atveju nelygybę tenkina intervalo $\left[-\frac{1}{2}; 0\right)$ taškai.

Visa duotosios nelygybės sprendinių aibė yra $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$, t. y. visi nelygybės apibrėžimo srities taškai yra sprendiniai.

3 *pastaba*. Akylesni skaitytojai galbūt pastebėjo kitą, paprastesnį, šios nelygybės sprendimo būdą – nelygybės apibrėžimo srityje galioja:

$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3 \Leftrightarrow \frac{4x}{1+\sqrt{1-4x^2}} < 3 \Leftrightarrow 4x-3 < 3\sqrt{1-4x^2}$.

Atkreipkime dėmesį, kad apibrėžimo srityje kairioji nelygybės pusė yra neigiama. Todėl nelygybė teisinga visoje apibrėžimo srityje.

Šis sprendimo būdas žymiai trumpesnis, tačiau pirmasis padeda giliau suvokti iracionaliųjų nelygybių sprendimo subtilumus.

Ats. $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

9 *pavyzdys*. Įrodykime, kad su visais realiaisiais skaičiais *x* galioja nelygybė $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$.

Įrodymas. Nelygybės apibrėžimo sritis yra visa realiųjų skaičių aibė. Joje:

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2 \Leftrightarrow x^2+2 \geq 2\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^4+4x^2+4 \geq 4x^2+4 \Leftrightarrow x^4 \geq 0.$$

Kadangi pastaroji nelygybė akivaizdi, tai ir jai ekvivalenti pradinė nelygybė galioja. Įrodyta.

Trumpai apžvelgėme racionaliųjų ir iracionaliųjų nelygybių pagrindinius sprendimo metodus, pateikėme pavyzdžių. Tikimės, kad ši metodinė medžiaga Jums padės išspręsti ketvirtąją užduotį. Sėkmės!

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

Išspręskite nelygybes:

1. $\frac{x-1}{6} + x \geq \frac{2x+1}{2} - \frac{3}{4}$;

2. $5(x-1)^2 + 3x < 3$.

3. Su kuriomis m reikšmėmis nelygybės $x^2 + 2(m+1)x + 9m > 5$ sprendinių aibė yra visa realiųjų skaičių aibė ?

Išspręskite nelygybes:

4. $\frac{x^2-5x+1}{x^2-4x+5} \geq 3$;

5. $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \geq 1$;

6. $\sqrt{(x+4)(x-5)} > \sqrt{(2-x)(x+1)} - \sqrt{x^2+x+1}$;

7. $x + 2 < \sqrt{x+14}$;

8. $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} > \frac{3}{2}$;

9. $\frac{\sqrt{2x^2+7x-4}}{x+4} < \frac{1}{2}$.

10. Įrodykite nelygybę $\left(\frac{x^2}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y^2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} > \sqrt{x} + \sqrt{y}$, kai $x > 0,\ y > 0,\ x \neq y$.

V. TRIGONOMETRIJA GEOMETRIJOS UŽDAVINIUOSE

Teorinę medžiagą parengė ir penktąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

Šiame darbe Jūs giliau susipažinsite su trigonometrijos taikymais geometrijoje, pakartosite žinomas trigonometrijos formules ir teoremas.

Priminsime geometrijos pamokose įrodytas sinusų ir kosinusų teoremas.

1 teorema (kosinusų teorema). Trikampio kraštinės kvadratas lygus kitų trikampio kraštinių kvadratų sumos ir dvigubos tų kraštinių sandaugos, padaugintos iš kampo tarp jų kosinuso, skirtumui:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos\angle C,$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B,$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A.$$

2 teorema (sinusų teorema). Trikampio kraštinės ir prieš ją esančio kampo sinuso santykis yra lygus apibrėžto apie trikampį apskritimo skersmeniui:

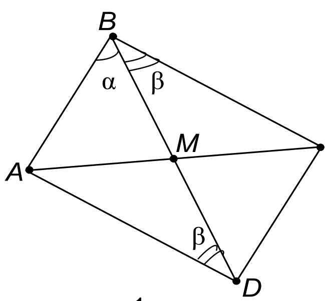
$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{BC}{\sin\angle A} = 2R.$$

3 teorema (trikampio ploto formulė). Trikampio plotas lygus dviejų trikampio kraštinių ir kampo tarp jų sinuso sandaugos pusei:

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin\angle A = \frac{1}{2}AC \cdot CB \sin\angle C = \frac{1}{2}AB \cdot BC\ sin\angle B$$

Pateiksime keletą šių teoremų taikymo geometrijos uždavinių sprendime pavyzdžių.

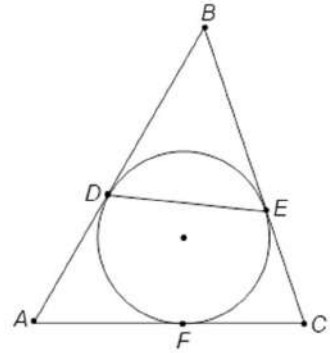
1 pavyzdys. Atkarpa BM yra trikampio ABC pusiaukraštinė, jos ilgis lygus m, ji su kraštinėmis BA ir BC sudaro kampus lygius α ir β. Rasime kraštinės AB ilgį.



1 pav.

Sprendimas. Pusiaukraštinės BM tęsinyje už taško M atidedame atkarpą $MD = BM$ (1 pav.). Kadangi keturkampio $ABCD$ įstrižainės AC ir BD susikirsdamos taške M dalijasi pusiau, tai šis keturkampis yra lygiagretainis, todėl $\angle ADB = \angle DBC = \beta$, o $\angle BAD = 180^0 - \angle ABC = 180^0 - (\alpha + \beta)$. Trikampiui ABD pritaikę sinusų teoremą gauname, kad $\frac{AB}{\sin\angle ADB} = \frac{BD}{\sin\angle BAD}$. Iš čia $AB = \frac{2m\sin\beta}{\sin(180^0 - (\alpha+\beta))} = \frac{2m\sin}{\sin(\alpha+\beta)}$.

2 pavyzdys. Trikampio ABC kampo A didumas lygus 60^0, įbrėžtas į trikampį apskritimas liečia kraštines AB, BC, AC atitinkamai taškuose D, E, F, $AF = 3$, $FC = 2$ (2 pav.). Rasime atkarpos DE ilgį.



2 pav.

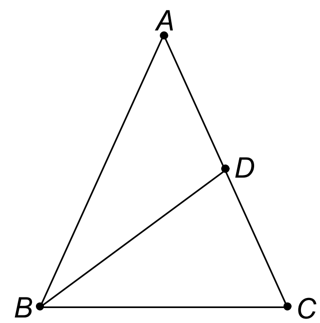
Sprendimas. Pagal apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško, savybes turime, kad $AD = AF = 3$, $CF = CE = 2$. Sakykime, kad $DB = BE = a$, $DE = x$. Taikydami kosinusų teoremą trikampiui ABC, gauname, kad $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A$, iš čia

$(a+2)^2 = (3+a)^2 + 5^2 - 2(a+3) \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}$. Atlikę veiksmus gauname, kad $a^2 + 4a + 4 = 9 + 6a + a^2 + 25 - 5a - 15$, t. y. $a = 5$. Taikydami kosinusų teoremą trikampiui ABC rasime $\angle B$ kosinusą: $\cos\angle B = \frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2 \cdot BA \cdot BC} = \frac{(3+5)^2+(5+2)^2-5^2}{2 \cdot (3+5) \cdot (5+2)} = \frac{11}{14}$. Dabar iš kosinusų teoremos trikampiui BED randame $ED^2 = BE^2 + BD^2 - 2BE \cdot BD \cos\angle B = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{11}{14} = \frac{75}{7}$ ir $ED = 5\sqrt{\frac{3}{7}}$.

3 pavyzdys. Lygiašonio trikampio pagrindo ilgis yra a, kampas prie pagrindo lygus α. Rasime pusiaukraštinės, nubrėžtos į šoninę kraštinę, ilgį.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas D yra lygiašonio trikampio $ABC, AB = AC$ šoninės kraštinės AC vidurio taškas. (3 pav.). Kadangi $\angle BAC = 180^0 - 2\alpha$, tai iš sinusų teoremos trikampiui ABC turime, kad $\frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{BC}{\sin\angle BAC}$, todėl $AB = \frac{a\sin\alpha}{\sin(180^0 - 2\alpha)} = \frac{a\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{a}{2\cos\alpha}$. Todėl $CD = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{4\cos\alpha}$. Trikampiui BCD pritaikę kosinusų teoremą gauname, kad $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cos\angle ACB = a^2 + \left(\frac{a}{4\cos\alpha}\right)^2 - 2a \cdot \frac{a}{4\cos\alpha}.\cos\alpha = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{16cos^2\alpha} = \frac{a^2(8cos^2\alpha+1)}{16cos^2\alpha}$.

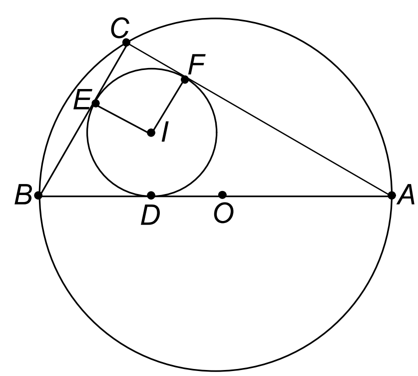
Taigi $BD = \frac{a}{4\cos\alpha}\sqrt{8cos^2\alpha + 1}$.



3 pav.

Dažnai geometrijos uždaviniuose reikia naudoti atvirkštines trigonometrines funkcijas, jų savybes. Priminkime, kad skaičiaus x, $|x| \le 1$ *arksinusu* yra vadinamas kampas iš intervalo $[-90^0; 90^0]$, kurio sinusas lygus x; taigi pagal apibrėžimą $\sin(\arcsin x) = x$, jei $|x| \le 1$. Analogiškai skaičiaus $x, |x| \le 1$ *arkkosinusas* yra kampas, priklausantis intervalui $[0^0; 180^0]$, kurio kosinusas lygus x, t. y. $\cos(\arccos x) = x$, jei $|x| \le 1$. Be to, visiems x, $|x| \le 1$ yra teisinga lygybė $\arcsin x + \arccos x = 90^0$. Lygiai taip pat realiojo skaičiaus x *arktangentu* vadinamas toks kampas iš intervalo $(-90^0; 90^0)$, kurio tangentas lygus x; tuomet visiems x yra teisinga lygybė $tg(arctg\ x) = x$.

4 pavyzdys. Apibrėžto apie statųjį trikampį apskritimo spindulio ir įbrėžto į šį trikampį apskritimo spindulio santykis lygus 5 : 2. Rasime trikampio smailiuosius kampus.

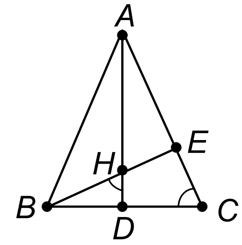


4 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad stačiojo trikampio $ABC, \angle C = 90^0$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle BAC = x$. Apibrėžto apie statųjį trikampį apskritimo spindulys lygus įžambinės pusei, taigi $R = \frac{c}{2}$. Įbrėžto į statųjį trikampį apskritimo spindulio ilgis $r = \frac{a+b-c}{2}$ (4 pav. $r = CE = CF, AD = AF$, $BD = BE$, $2r + 2AF + 2BF = a + b + c$, $2r + 2c = a + b + c$, $2r = a + b - c$). Pagal sąlygą $\frac{c}{2} : \frac{a+b-c}{2} = \frac{5}{2}$. Perrašome šią lygtį taip: $\frac{a+b-c}{c} = \frac{2}{5}$, t. y. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1 = \frac{2}{5}$. Kadangi $\frac{a}{c} = \sin x$, $\frac{b}{c} = \cos x$, tai gauname, kad stačiojo trikampio smailusis kampas x yra trigonometrinės lygties $\sin x + \cos x = \frac{7}{5}$ sprendinys. Kadangi abi lygties pusės yra teigiamos, tai šią lygtį galima spręsti keliant abi puses kvadratu: $sin^2x + 2\sin x\cos x + cos^2x = \frac{49}{25}$. Kadangi $sin^2x + cos^2x =$

1, o $2\sin x\cos x = \sin 2x$, tai gautoji lygtis tampa tokia $\sin 2x = \frac{24}{25}$. Taigi $2x = \arcsin\frac{24}{25}$. $x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}$. Taigi $\angle BAC = \frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}$, $\angle ABC = 90^0 - \frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}$.

5 pavyzdys. Smailiojo lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo lygus α. Rasime, kokiu santykiu, skaičiuojant nuo trikampio viršūnės, aukštinių sankirtos taškas dalija į šoninę kraštinę nubrėžtą trikampio aukštinę.



5 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad lygiašonio trikampio ABC kampai prie pagrindo $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$, aukštinės AD ir BE susikerta taške H (5 pav.). Kadangi $\angle ACB = 90^0 - \angle EBC = 90^0 - \angle HBD = \angle BHD$, tai $\angle BHD = \angle ACB = \alpha$, todėl iš stačiojo trikampio BHD randame, kad $BH = \frac{BD}{\sin\angle BHD} = \frac{\frac{BC}{2}}{\sin\alpha} = \frac{BC}{2\sin\alpha}$. Iš stačiojo trikampio BEC randame $BE = BC\sin\alpha$, taigi $HE = BE - BH = BC(\sin\alpha - \frac{1}{2\sin\alpha}) = \frac{BC(2sin^2\alpha - 1)}{2\sin\alpha}$. Kadangi $sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, tai $HE = BC\frac{1-\cos 2\alpha - 1}{2\sin\alpha} = -\frac{BC\cos}{2\sin\alpha}$. Iš čia randame ieškomąjį santykį $\frac{BH}{HE} = \frac{BC}{2\sin\alpha} : \left(-\frac{BC\cos}{2\sin\alpha}\right) = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$. Pastebėkime, kad minuso ženklas nereiškia, kad atkarpų santykis yra neigiamas skaičius – kadangi pagal sąlygą trikampis yra smailusis, tai kampas α yra didesnis už 45^0, taigi 2α yra bukasis kampas, kurio kosinusas yra neigiamas.

Priminsime keletą trigonometrinių funkcijų tapatybių, kurios dažnai padeda ir geometrijoje. Visų pirma, tai sumos ir skirtumo trigonometrinės funkcijos, kurių atskiras variantas yra dvigubo kampo trigonometrinių funkcijų išraiškos.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta, \quad \cos 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha,$$

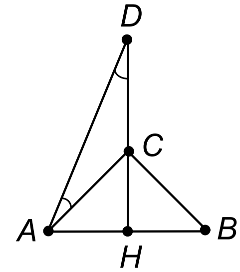
$$tg\ (\alpha \pm \beta) = \frac{tg\ \alpha \pm tg\ \beta}{1 \mp tg\alpha\ tg\ \beta}, \quad tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$$

Taip pat dažnai naudojamos trigonometrinių funkcijų laipsnio žeminimo formulės

$$sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \quad cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

Matematikos pamokose išmokote rasti $30^0, 45^0, 60^0$ sinusus, kosinusus, tangentus. Taikant specialias geometrijos konstrukcijas galima rasti ir kai kurių kitų kampų trigonometrinių funkcijų reikšmes.

6 pavyzdys. Iš stačiojo lygiašonio trikampio ABC stačiojo kampo viršūnės C nubrėžta aukštinė pratęsiama už viršūnės C ir jos tęsinyje pažymėtas taškas D toks, kad atkarpa CD lygi trikampio statiniui. Taikydami šią konstrukciją rasime $22{,}5^0$ kampo trigonometrinių funkcijų reikšmes.



6 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad CH yra trikampio ABC aukštinė, $CD = AC = CB$ ir nubrėžkime atkarpą DA (6 pav). Kadangi $\angle HBC = 45^0$, tai $\angle DCA = 135^0$, todėl $\angle HDA = \angle CDA = \angle CAD = \frac{1}{2}(180^0 - \angle DCA) = 22{,}5^0$. Iš stačiojo trikampio ADH randame $tg\angle HDA = tg22{,}5^0 = \frac{AH}{HD}$. Jei stačiojo trikampio įžambinė $AB = c$, tai $AC = BC = CD = \frac{\sqrt{2}}{2}c$, $AH = HC = \frac{c}{2}$, $HD = HC + CD = \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}c$, todėl $tg22^0 = \frac{c}{2} : \frac{1+\sqrt{2}}{2}c = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$. Žinodami kampo tangento reikšmę, galime rasti ir jo sinuso bei kosinuso reikšmes. Tuo tikslu užrašome tokias lygybes: $tg^2x = \frac{sin^2x}{cos^2x} = \frac{sin^2x}{1-sin^2x}$, $tg^2x - tg^2x\, sin^2x = sin^2x$, $sin^2x(1 + tg^2x) = tg^2x$, taigi $sin^2x = \frac{tg^2x}{1+tg^2x}$. Analogiškai gauname formulę $cos^2x = \frac{1}{1+tg^2x}$. Iš šių lygybių seka, kad $sin^2\, 22{,}5^0 = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{1+(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4-2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right)$, $cos^2 22{,}5^0 = \frac{1}{4-2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left(2 + \sqrt{2}\right)$. Taigi $\sin 22{,}5^0 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos 22{,}5^0 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Atkarpa BM yra trikampio ABC pusiaukraštinė, ji su kraštinėmis BA ir BC sudaro kampus lygius α ir β. Raskite šios pusiaukraštinės ilgį, jei kraštinės BC ilgis lygus a.

2. Trikampio ABC kampo A didumas lygus 60^0, įbrėžtas į trikampį apskritimas liečia kraštines AB, BC, AC atitinkamai taškuose D, E, F, $AF = 5$, $FC = 3$. Raskite atkarpos EF ilgį.

3. Apie apskritimą, kurio spindulys lygus R, apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios smailusis kampas lygus α. Raskite trapecijos perimetrą.

4. Trikampyje ABC $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, kraštinėje AC yra taškas D toks, kad $\angle BDC = \gamma$. Raskite atkarpos BD ilgį.

5. Trikampio ABC kraštinės $AB = 8$, $AC = 10$, o jo plotas lygus 20. Raskite trečios trikampio kraštinės ilgį.

6. Stačiakampio $ABCD$ kraštinėse AD ir BC atitinkamai pažymėti taškai M ir N taip, kad keturkampis $AMNB$ yra kvadratas, kurio įstrižainė lygi stačiakampio ilgesniajai kraštinei, taškas E yra kraštinės BC vidurio taškas. Raskite kampą tarp tiesių BD ir AE.

7. Rombo perimetro ir įstrižainių ilgių sumos santykis lygus 3 :2. Raskite rombo kampus.

8. Lygiašonio trikampio ABC kampas prie viršūnės α yra bukasis, pagrindo BC ilgis lygus a, atkarpa BE yra aukštinė, nubrėžta į šoninę kraštinę. Raskite taško E atstumą iki trikampio ABC ortocentro (aukštinių sankirtos taško).

9. Atkarpa BD yra lygiakraščio trikampio ABC aukštinė, jos tęsinyje už taško B atidėta atkarpa BE lygi trikampio kraštinei. Naudodami šią konstrukciją, raskite 15^0 kampo sinuso, kosinuso ir tangento reikšmes.

10. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinėje BC yra taškas D ir $BD : DC = 2 : 1$. Raskite kampą ADB.

VI. SKAIČIAI, REIKŠMĖS IR LENTELĖS

Teorinę medžiagą parengė bei šeštąją užduotį sudarė VU docentas Romualdas Kašuba

1. Visi mes puikiai atsimename, kaip yra sprendžiamas toks uždavinys: vienas darbininkas, dirbdamas vienas, darbą padarytų per 2 valandas, o kitas – irgi vienas – per 3. Per kiek valandų jie padarytų tą darbą dirbdami abu kartu? Jo sprendimas yra arba, tiksliau, galėtų būti toks. Darbą pažymėkime 1 ir pirmiausiai paskaičiuokime darbo dalis, kurias jie atliktų per vieną valandą. Pirmasis darbininkas per 1 valandą padarytų ½ darbo dalį, o kitas per tą patį laiką padarytų 1/3 darbo dalį. Todėl jie abu kartu per vieną valandą padarytų ½ + 1/3 darbo dalį. Sudėję tas dvi trupmenas gauname 5/6, o todėl jie kartu tą visą darbą padarytų per 1/(5/6) = 6/5 valandos.
O dabar išspręskime panašų uždavinį priimdami sąlygą, kad spręsdami atlikti dalybos veiksmą galime tik paskutinėje eilutėje.

Uždavinio sprendimas galėtų būtų toks. Pirmiau paimkime skaičių 2 ir 3 bendrąjį mažiausiąjį kartotinį, kuris yra 6 ir suskaičiuokime, kiek darbų atliktų pirmasis ir antrasis darbininkai per tas 6 valandas. Iš karto suvokiame, kad pirmasis darbininkas per tas 6 valandas atliktų 3 darbus, o antrasis – irgi vienas – 2 darbus. Todėl jie abudu per tas 6 valandas atliktų 3 + 2 = 5 darbus, o tai reiškia, jog 1 darbą jie atliktų per 6/5 valandos.

Atkreipiame dėmesį, jog tikrai dalijome tik paskutinėje eilutėje.

2. Nežiniukas suformulavo (iš analogijos su skaičių dalumo iš 3 ir 9 požymiais) tokį skaičiaus dalumo iš 27 požymį:

Jeigu natūraliojo skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 27, tai ir pats skaičius dalijasi iš 27.

Ar Nežiniukas yra teisus?

Sprendimas. Nežiniukas yra neteisus. Nors pats mažiausias skaičius, kurio skaitmenų suma yra 27, yra 999 ir jis iš 27 tikrai dalijasi, nes 999 : 27 = 37, bet jau sekantis pagal didumą skaičius su skaitmenų suma 27 yra 1899 ir jis iš 27 tikrai nesidalija, nes 1899 = 27 · 70 + 9.
Atsakymas. Nežiniukas yra neteisus.

3. O dabar suraskime koks dviženklis skaičius pasižymi savybe, jog prie jo pridėjus 1, jis dalijasi iš 9, o atėmus 1 jis dalijasi iš 13.

Pirmiausiai pastebėkime, jog mažiausias dviženklis skaičius, kuris pridėjus 1 dalijasi iš 9, yra 17. Tačiau jeigu iš jo atimsime 1, tai 17 – 1 = 16 iš 13 tikrai nesidalins.

Sekantis dviženklis skaičius, kuris pridėjus 1 dalijasi iš 9 yra 26, dar kitas 35, toliau eitų skaičiai 44, 53, 62, 71, 80, 89 ir 98. Pažiūrėsime, kuris iš jų, sumažintas 1, arba kuris iš skaičių

25, 34, 43, 52, 61, 70, 79, 88 ir 97

dalijasi be liekanos iš 13. Matome, jog toks skaičius yra 52.

Todėl gauname, jog yra vienintelis toks dviženklis skaičius, kuris yra 52.

4. Jonas ir Petras mokosi skirtingose mokyklose. Į jų pareigas įeina būtinybė išblizginti kiekvienam savo mokyklos salių grindis. Jonas išblizgina savo mokyklos salės grindis per 2 valandas, o salės plotas yra 440 kvadratinių metrų, o Petras savo mokyklos salės grindis, kurios plotas yra 1080 kvadratinių metrų, išblizgina per 6 valandas.

Kai Jonas ir Petras kartu blizgina Jono mokyklos salės grindis, kiek minučių juodu užtrunka?

Sprendimas. Jonas per 1 valandą išblizgina 440 : 2 = 220 kv. metrų ploto, o Petras 1080 : 6 = 180 kv. metrų. Todėl juodu abudu kartu per valandą išblizgina 220 + 180 = 400 kvadratinių metrų, tai po 1 valandos jiems dar lieka nublizginti 440 – 400 = 40 kvadratinių metrų, o tai yra dešimtoji dalis viso Jono salės ploto, todėl juodu sugaiš tam likusiam plotui dešimtadalį jų jau sugaišto laiko, o tai yra 6 minutės. Todėl visam Jono mokyklos salės blizginimui juodu sugaiš 66 minutes.

5. Į kampinius lentelės 3 x 3 langelius yra įrašyti skaitmenys 1, 9, 9 ir 5, kaip tai yra parodyta piešinyje.

1		9
9		5

Ar galima į likusius tuščius langelius įrašyti skaičius įrašant po vieną skaičių į kiekvieną langelį taip, kad visuose keturiuose kampiniuose 2 x 2 kvadratuose esančių skaičių suma būtų visada viena ir ta pati.

Sprendimas. Tarkime, kad taip padaryti galima. Tegul į tuščią viršutinės eilutės langelį yra įrašytas skaitmuo a, o į tuščią apatinės eilutės langelį yra įrašytas skaitmuo b (žiūrėkite piešinį).

1	a	9
9	b	5

Kadangi kairysis viršutinis ir apatinis 2 x 2 kvadratai turi du bendrus langelius, o jų visų 4 skaičių sumos sutampa, tai $1 + a = 9 + b$, iš kur seka, jog $a = b + 8$. Analogiškai sulygindami viršutinių ir apatinių dešiniųjų 2 x 2 kvadratų skaičių sumas gautume, jog $a + 9 = b + 5$, iš kur seka, kad $a = b - 4$. Tada $b + 8 = b - 4$, o tai yra prieštaravimas, nes 8 ir -4 yra tikrai skirtingi skaičiai.
Atsakymas. To padaryti negalima.

6. Ar galima į kvadratinės lentelės 5 x 5 langelius įrašyti visus skaičius nuo 1 iki 25 (po vieną skaičių į kiekvieną langelį) taip kad skaičių suma kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir abiejose įstrižainėse būtų lyginė?

Sprendimas. Tarkime, kad taip padaryti galima. Tada kiekvienos eilutės skaičių suma yra lyginė, todėl ir visų penkių eilučių skaičių suma irgi yra lyginė. Bet tai yra visų skaičių, nuo 1 iki 25 suma 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 22 + 23 +24 +25, kuri yra 12 lyginių ir 13 nelyginių skaičių suma. Tačiau nelyginio skaičiaus nelyginių skaičių suma yra nelyginis skaičius. Tai yra beveik tas pats kaip pasakyti, kad visų sveikųjų skaičių nuo 1 iki 25 suma yra $1 + 2 + 3 + \ldots + 23 + 24 + 25 = 13 \cdot 25 = 325$.

7. Mokyklos šachmatų turnyre dalyvavo 20 šachmatininkų, kurie visi vienas su kitu sužaidė po vieną partiją. Šachmatuose už pergalę duodama po tašką, už lygiąsias – po ½ taško, o už pralaimėtą partiją skiriama 0 taškų. Pasibaigus turnyrui paaiškėjo, kad lygiai vienas dalyvis, vardu Matas, surinko 9,5 taško ir užėmė 19-tą vietą. Ar galėjo turnyro nugalėtojas aplenkti antroje vietoje likusį dalyvį lygiai 1 tašku?

Sprendimas. Ne, taip nutikti negalėjo.

Pirmiausiai pastebėkime, kad dalyviai, likę 1-18-tose vietose surinko bent po 10 taškų kiekvienas, todėl geriausieji 19 dalyvių surinko ne mažiau kaip $10 \cdot 18 + 9{,}5 = 189{,}5$ taškų. Toliau, turnyre buvo išžaista $(20 \cdot 19) : 2 = 190$ taškų, vadinasi, paskutiniajam 20-tajam dalyviui lieka daugiausiai 0,5 taško. Jeigu pas jį yra 0,5 taškų, tai taškų pasiskirstymas yra toks: 1-18 vietos – po 10 taškų, 19-ta vieta – 9,5, 20-ta – 0,5 taškų. Jeigu pas jį yra 0 taškų, tai tas pasiskirstymas yra toks: 1-a vieta 10,5 taško, 2-18 vietos – po 10, 19-ta – 9,5 ir 20-ta – 0 taškų.

Bet kuriuo atveju turime, kad pirmąją ir antrąją vietas skiria ne daugiau negu 0,5 taško.

8. Autobusu važiavo ne daugiau negu 100 keleivių, o stovinčiųjų keleivių skaičius buvo 2 kartus didesnis už sėdinčiųjų keleivių skaičių. Sustojus autobusui stotelėje iš jo išlipo lygiai 4 procentai visų keleivių. Pasakykite, kiek keleivių liko autobuse.

Sprendimas. Kadangi stovinčiųjų keleivių skaičius yra du kartus didesnis už sėdinčiųjų, tai bendras visų keleivių skaičius N tikrai dalijasi iš 3. Toliau, kadangi stotelėje išlipo keturi procentai visų keleivių, tai yra $\frac{1}{25} \cdot N$ keleivių, tai N turi dalintis ir iš 25. Taigi N dalijasi iš $3 \cdot 25 = 75$. Tačiau pagal sąlygą $N \leq 100$, todėl $N = 75$. Taigi autobuse iš viso liko $75 - \frac{4 \cdot 75}{100} = 75 - 3 = 72$ keleiviai.

9. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ir 8 įvairiais būdais galima sudaryti 2 keturženklius skaičius panaudojant kiekvieną skaitmenį po vieną kartą, o po to rasti skirtumą didesniojo ir mažesniojo iš tų gautųjų skaičių (pavyzdžiui, 3587 – 1246). Kokį patį didžiausią ir patį mažiausią skirtumus galima gauti taip darant?

Sprendimas. Didžiausia reikšmė yra lygi 7531; mažiausia reikšmė lygi 247.

Mažiausia reikšmė yra gaunama iš galimai didžiausios reikšmės atimant galimai mažiausią reikšmę. Pats didžiausias keturženklis skaičius, gaunamas iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ir 8 yra, suprantama, 8765, o pats mažiausias yra 1234. Todėl pats didžiausias skirtumas yra $8765 - 1234 = 7531$.

Jeigu mažinamojo skaičiaus tūkstančių skaitmuo būtų didesnis už atimamojo iš jo skaičiaus tūkstančių skaitmenį daugiau negu per 1, tai skirtumas būtų nemažesnis negu $2000 - 999 = 1001$, o tai yra, kaip nesunku matyti, daugiau negu kai kurie kiti galimi skirtumai, pavyzdžiui skirtumas $7128 - 6354 = 774$ yra mažesnis negu 1001. Taigi, kad skirtumas būtų pats mažiausias iš visų galimų, reikia kad atėminio tūkstančių skaičius būtų lygiai 1 vienetu didesnis už atimamojo skaičiaus tūkstančių skaitmenį. Tada skirtumas bus pats mažiausias, jeigu skaičius, kurį sudaro

paskutinieji 3 atėminio skaičiai, bus galimai pats mažiausias, tai yra 123, o skaičius, kurį sudaro trys atimamojo skaičiaus skaitmenys bus galimai pats didžiausias, tai yra 876. Nepanaudotieji skaičiai 5 ir 4 kaip tik ir skiriasi per 1. Todėl pats mažiausias skirtumas ir yra 5123 – 4876 = 247.
Atsakymas. Didžiausias skirtumas yra 7531, o pats mažiausias yra 247.

10. Į 3 x 3 lentelės langelius, po vieną skaičių į kiekvieną langelį įrašome po vieną teigiamą sveiką skaičių (įrašomi skaičiai nebūtinai skirtingi) taip, kad visų trijų eilučių ir visų trijų stulpelių skaičių sumos yra visos skirtingos. Kokia tada yra pati mažiausia galima visų 9 lentelės skaičių suma?

Sprendimas. Kadangi visi įrašomi skaičiai yra sveiki ir teigiami, tai pati mažiausia galima bet kurios eilutės ar stulpelio skaičių suma yra bent 3. Kadangi visų eilučių ir visų stulpelių skaičių sumos yra skirtingos, tai pažymėjus visų 9 visos lentelės skaičių sumą simboliu S, turėsime tokią nelygybę:

$$2S \geq 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$$

arba

$$S \geq 16{,}5.$$

Kadangi S yra natūralusis skaičius, tai $S \geq 17$.

Žemiau pateikiamas pavyzdys rodo, kad toks atvejis tikrai įmanomas:

1	1	1
1	4	4
2	2	1

Atsakymas. Pati mažiausia galima visos lentelės skaičių suma yra 17.

11. Duota akmenų krūva, kurios akmenų svoriai nebūtinai yra visi skirtingi. Yra žinoma, kad tą krūvą galima išdėti ir į penkias, ir į šešias pagal svorį lygias akmenų krūvas. Koks mažiausias akmenų skaičius gali būti tokioje akmenų krūvoje?

Sprendimas. Nesunku suvokti, kad 10 akmenų krūva, kurioje yra 5 akmenys po 50 gramų ir 5 akmenys po 10 gramų, tikrai tenkina uždavinio sąlygas.

Įrodysime, kad mažiau akmenų tokioje krūvoje negali būti. Tikrai, jeigu tokioje krūvoje yra mažiau negu 10 akmenų, tai jeigu mes išdėliosime jas į 5 vienodo svorio krūvas, to vienintelio akmens svoris, iš kurio tik ir susideda viena iš tų 5 krūvų, bus (1/5)X, kur X yra bendras visų krūvos akmenų svoris. Tačiau tada tokios akmenų krūvos negalima išdėlioti į šešias krūvas, kurių visų svoris yra 1/6X, kadangi į vieną iš jų patektų didesnio svorio akmuo (1/5)X .
Atsakymas. Krūvoje gali būti mažiausiai 10 akmenų.

12. 9 elektros lemputės yra išdėstytos „kvadratiniu būdu“:

☺☺☺
☺☺☺
☺☺☺

Visas aritmetizuotas miškas žino, kad kiekviena lemputė turi dvi priešingas būsenas: būseną „į“ ir būseną „iš“. Kiškutis Mikas Paikutis ar kitas įgaliotas žvėriukas gali letena spustelėti bet kurią lemputę.
Spustelėjus lemputę jos būsena „pereina į priešingą“: jeigu iki spustelėjimo lemputė buvo būsenoje „į“, tai po spustelėjimo ji bus būsenoje „iš“, ir atvirkščiai; be to, į priešingą būseną po spustelėjimo pereina visos ir tos eilutės, ir to stulpelio lemputės.
Pradžioje 9 lemputės buvo būsenoje „iš“. Koks yra mažiausias lempučių spustelėjimų skaičius, kuriuos turi padaryti kiškutis Mikas Paikutis, kad visos 9 lemputės atsidurtų būsenoje „į“?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 9 (E) to padaryti neįmanoma

Sprendimas. Antraštė išėjo ilgoka, o pats sprendimo aprašymas bus, kaip mums regisi, visiškai nepainus. Pirmiausiai sutarkime „išjungtą lemputės būseną“ žymėti, kiek paprasčiau, arba tiesiog minuso ženklu, o „įjungtą lemputės būseną“, atvirkščiai ir, kaip įprasta, daug optimistiškesniu pliuso ženklu.

Taip „skydelio“ būsena, kai visai viskas išjungta, atrodys taip:

–	–	–
–	–	–
–	–	–

Panašiai būsena, kai viskas įjungta, atrodys kaip pilna pliusų lentelė, arba, kitaip sakant, taip:

+	+	+
+	+	+
+	+	+

Mums beliko papasakoti, kaip kuo greičiausiai, o tai reiškia su kuo mažiausiai spustelėjimų, kurių kiekvienas liaudiškai sakant, apverčia lygiai 5 lempučių būsenas, padaryti taip, kad „ištisinių“ minusų lentelė (ta, kuri parodyta aukščiau) virstų „ištisinių“ pliusų lentele arba tokia, kuri yra parodyta žemiau“.
Dabar nurodysime būdą, kaip trimis spustelėjimais apversti lentelę. Būdo aprašas labai paprastas ir yra toksai – paimkime ir bet kuria eile nuspauskime visas tris, pavyzdžiui, pirmosios eilutės lemputes.
Galite dirstelėti, kas tada darysis: prieiname prie lentelės, randame

–	–	–
–	–	–
–	–	–

ir paspaudžiame kairiausią lemputę viršutinėje eilutėje – reakcija bus tokia, kokia ir buvo pranašauta – į priešingas būsenas pereis visos aukštutinės eilutės ir kairiausiojo stulpelio eilutės. Pasikeitęs vaizdas bus toks:

+	+	+
+	–	–
+	–	–

Dabar iš eilės spaudžiame aukščiausią vidurinio stulpelio lemputę. Aukštutinės eilutės lempučių būsenos „atvirsta atgal“ ir priešingomis pasikeičia likusios vidurinio stulpelio lempučių būsenos. Vaizdas po antrojo spustelėjimo bus toks:

–	–	–
+	+	–
+	+	–

Dabar paspaudus pačią dešiniausią viršutinės eilutės lemputę vaizdas ir bus toks, apie kurį mes svajojome ir prie kurio mes veržėmės, arba gauname lentelę vardu „vieni pliusai“:

+	+	+
+	+	+
+	+	+

Nuoširdžiai pripažįstame, kad toji viršutinė eilutė nėra niekuo greitesnė už kitas eilutes – ar net stulpelius. Kitais žodžiais šnekant visiškai tas pats galutinis rezultatas būtų buvęs pasiektas ir nuspaudus (ir net bet kuria eile, bet tik visas) antrosios eilutės lemputes. Tas pats būtų nutikę ir nuspaudus visas tris žemiausios eilutės lemputes.

Lygiai tas pats būtų buvę, jei būtume spaudinėję po tris bet kurio stulpelio lemputes. Belieka pasiklausti aritmetikos ir logikos specialistų, ko gi dar mums trūksta „iki pilnos matematinės laimės ir logikos triumfo“.

Atsakymas šiuo atveju yra visai aiškus – mums trūksta teisingo pasamprotavimo apie tai, kad greičiau mes visų minusų visais pliusais paversti niekaip negalėtume. Kadangi sugebame viską apversti trimis spustelėjimais, tai apversti greičiau, reikštų viską apversti vienu arba dviem spustelėjimais.

Vieno spustelėjimo tikrai per maža, nes vienas spustelėjimas teapverčia tik 5 lempučių būsenas, o jų skydelyje iš viso yra 9. Na o kaip būtų su dviem spustelėjimais? Dviem spustelėjimais jau galima paveikti 5 + 5, arba jau net 10 lempučių būsenas, o tai . daugiau negu 9. Deja, su 2 spustelėjimais nesusitvarkysime, nes galime tai paaiškinti net dviem būdais:

(a) Kad ir kaip bepaspaustume dvi skirtingas lemputes, visada rasis (bent viena) lemputė, kurios būsenos nekeičia nei vienas, nei kitas paspaudimas .

(b) Kad ir kaip bepaspaustume dvi skirtingas lemputes, visada rasis (bent viena) lemputė, kurios būseną pirmasis paspaudimas pakeičia į priešingą, o kitas „atkeičia atgal“ (ji lieka nepakitusi).

Atsakymas. Reikės mažiausiai 3 spustelėjimų.

13. Atnešusi kontrolinį darbą mokytoja pasakė, kad 15 mokinių gavo iš jo „4“ arba „5“, o mokinių skaičius, kurie gavo iš kontrolinio darbo „3“, yra 5-iais didesnis už tų, kurie gavo iš kontrolinio darbo „4“. Kiek mokinių dalyvavo kontroliniame darbe, jeigu visų jų gautųjų balų suma yra lygi 100. (Galimi įvertinimai yra: 2, 3, 4 ir 5).

Sprendimas. Simboliu x pažymėkime mokinių, kurie per kontrolinį gavo „4“. Tada pagal sąlygą „5“ gavo $15 - x$, o „3“ gavo $x + 5$ mokiniai. Todėl jeigu y yra „2“ gavusių mokinių skaičius, tai bendras kontrolinį rašiusių mokinių skaičius yra $(15 - x) + x + (x + 5) + y = 20 + x + y$, o jų gautųjų balų suma yra $5(15 - x) + 4x + 3(x + 5) + 2y = 90 + 2x + 2y) = 100$. Iš čia seka, kad $x + y = 5$ ir todėl kontrolinį darbą rašė $20 + x + y = 20 + 5 = 25$ mokiniai.

Atsakymas. Kontrolinį darbą rašė 25 mokiniai.

14. Petras nori įrašyti sveikuosius skaičius į visus lentelės 4 x 4 langelius po vieną skaičių į kiekvieną langelį taip, kad bet kurių trijų iš eilės einančių bet kurios eilutes ar bet kurio stulpelio skaičių būtų visada viena ir ta pati. Tris skaičius jis jau įrašė į lentelę tokiu būdu kaip tai yra parodyta šalia esančiame piešinyje.

	2		
			3
4			
		?	

Kokį skaičių Petras turėtų įrašyti į „?“ pažymėtą langelį?

Sprendimas. Tarkime, kad Petras turi įrašyti į vieną eilutę arba į vieną stulpelį keturis skaičius *a*, *b*, *c* ir *d* (išvardinta eile). Tada pagal sąlygą $a+b+c=b+c+d$, iš kur seka, jog $a=d$. Kitaip sakant, skaičiai, esantys vienoje eilutėje ar viename stulpelyje, bet skirtinguose jos kraštuose turi būti lygūs. Atskiru atveju pirmas skaičius antroje eilutėje turi būti lygus 3, o antras skaičius ketvirtoje eilutėje turi būti lygus 2.

Sakykime, kad pirmas skaičius ketvirtoje eilutėje yra lygus x, tada

	2		
3			3
4			
x	2	?	

Toliau mes matome, jog turi galioti nelygybė $x + 2 + ? = 3 + 4 + x$, iš kur seka, kad $? = (7 + x) - (x + 2) = 5$.
Atsakymas. 5.

15. Iš skaitmenų 2, 5 ir 8 buvo sudarytas 7-ženklis skaičius (pastebėsime, jog galėjo nutikti ir taip, kad kai kurių iš nurodytųjų skaitmenų sudarytame 7-ženkliame skaičiuje nėra). Ar gali tas sudarytasis skaičius dalintis iš 15?

Sprendimas. Pastebėkime, kad visi nurodytieji skaitmenys duoda liekaną 2, jeigu mes juos dalinsime iš 3. Todėl ir sudaromojo 7-ženklio skaičiaus skaitmenų suma nesidalins iš 3, nes ji turės pavidalą $3\cdot k + 7 \cdot 2 = 3 \cdot k + 14$ su tam tikru natūraliuoju *k*. Taigi pagal dalumo iš 3 požymį ir pats 7-ženklis skaičius nesidalija iš 3 ir tuo labiau jis nesidalija iš 15.
Atsakymas. Nurodytasis 7-ženklis skaičius negali dalintis iš 15.

16. Lygybėje MAMA · LĖ = 10 · LĖLĖ skirtingos raidės atitinka skirtingiems, o vienodos raidės – vienodiems skaitmenims. Nustatykite, kam galėtų būti lygus skaičius M + A.

Sprendimas. 4-ženklis skaičius MAMA yra sudarytas iš dviejų vienodų dalių MA, o kitas 4-ženklis skaičius LĖLĖ – iš dviejų vienodų dalių LĖ. Tai reiškia, jog keturženklis skaičius MAMA dalijasi iš dviženklio skaičiaus MA, o keturženklis skaičius LĖLĖ dalijasi iš dviženklio skaičiaus LĖ. Padalinę gausime

$$\text{MAMA} = \text{MA} \cdot 101 \quad \text{ir} \quad \text{LĖLĖ} = 101 \cdot \text{LĖ}.$$

Kitaip sakant,

$$\text{MA} \cdot 101 \cdot \text{LĖ} = 10 \cdot \text{LĖ} \cdot 101.$$

Suprastinę gauname MA = 10, o tai reiškia, kad M + A = 1 + 0 = 1.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Jonas lygiomis dienos porcijomis statinaitę giros išgertų per 10 dienų, o Andrius – per 14 dienų. Per kiek dienų jie išgertų statinaitę giros gerdami abudu kartu?

2. Petras norėtų pirkti knygą, bet jis visai neturi pinigų. Todėl jis kreipėsi pagalbos į tėtį ir į du savo brolius – jaunesnįjį ir vyresnįjį ir jų padedamas jis tą knygą nusipirko. Yra žinoma, jog jo tėtis davė pusę tos sumos, kurią davė abudu Petro broliai, vyresnysis brolis davė trečiąją dalį to, ką davė tėtis ir jaunesnysis brolis, kuris tiesiog iš karto davė 10 eurų. Kiek gi kainuoja ta knyga?

3. Koks yra pats mažiausias natūralusis skaičius, kurį galima dviem būdais užrašyti trijų natūraliųjų skaičių suma taip, jog visi 6 dėmenys yra skirtingi.

4. Raskite tris iš eilės einančius natūraliuosius skaičius, kad jų suma baigtųsi skaičiumi 2023. Koks yra toksai pats mažiausias tokių skaičių trejetas?

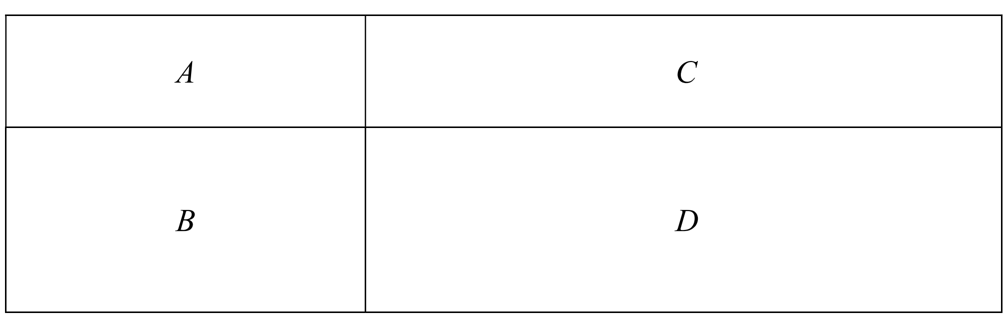
5. Tenisininkas Petras skaičiuoja savo laimėtų mačų (nuo visų jo sužaistųjų mačų) procentą. Prieš paskutinį turnyrą, kuriame Petras laimėjo visus mačus, tas procentas buvo lygiai 25 procentai, o po to paskutinio turnyro jis pasidarė lygus lygiai 75 procentams.

Nustatykite, kelis kartus visų Petro paskutiniame turnyre laimėtų mačų skaičius yra didesnis už jo visų iki to turnyro jo sužaistų (laimėtų ir pralaimėtų) mačų skaičių.

6. Ar galima į kvadratinės lentelės 5 x 5 langelius įrašyti visus skaičius nuo 1 iki 25 (po vieną skaičių į kiekvieną langelį) taip kad skaičių suma kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir abiejose įstrižainėse būtų nelyginė?

7. Į kiekvieną lentelės 3 x 3 langelį įrašyta po teigiamą skaičių tokiu būdu, kad visų trijų kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio skaičių sandauga yra lygi 1, o visų keturių bet kurio 2 x 2 kvadrato skaičių sandauga yra lygi 2. Nustatykite, koks skaičius yra įrašytas centriniame lentelės langelyje.

8. Mokytojas nupiešė lentoje stačiakampį ir padalino jį į 4 mažesnius stačiakampius *A*, *B*, *C* ir *D* (žiūrėkite piešinį).



Tada mokytojas pakvietė prie lentos Martyną ir pasiūlė jam išspręsti tokį uždavinį: „Tarp skaičių 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 18 kažkurie keturi skaičiai reiškia stačiakampių A, B, C ir D plotus; be to, dar yra žinoma, kad tie visi plotai yra skirtingi. Ar galėtum nurodyti, kokie yra tie 4 skaičiai?“

Padėkite Martynui išspręsti mokytojo jam pasiūlytą uždavinį. Ar tai padaryti yra įmanoma?

9. Tėvas parnešė sūnui 4 natūraliuosius skaičius ir paprašė sūnaus visaip sudėti juos po du skirtingus skaičius visais galimais būdais. Sūnus sudėjo ir pradėjo 6-šias gautąsias sumas rašyti iš eilės. Jis tespėjo užrašyti tik 5-ias iš 6-ių gautųjų sumų

$$10, 12, 14, 16, 17,$$

kai tėvas, pasižiūrėjęs, ką jis ten rašo, pasakė, kad jis bus kažką sumaišęs. Kuris iš jų yra teisus?

10. Utopijos fermoje fermeris Svajūnas turi lauką, kuriame esančios žolės kiekis kasdien padidėja po tiek pat. Šešioms karvėms užtruktų 3 pilnas dienas nuėsti visą viso lauko žolės kiekį, o trys karvės tą patį padarytų per 7 pilnas dienas. Laikant, kad fermerio Svajūno karvės suėda visos kasdien po tiek pat šieno, kiek laiko užtruktų 1 karvei nuėsti visą to lauko šieną?

VII. DIOFANTINĖS LYGTYS

Teorinę medžiagą parengė bei septintąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Aivaras Novikas

Prisiminkime: kintamojo x **daugianariu** (arba polinomu) vadinamas reiškinys, turintis pavidalą $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, taigi gaunamas kintamojo x laipsnius su neneigiamais sveikaisiais rodikliais ($x^0 = 1, x^1 = x, x^2, x^3$ ir t. t. iki kurio nors x^n) padauginant iš duotų skaičių – konstantų (atitinkamai iš a_0, a_1, a_2, a_3 ir t. t. iki a_n) ir tokias sandaugas sudedant. Prilygindami daugianarį skaičiui 0, gauname **algebrinę lygtį** su nežinomuoju x. Panašiai galima gauti ir **algebrinę lygtį su keliais nežinomaisiais**: tų nežinomųjų laipsniai su neneigiamais sveikaisiais rodikliais bet kaip dauginami tarpusavyje ir dar dauginami iš konstantų, o tokių sandaugų suma prilyginama skaičiui 0. Pavyzdžiui, $x^4 + 11xy^3 - x + 2y + 5 = 0$ yra algebrinė lygtis su nežinomaisiais x ir y, o $11x_1^3x_2^2 + x_2^2 - 6x_3^5x_1^7 - 3x_1^5x_2x_3^8 - x_2x_3 - 4x_1 + 7 = 0$ yra algebrinė lygtis su nežinomaisiais x_1, x_2 ir x_3.

Algebrinės lygties **koeficientai** yra tos konstantos, iš kurių padaugintos nežinomųjų laipsnių sandaugos. Pavyzdžiui, lygties $x^4 + 11xy^3 - x + 2y + 5 = 0$ koeficientai yra $1, 11, -1, 2, 5$. Bendru atveju koeficientai gali būti bet kokie realieji skaičiai. Čia nagrinėsime tik algebrines lygtis, kurių koeficientai yra sveikieji skaičiai, o nežinomųjų reikšmės taip pat nagrinėjamos tik sveikosios, t. y. lygtį norima išspręsti ne bet kokiais, o tik sveikaisiais skaičiais. Tokios algebrinės lygtys vadinamos **diofantinėmis**. Taip pat diofantinėmis vadinsime tas lygtis, kurių dešinėje pusėje yra nenulinių narių, tačiau kurios įgyja reikiamą algebrinės lygties su sveikaisiais koeficientais pavidalą, visus narius perkėlus į kairiąją lygybės pusę. Išspręsti diofantinę lygtį reiškia rasti visus jos sveikuosius sprendinius arba įrodyti, kad jų nėra. Sprendžiant tokias lygtis, yra svarbūs sveikieji skaičiai ir jų dalumo savybės. Todėl diofantinės lygtys priskiriamos ne algebrai, bet kitai matematikos sričiai – skaičių teorijai.

1 pavyzdys. Kad išspręstume diofantinę lygtį $x^2 + 4x - 5y - 2024 = 0$, pasiremsime ne tik algebriniu lygties pertvarkymu – pilnojo kvadrato išskyrimu

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 - 5y - 2024 = 0, \qquad (x+2)^2 = 5y + 2028,$$

bet ir dalumo iš 5 savybėmis. Sveikojo skaičiaus kvadratas $(x+2)^2$ turi dalytis iš 5 su ta pačia liekana kaip $5y + 2025 + 3$, taigi su liekana 3. Jei $x + 2$ dalijasi iš 5 su liekana r, tai pažymėkime $x + 2 = 5k + r$ (skaičius k sveikasis). Tada skaičiaus $(x+2)^2 = 25k^2 + 10kr + r^2$ dalybos iš 5 liekana 3 tokia pati kaip skaičiaus r^2. Tačiau čia $r = 0, 1, 2, 3$ arba 4 (dalybos iš 5 liekana negali būti kitokia), ir jokiu atveju r^2 dalybos iš 5 liekana nėra lygi 3. Vadinasi, duotoji diofantinė lygtis **sprendinių neturi** (prisiminkime, kad ieškome tik sveikųjų sprendinių (x, y)).

2 pavyzdys. Analogiškai (žr. 1 pavyzdį) spręsdami diofantinę lygtį $x^2 + 4x - 5y - 2027 = 0$, taigi lygtį $(x+2)^2 = 5y + 2031$, galime atmesti r reikšmes 0, 2 ir 3 (tada r^2 dalijasi iš 5 su kita liekana nei skaičius $5y + 2030 + 1$). Lieka du atvejai $x + 2 = 5k + 1$ ir $x + 2 = 5k + 4$. Pirmuoju atveju $x = 5k - 1$,

$$(5k+1)^2 = 5y + 2031, \qquad 5y = 25k^2 + 10k + 1 - 2031, \qquad y = 5k^2 + 2k - 406.$$

Analogiškai antruoju atveju $x = 5k + 2$, $y = 5k^2 + 8k - 403$. Čia k yra bet koks sveikasis skaičius. Taip gauname **atsakymą** – be galo daug lygties sprendinių

$$(x, y) = (5k - 1,\ 5k^2 + 2k - 406),\ k \in \mathbb{Z}, \quad \text{ir} \quad (x, y) = (5k + 2,\ 5k^2 + 8k - 403),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Jei norėtume gauti vieną konkretų lygties sprendinį – **atskirąjį sprendinį**, tai pakaktų pasirinkti konkrečią k reikšmę. Pavyzdžiui, $(x, y) = (5 \cdot 3 - 1,\ 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 406) = (14, -355)$ ir $(x, y) = (5 \cdot (-10) + 2,$ $5 \cdot (-10)^2 + 8 \cdot (-10) - 403) = (-48,\ 17)$ yra duotosios lygties atskirieji sprendiniai.

Net paprastai atrodančios diofantinės lygtys gali būti labai sudėtingos. Pavyzdžiui, labai sunkus įrodyti toks teiginys, vadinamas Didžiąja Ferma teorema: jokia diofantinė lygtis $x^n + y^n = z^n$, kur $n > 2$ yra duotas natūralusis skaičius, neturi kitų sprendinių, išskyrus akivaizdžius sprendinius, kuriems vienas iš nežinomųjų lygus 0. Nors šis teiginys buvo suformuluotas apie 1637 m., bet lygčiai $x^5 + y^5 = z^5$ jis buvo įrodytas tik 1825 m., o visoms n reikšmėms – tik 1994 m. ir tik naudojant pačią šiuolaikiškiausią aukštąją matematiką. Tuo tarpu lygtis $x^5 + y^5 = z^5 + t^5$ vis dar neišspręsta ir 2023 m.

Visgi kai kurias diofantines lygtis išspręsti nėra taip sunku. Galima net išskirti kai kuriuos lygčių tipus ir lygčių sprendimo būdus, tinkamus visoms to paties tipo lygtims. Čia apsiribosime lygtimis su dviem nežinomaisiais x ir y. Visų pirma, panagrinėkime **tiesines** diofantines lygtis – tokias, kurios gaunamos kiekvieno nežinomojo pirmąjį laipsnį padauginus iš konstantos ir tokių sandaugų sumą prilyginus konstantai. Tiesinė lygtis su nežinomaisiais x ir y turi pavidalą $ax + by = c$.

3 pavyzdys. Išspręskime tiesinę diofantinę lygtį $16x + 7y = 1$. Gana lengva atspėti jos atskirąjį sprendinį: tikrindami galimas $16x$ reikšmes ± 16, ± 32, ± 48, ..., pastebėkime, kad skaičius $48 = 16 \cdot 3$ nuo $7 \cdot 7 = 49$ skiriasi per 1. Pagal lygybę $-16 \cdot 3 + 7 \cdot 7 = 1$ gauname lygties sprendinį $(x_0, y_0) = (-3, 7)$. Kad rastume visus sprendinius, taip pertvarkykime duotąją lygtį:

$$16x + 7y = -16 \cdot 3 + 7 \cdot 7, \qquad 16x + 16 \cdot 3 = 7 \cdot 7 - 7y, \qquad 16(x+3) = 7(7-y).$$

Kadangi skaičiai 16 ir 7 yra tarpusavyje pirminiai (jų didžiausias bendrasis daliklis lygus 1), tai $x+3$ turi dalytis iš 7. Pažymėkime $x + 3 = 7k$. Tada $x = 7k - 3$, $16 \cdot 7k = 7(7-y)$, $16k = 7 - y$, $y = -16k + 7$. Čia k yra bet koks sveikasis skaičius.

Ats.: $(x, y) = (7k - 3, -16k + 7)$, $k \in \mathbb{Z}$.

4 pavyzdys. Išspręskime tiesinę diofantinę lygtį $156975x + 51317y = c$, kai $c = 13$ ir kai $c = 14$. Atskirojo sprendinio lengvai atspėti čia greičiausiai nepavyks. Kad jį rastume, pažymėkime $a = 156975$, $b = 51317$. Pradėkime nuo šių dviejų skaičių ir toliau vis keiskime juos tokiu veiksmu: vienas skaičius dalijamas iš kito su liekana ir yra pakeičiamas gautąja dalybos liekana. Veiksmas kartojamas, kol gaunama liekana 0. Pirmuoju tokiu veiksmu didesnį skaičių a dalijame iš mažesnio skaičiaus b: dalmuo lygus 3, todėl liekana lygi $a - 3b = 3024$. Dabar turime skaičius b ir $a - 3b$. Antruoju veiksmu dalijame b iš $a - 3b$: dalmuo lygus 16, todėl liekana lygi $b - 16(a - 3b) = 49b - 16a = 2933$. Toliau dalijame

- $a - 3b$ iš $49b - 16a$: dalmuo 1, liek. $(a - 3b) - (49b - 16a) = 17a - 52b = 91$;
- $49b - 16a$ iš $17a - 52b$: dalmuo 32, liek. $(49b - 16a) - 32(17a - 52b) = 1713b - 560a = 21$;
- $17a - 52b$ iš $1713b - 560a$: dalmuo 4, liek. $(17a - 52b) - 4(1713b - 560a) = 2257a - 6904b = 7$;
- pagaliau, dalydami 21 iš 7, gauname liekaną 0.

Analogišką kaip šiame pavyzdyje veiksmų seką galima atlikti, turint bet kokius pradinius sveikuosius skaičius a ir b (jei jie būtų neigiami, vietoj jų imtume jų modulius). Yra įrodyta: kad ir kokie būtų a ir b, taip gauta paskutinė nenulinė liekana yra ne kas kita, bet skaičių a ir b didžiausias bendrasis daliklis $\mathrm{DBD}(a, b)$. Toks jo radimo būdas vadinamas **Euklido algoritmu**. Tiesinės diofantinės lygties $ax + by = c$ kairioji pusė visada dalijasi iš $\mathrm{DBD}(a, b)$, todėl tokia lygtis neturi sprendinių, kai c iš $\mathrm{DBD}(a, b)$ nesidalija.

Mūsų atveju $\mathrm{DBD}(a, b) = 7$, tad duotoji lygtis $156975x + 51317y = 13$ sprendinių neturi. Tuo tarpu atveju $c = 14$ atskirąjį sprendinį gauname, lygybę $2257a - 6904b = 7$ padauginę iš 2:

$$4514a + (-13808)b = 14, \qquad (x_0, y_0) = (4514, -13808).$$

Turint atskirąjį sprendinį, visus sprendinius toliau galima rasti panašiai kaip 3 pavyzdyje. Tik čia lygtį būtina padalyti iš $\mathrm{DBD}(a, b) = 7$: taip vietoj a ir b gausime skaičius $\frac{a}{7} = 22425$ ir $\frac{b}{7} = 7331$, kurie yra tarpusavyje pirminiai (3 pavyzdyje buvo svarbu, kad $\mathrm{DBD}(7, 16) = 1$). Taigi

$$156975x + 51317y = 14 = 156975 \cdot 4514 + 51317 \cdot (-13808) \ \ |:7,$$
$$22425x + 7331y = 22425 \cdot 4514 + 7331 \cdot (-13808),$$
$$22425(x - 4514) = 7331(-y - 13808), \qquad x - 4514 = 7331k, \qquad \text{tada } -y - 13808 = 22425k.$$

Ats.: $\emptyset$, kai $c = 13$; $(x, y) = (7331k + 4514, -22425k - 13808)$, kur $k \in \mathbb{Z}$, kai $c = 14$.

Toliau nagrinėsime diofantines lygtis su nežinomaisiais x ir y, kuriose be narių, randamų tiesinėse lygtyse, dar gali būti antrojo laipsnio nariai x^2, y^2 ir xy, padauginti iš konstantų, taigi nagrinėsime lygtis, kurioms galima suteikti pavidalą

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Jei čia $a = b = c = 0$, tai lygtis tiesinė. Priešingu atveju tokia diofantinė lygtis vadinama **kvadratine**.

5 pavyzdys. Lengva išspręsti diofantinę lygtį $xy = 20$. Čia x turi būti sveikasis skaičius, iš kurio dalijasi skaičius 20. Taigi $x = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$ ir atitinkamai $y = \pm 20, \pm 10, \pm 5, \pm 4, \pm 2, \pm 1$. Taigi lygtis turi 12 sprendinių – tiek, kiek skaičius 20 turi (sveikųjų) daliklių.

Diofantinė lygtis $xy = 720$ turi daugiau sprendinių. Jų nevardysime, bet išsiaiškinkime, kiek jų yra. Kadangi skaičiaus 720 skaidinys pirminiais daugikliais yra $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, tai visus jo teigiamus daliklius gausime, reiškinyje $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ laisvai pasirinkdami tokias reikšmes: $a = 0, 1, 2, 3$ arba 4; $b = 0, 1$ arba 2; $c = 0$ arba 1. Skaičių a galime pasirinkti 5 būdais, skaičių b – trimis būdais, skaičių c – dviem būdais. Tad gauname $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ teigiamų daliklių – ir dar tiek pat neigiamų. Vadinasi, skaičius 720 turi iš viso 60 daliklių, o lygtis $xy = 720$ turi 60 sprendinių.

6 pavyzdys. Išspręskime diofantinę lygtį $3xy - y = 20$. Užrašykime ją pavidalu $y(3x - 1) = 20$. Taigi skaičiai y ir $3x - 1$ yra skaičiaus 20 dalikliai (plg. su 5 pavyzdžio lygtimi $xy = 20$). Šiuo atveju sprendinių yra mažiau nei 12, nes ne visi dalikliai tinka kaip $3x - 1$ reikšmės. Prie tinkamos daliklio reikšmės pridėjus skaičių 1, turi išeiti skaičius $3x$, dalus iš 3. Todėl tinka tik $3x - 1 = -1, 2, -4, 5, -10$ ir 20. Kiekvienu iš 6 atvejų randame $x = (3x - 1 + 1) : 3$ ir $y = 20 : (3x - 1)$.

Ats.: $(x, y) = (0, -20), (1, 10), (-1, -5), (2, 4), (-3, -2), (7, 1)$.

7 pavyzdys. Išspręskime diofantinę lygtį $5xy - 2x + 3y - 10 = 0$. Ją vėlgi pertvarkykime, kad matytųsi konkretus skaičius, kurio daliklius pakaks perrinkti. Pirmiausiai iškelkime prieš skliaustus x:

$$x(5y-2)+3y-10=0.$$

Vienur lygtyje turime $5y-2$, o kitur $3y$. Kad ir čia gautume $5y-2$, padauginkime lygtį iš 5:

$$5x(5y-2)+3\cdot 5y-50=0, \qquad 5x(5y-2)+3(5y-2)+2\cdot 3-50=0,$$
$$(5x+3)(5y-2)=44=2^2\cdot 11, \qquad 5x+3=\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 11, \pm 22, \pm 44.$$

Tinka tik $5x+3=-2$ ir -22. Atitinkamai $5y-2=-22$ ir -2. Liko išreikšti x ir y.

Ats.: $(x,y)=(-1,-4), (-5,0)$.

8 pavyzdys. Nustatykime, kiek sprendinių turi diofantinė lygtis $xy-7x+8y-2081=0$ (jų neišvardydami). Pertvarkykime lygtį taip:

$$x(y-7)+8y-2081=0, x(y-7)+8(y-7)+8\cdot 7-2081=0,$$
$$(x+8)(y-7)=2025=25\cdot 81=5^2\cdot 3^4.$$

Pažymėkime $X=x+8$, $Y=y-7$. Diofantinė lygtis $XY=2025$ turi tiek sprendinių, kiek skaičius 2025 turi daliklių. Kiekvieną sprendinį (X,Y) atitinka lygiai vienas pradinės lygties sprendinys $(x,y)=$ $=(X-8, Y+7)$. Taigi liko suskaičiuoti skaičiaus 2025 daliklius. Tai visi įmanomi skaičiai $\pm 5^a\cdot 3^b$, kur $a=0$, 1 arba 2, o $b=0$, 1, 2, 3 arba 4. Turime $3\cdot 5$ tokius teigiamus daliklius, o iš viso $2\cdot 3\cdot 5=30$ daliklių bei atitinkamai 30 sprendinių.

Ats.: 30 sprendinių.

9 pavyzdys. Išspręskime diofantinę lygtį $3x^2+5xy-7x+y+7=0$. Šioje kvadratinėje lygtyje nėra nario ... y^2. Sugrupuokime narius, kuriuose yra y, o likusius narius perkelkime į kitą lygybės pusę:

$$y(5x+1)=-3x^2+7x-7.$$

Taigi čia iš esmės turime rasti tas sveikąsias x reikšmes, kurioms $-3x^2+7x-7$ dalijasi iš $5x+1$. Pažymėkime $a=5x+1$. Tam, kad reiškinį $-3x^2+7x-7$ galėtume patogiai, be trupmenų išreikšti per a, jį padauginkime iš 5^2:

$$25ay=25y(5x+1)=-3\cdot 5^2\cdot x^2+7\cdot 5^2\cdot x-5^2\cdot 7=-3\cdot(5x)^2+35\cdot 5x-175=$$
$$=-3(a-1)^2+35(a-1)-175=-3a^2+6a-3+35a-35-175=-3a^2+41a-213.$$

Kadangi $-3a^2+41a-213$ turi dalytis iš $a=5x+1$, tai turi dalytis ir skaičius $213=3\cdot 71$ (skaičius 71 pirminis). Taigi $5x+1=\pm 1, \pm 3, \pm 71, \pm 213$. Tinka tik $5x+1=1$ ir $5x+1=71$. Tada atitinkamai $x=0$ ir $x=14$, o $y=\frac{-3x^2+7x-7}{5x+1}$ lygu -7 abiem atvejais.

Ats.: $(x,y)=(0,-7), (14,-7)$.

10 pavyzdys. Išspręskime diofantines lygtis a) $x^2+5y^2=129$; b) $x^2+5y^2=13129139$.

a) Lygtis tampa lengva pastebėjus, kad visada $x^2+5y^2\geq 5y^2$ ir todėl pakanka patikrinti tik tas y reikšmes, kurioms $129\geq 5y^2$. Gali tikti tik $y=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$, o jei $|y|\geq 6$, tai $5y^2>129$. Lygtyje įrašę $y^2=0$, 1, 4, 9, 16, 25, sveikąją x reikšmę gauname, kai $y^2=16$ ir 25. Atitinkamai $x^2=7^2$ ir 2^2. Visais įmanomais būdais pasirinkdami x ir y ženklus, gauname aštuonis sprendinius.

Ats.: $(x,y)=(7,\pm 4), (-7,\pm 4), (2,\pm 5), (-2,\pm 5)$.

b) Jei a) dalies lygtyje skaičių 129 pakeisime skaičiumi 123, tai lygtis sprendinių neturės. Tai ir vėl galima patikrinti, atliekant reikšmių perranką. Turint skaičių 13129139, tokia perranka užtruktų ilgiau. Tačiau čia be jokios perrankos galima įrodyti, kad atitinkama lygtis sprendinių neturi. Tam pakanka pastebėti, kad sveikojo skaičiaus kvadratas visada dalijasi iš 4 su liekana 0 arba 1. Iš tiesų, jei sveikasis skaičius a lyginis, tai skaičius a^2 dalijasi iš 4, o jei nelyginis, tai iš 4 dalijasi $a^2-1=(a-1)(a+1)$, nes lyginiai yra abu skaičiai $a-1$ ir $a+1$. Taigi x^2+y^2 dalybos iš 4 liekana gali būti $0+0=0$, $0+1=1$ arba $1+1=2$. Ji sutampa su $x^2+5y^2=x^2+y^2+4y^2$ dalybos iš 4 liekana, bet negali būti lygi skaičiaus 13129139 dalybos iš 4 liekanai 3. Todėl diofantinė lygtis $x^2+5y^2=13129139$ sprendinių neturi.

Ats.: $\emptyset$.

11 pavyzdys. Išspręskime diofantines lygtis a) $x^2-25y^2=119$; b) $x^2-25y^2=1191122$.

a) Duotosios lygties analogiškai kaip $x^2+5y^2=129$ neišspręsime, bet vietoj to galime pasinaudoti kvadratų skirtumo formule:

$$(x-5y)(x+5y)=119=7\cdot 17, \text{ taigi } x-5y=\pm 1, \pm 7, \pm 17, \pm 119 \text{ (aštuoni atvejai).}$$

Jei, pavyzdžiui, $x-5y=-7$, tai $x+5y=-17$ ir turime dviejų lygčių sistemą su dviem nežinomaisiais. Ją išsprendę, gauname $x=-12$, $y=-1$. Likusius septynis atvejus galima išnagrinėti analogiškai. Keturiais iš jų gaunamas sprendinys nėra sveikasis (skaičių $x+5y$ ir $x-5y$ skirtumas $10y$ išeina nedalus iš 10). Tad duotoji lygtis turi keturis sprendinius.

Ats.: $(x,y)=(-12,\pm 1), (12,\pm 1)$.

b) Kitaip nei a) dalyje, čia skaičiaus 1191122 daliklių neieškosime ir neperrinkinėsime. Galima įrodyti, kad lygtis sprendinių neturi, pasinaudojus dalumo iš 4 savybėmis (plg. su 10 pavyzdžio b) dalimi). Skaičius 1191122 turi būti lygus skaičių $x-5y$ ir $x+5y$ sandaugai. Šių dviejų skaičių suma $2x$ yra lyginis skaičius, todėl jie abu yra lyginiai arba abu yra nelyginiai. Pirmuoju atveju jų sandauga 1191122 turėtų dalytis iš 4, bet nesidalija, antruoju atveju – turėtų nesidalyti iš 2, bet dalijasi. Gautoji prieštara parodo, kad lygybė $x^2 - -25y^2 = 1191122$ negalioja jokiems sveikiesiems x ir y.

Ats.: $\emptyset$.

12 pavyzdys. Įrodykime, kad diofantinė lygtis $x^2-3y^2=29$ neturi sprendinių. Čia anksčiau naudotas dalumas iš 4 nepadės. Prieštarą gausime, naudodami dalumą iš kito skaičiaus. Skaičius x^2 turi dalytis iš 3 su ta pačia liekana kaip 29, taigi su liekana 2. Jei x dalijasi iš 3 su liekana r, tai pažymėkime $x=3k+r$ (skaičius k sveikasis). Tada skaičiaus $x^2=9k^2+6kr+r^2$ dalybos iš 3 liekana tokia pati kaip skaičiaus r^2. Tačiau čia $r=0$, 1 arba 2, ir jokiu atveju r^2 dalybos iš 3 liekana nėra lygi 2. Atkreipsime dėmesį, kad analogiškai prieštarą buvo galima gauti ir 11 pavyzdžio b) dalyje, nagrinėjant dalybos iš 5 liekanas.

Nagrinėkime bet kokią diofantinę lygtį $x^2-dy^2=N$, kur $d>0$ ir N yra duoti skaičiai, o skaičius d nėra sveikojo skaičiaus kvadratas (jei būtų, tai lygtį būtų galima spręsti kaip 11 pavyzdžio a) dalyje). Yra įrodyta, kad jei tokia lygtis turi bent vieną sprendinį $(x,y)=(x_0,y_0)$, tai turi jų be galo daug. Be to, kiek norima didelių natūraliųjų tokios lygties sprendinių galima gauti taip:

1) nagrinėjama lygtis $x^2-dy^2=1$ ir randamas jos natūralusis sprendinys $(x,y)=(a,b)$; tokia lygtis turi akivaizdų sprendinį $(1,0)$, bet jis nėra natūralusis; visgi yra įrodyta, kad reikiamas natūralusis sprendinys visada egzistuoja, o bandyti jį atspėti galima, iš eilės perrenkant galimybes $y=1, 2, 3, \ldots$;

2) turint $x^2-dy^2=N$ natūralųjį sprendinį (x_0,y_0), nagrinėjami reiškiniai $\left(x_0+y_0\sqrt{d}\right)\cdot\left(a+b\sqrt{d}\right)^n$, kai $n=1, 2, 3, \ldots$; pasirinkus konkrečią n reikšmę ir tokį reiškinį atskliautus bei suprastinus, gaunama išraiška $x_n+y_n\sqrt{d}$; tada (x_n,y_n) yra $x^2-dy^2=N$ sprendinys; didinant n, gaunami kiek norima dideli x_n ir y_n.

Čia 2) dalį pagrindžia toks pastebėjimas: nurodytu būdu gavus $x_n+y_n\sqrt{d}=\left(x_0+y_0\sqrt{d}\right)\cdot\left(a+b\sqrt{d}\right)^n$, teisinga yra ir analogiška lygybė su pakeistais ženklais $\left(x_0-y_0\sqrt{d}\right)\cdot\left(a-b\sqrt{d}\right)^n=x_n-y_n\sqrt{d}$, o sudauginę abi lygybes, gauname

$$x_n^2-dy_n^2=(x_0^2-dy_0^2)\cdot(a^2-db^2)^n=N\cdot 1^n=N.$$

Dalyje 1) naudojama pagalbinė lygtis $x^2-dy^2=1$ (skaičius d natūralusis, bet nėra sveikojo skaičiaus kvadratas) vadinama **Pelio lygtimi**. **Yra įrodyta**, kad jos **visi** natūralieji sprendiniai gaunami kaip poros (x_n,y_n), kur $x_n+y_n\sqrt{d}=\left(a+b\sqrt{d}\right)^n$, kai $n=1, 2, 3, \ldots$, o (a,b) yra šios lygties natūralusis sprendinys su mažiausiu galimu $y=b$.

13 pavyzdys. Raskime diofantinės lygties $x^2-3y^2=73$ sprendinį (x,y), kuriam $x>50$. Tikrindami $y=1, 2, \ldots$, pirmiausiai pastebėkime, kad ši lygtis apskritai turi sprendinių: kai $y=3$, galima imti $x=10$. Taigi $(x_0,y_0)=(10,3)$. Savo ruožtu lygtis $x^2-3y^2=1$ turi lengvai atspėjamą natūralųjį sprendinį $(2,1)$. Tada be galo daug lygties $x^2-3y^2=73$ sprendinių gauname, imdami skaičius $\left(10+3\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^n$:

$$x_1+y_1\sqrt{3}=\left(10+3\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=29+16\sqrt{3},$$

$$x_2+y_2\sqrt{3}=\left(29+16\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=106+61\sqrt{3}\ \text{ ir t. t.}$$

Kaskart daugindami iš $2+\sqrt{3}$, gauname vis didesnius sprendinius $(29,16)$, $(106,61)$, $(395,228)$, ...

Ats.: pavyzdžiui, $(x,y)=(106,61)$ arba $(x,y)=(395,228)$.

14 pavyzdys. Jau matėme, kad kartais verta pertvarkyti turimą diofantinę lygtį, išskiriant pilnąjį kvadratą. Tuo pasinaudodami, išspręskime lygtis

a) $6x^2+10xy+5y^2+14x-80=0$; b) $x^2-y^2-x+7y-8=0$.

a) Lygtyje galima įžvelgti pilnąjį kvadratą $5y^2+10xy+5x^2=5(x+y)^2$. Pertvarkytoje lygtyje išskirkime dar vieną pilnąjį kvadratą:

$$0=5(x+y)^2+x^2+14x-80=5(x+y)^2+x^2+2\cdot 7x+7^2-7^2-80,$$

$$(x+7)^2+5(x+y)^2=129.$$

Pažymėję $X=x+7,\ Y=x+y$, gauname lygtį $X^2+5Y^2=129$. Ją jau esame išsprendę (žr. 10 pavyzdį). Tinka $(X,Y)=(7,\pm 4)$, $(-7,\pm 4)$, $(2,\pm 5)$, $(-2,\pm 5)$. Atitinkamai gauname pradinės lygties 8 sprendinius (x,y) pagal formules $x=X-7$ ir $y=Y-x$.

Ats.: $(x,y)=(0,\pm 4)$, $(-14,18)$, $(-14,10)$, $(-5,10)$, $(-5,0)$, $(-9,14)$, $(-9,4)$.

b) Koeficientai prie x ir y nelyginiai, tad išskirdami pilnuosius kvadratus (atskirai pagal x ir y) ir imdami narius $-x$ ir $7y$ kaip dvigubas sandaugas, neišvengtume trupmenų. Jų išvengsime, padauginę lygtį iš 4:

$$(2x)^2-4x-(2y)^2+28y-32=0,$$

$$(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 1+1^2-1^2-(2y)^2+2\cdot 2y\cdot 7-7^2+7^2-32=0,$$

$$(2x-1)^2 - 1 - (2y-7)^2 + 49 - 32 = 0, \quad (2x-1)^2 - (2y-7)^2 = -16,$$
$$(2x-2y+6)(2x+2y-8) = -16, \quad (x-y+3)(x+y-4) = -4.$$

Taigi $x - y + 3 = \pm 1$, ± 2, ± 4. Atitinkamai $x + y - 4 = \mp 4$, ∓ 2, ∓ 1. Pavyzdžiui, jei $x - y + 3 = 1$, tai turime $x + y - 4 = -4$, o sudėję šias dvi lygybes, randame $2x - 1 = -3$ ir $x = -1$, $y = 1$. Analogiškai randame dar penkis sprendinius. Du iš jų nėra sveikieji (kai $x - y + 3 = \pm 2$), tad iš viso turime keturis sveikuosius sprendinius.

Ats.: $(x, y) = (-1, 1), (2, 6), (2, 1), (-1, 6)$.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1–7 uždaviniai. Išspręskite diofantines lygtis:

1. a) $x^2 - 7y - 17 = 0$;
b) $x^2 - 2x - 7y - 1107 = 0$;

2. a) $15x + 11y = 1$; b) $15x + 21y = 1$;

3. $225563x + 53313y = 39$;

4. $3xy + x - 2y - 29 = 0$;

5. $2x^2 - 7xy + x - 2y - 3 = 0$;

6. a) $x^2 + 9y^2 = 77777779$;
b) $4x^2 + 6xy + 3y^2 - 2x - 48 = 0$;

7. a) $x^2 - y^2 + 3x - 5y + 24 = 0$;
b) $x^2 - 5y^2 = 3$.

Užuomina. Uždaviniuose su a) ir b) dalimis viena iš dviejų lygčių neturi sprendinių.

8. Nustatykite diofantinės lygties $xy - 4x + 11y - 2024 = 0$ sprendinių skaičių.

9. Pasinaudodami Pelio lygtimi, raskite diofantinės lygties $x^2 - 7y^2 = 2$ sprendinį, kuriam $x > 800$.

10. Tarkime, kad $(x, y) = (A, B)$ yra diofantinės lygties $x^2 - 5y^2 - 12x + 35 = 0$ natūralusis sprendinys. Nustatykite keturias mažiausias galimas skaičiaus *A* reikšmes. *Užuomina*. Čia galima pertvarkyti duotąją lygtį ir pasiremti žinomais faktais apie Pelio lygtį.

VIII. LOGARITMINĖS LYGTYS IR NELYGYBĖS

Teorinę medžiagą parengė ir aštuntąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis (Vilniaus universitetas)

Šios temos turinį lengva nuspėti iš paties pavadinimo. Tuo labiau, kad logaritmai gana išsamiai nagrinėjami kiekvienoje gimnazijoje.

Taigi kalbėsime apie lygčių ir nelygybių, vienaip ar kitaip susijusių su logaritmais, sprendimą. Apsiribosime teorinėmis žiniomis, kurių galima rasti kiekviename matematikos vadovėlyje (aišku, logaritmams skirtuose skyriuose) ir neaiškinsime, kaip įrodomos logaritmų savybės. Dėmesio centre bus korektiškas logaritmo savybių taikymas.

Kad būtų paprasčiau, prisiminkime ir čia pat užsirašykime, jog *teigiamo skaičiaus b logaritmas pagrindu a* $(a>0, a\neq 1)$ *yra laipsnio rodiklis (realusis skaičius, žymimas simboliu* $\log_a b$*), kuriuo pakėlus a, gaunamas skaičius b.*

Taigi visada

$$a^{\log_a b} = b, \text{ jei tik } a>0, b>0, a\neq 1. \tag{1}$$

Logaritmas $\log_{10} b$ vadinamas *dešimtainiu logaritmu* ir žymimas lg *b*.

Taip pat užsirašykime kelias logaritmo savybes, išplaukiančas iš jo apibrėžimo:

$$\log_a(b\cdot c) = \log_a b + \log_a c, \text{ jei } a>0, b>0, c>0, a\neq 1; \tag{2}$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c, \text{ jei } a>0, b>0, c>0, a\neq 1; \tag{3}$$

$$\log_a(b^m) = m\log_a b, \text{ jei } a>0, b>0, c>0, a\neq 1, m\in \mathrm{R}; \tag{4}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ jei } a>0, b>0, c>0, a\neq 1, c\neq 1; \tag{5}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ jei } a>0, b>0, a\neq 1, b\neq 1. \tag{6}$$

Aišku, kad (6) lygybė gaunama iš (5), kai $c=b$.

1 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\log_2 x(x+9) + \log_2 \frac{x+9}{x} = 0. \tag{7}$$

Sprendimas. Lygties apibrėžimo sričiai rasti pakanka išspręsti nelygybę $x(x+9)>0$, nes $\frac{x+9}{x} = \frac{x(x+9)}{x^2}$. Gautume aibę $(-\infty; -9)\cup(0; +\infty)$.

Kadangi

$$\log_2 x(x+9) + \log_2\frac{x+9}{x} = \log_2\left(x(x+9)\cdot\frac{x+9}{x}\right) = \log_2(x+9)^2,$$

kai $x\in(-\infty;-9)\cup(0;+\infty)$, tai lygtis $\log_2 x(x+9)+\log_2\frac{x+9}{x}=0$ yra ekvivalenti lygčiai

$$\log_2(x+9)^2 = 0, \tag{8}$$

bet tik aibėje $(-\infty;-9)\cup(0;+\infty)$. Pastaroji pastaba yra esminė, nes (8) lygtis apibrėžta platesnėje aibėje $(-\infty;-9)\cup(-9;+\infty)$ ir šioje aibėje turi du sprendinius ($x=-10$ ir $x=-8$):

$$\log_2(x+9)^2 = 0 \Rightarrow (x+9)^2 = 1 \Rightarrow x+9=\pm 1 \Rightarrow x=-9\pm 1 \Rightarrow x=-10 \text{ arba } x=-8.$$

Kadangi $x=-8$ nepriklauso (7) lygties apibrėžimo sričiai, tai $x=-10$ yra vienintelis (7) lygties sprendinys.

Ats.: -10.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad sprendžiant (8) lygtį nesunku prarasti sprendinį $x=-10$, pavyzdžiui, šiais veiksmais:

$$\log_2(x+9)^2=0 \Rightarrow 2\log_2(x+9)=0 \Rightarrow x+9=1 \Rightarrow x=-8.$$

Beje, tokį pat rezultatą gautume ir pasirinkę tokią (7) lygties keitimo kitomis lygtimis schemą:

$$\log_2 x(x+9)+\log_2\frac{x+9}{x}=0 \Rightarrow \left(\log_2 x+\log_2(x+9)\right)+\left(\log_2(x+9)-\log_2 x\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\log_2(x+9)=0 \Rightarrow \log_2(x+9)=0 \Rightarrow x+9=1 \Rightarrow x=-8.$$

Ir vienu, ir kitu atveju visai tikėtina klaidinga išvada – (7) lygtis sprendinių neturi.

Dabar pasvarstykime, kodėl galėjome be jokio vargo suklupti spręsdami iš pažiūros visai paprastą (7) logaritminę lygtį

$$\log_2 x(x+9)+\log_2\frac{x+9}{x}=0.$$

Esminiai momentai yra šie:

1) lygybė $\log_2(x+9)^2=2\log_2(x+9)$ galioja tik intervale $(-9;+\infty)$;

2) lygybės

$$\log_2 x(x+9)=\log_2 x+\log_2(x+9) \text{ ir } \log_2\frac{x+9}{x}=\log_2(x+9)-\log_2 x$$

galioja tik intervale $(0;+\infty)$.

Tuo tarpu (7) lygties sprendinių paieškos aibė yra $(-\infty;-9)\cup(0;+\infty)$. Taigi neapdairiai taikant logaritmo savybes galima prarasti dalį pradinės lygties sprendinių.

Mažesnė bėda, jei keičiant vieną lygtį kita lygtimi praplečiama sprendinių paieškos aibė. Tada pakaktų patikrinti gautus atsakymus ir atmesti netinkamus.

2 pavyzdys. Išspręskime logaritminę lygtį

$$2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0. \qquad (9)$$

Sprendimas. Pagal logaritmo apibrėžimą, turi galioti sąlygos $x-2>0$ ir $x-4\neq 0$, todėl (9) lygties apibrėžimo aibė yra $(2;4)\cup(4;+\infty)$.

Kadangi nelygybė $(x-4)^2>0$ yra ekvivalenti nelygybei $|x-4|>0$, tai

$$\log_3(x-4)^2=2\log_3|x-4|.$$

Vadinasi, (9) lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0.$$

Toliau: $2\left(\log_3(x-2)+\log_3|x-4|\right)=0 \Rightarrow \log_3\left((x-2)\cdot|x-4|\right)=0 \Rightarrow (x-2)\cdot|x-4|=1.$

Pastaroji lygtis intervale (2; 4) yra ekvivalenti lygčiai $(x-2)(4-x)=1$, o intervale $(4;+\infty)$ – lygčiai $(x-2)(x-4)=1$.

Tęsdami (9) lygties sprendimą, abu atvejus išnagrinėkime atskirai:

1) $\begin{cases} x\in(2;4), \\ (x-2)(4-x)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(2;4), \\ x^2-6x+9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(2;4), \\ (x-3)^2=0 \end{cases} \Rightarrow x=3;$

2) $\begin{cases} x\in(4;+\infty), \\ (x-2)(x-4)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(4;+\infty), \\ x^2-6x+7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(4;+\infty), \\ x=3\pm\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x=3+\sqrt{2}.$

Vadinasi, (9) lygtis turi du sprendinius – realiuosius skaičius 3 ir $3+\sqrt{2}$.

Ats.: $3;\ 3+\sqrt{2}$.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\log_x 16+\log_{2x} 64=4. \qquad (10)$$

Sprendimas. Šios logaritminės lygties apibrėžimo aibę nusako nelygybės $x>0$, $2x>0$ bei sąlygos $x\neq 1$ ir $2x\neq 1$. Iš čia gauname, kad $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

Sprendžiamą lygtį pertvarkykime taikydami logaritmo pagrindo pakeitimo formulę (5):

1) $\log_x 16 = \dfrac{\log_2 16}{\log_2 x} = \dfrac{4}{\log_2 x}$;

2) $\log_{2x} 64 = \dfrac{\log_2 64}{\log_2 2x} = \dfrac{6}{\log_2 2 + \log_2 x} = \dfrac{6}{1+\log_2 x}$.

Pažymėję $t = \log_2 x$, gausime, kad

$$\log_x 16 + \log_{2x} 64 = \frac{4}{t} + \frac{6}{1+t},$$

todėl (10) lygtis tampa lygtimi

$$\frac{4}{t} + \frac{6}{1+t} = 4. \tag{11}$$

Aišku, kad $t \neq 0$ ir $1+t \neq 0$, nes $x \neq 1$ ir $x \neq \dfrac{1}{2}$. Padauginę (11) lygtį iš $t(1+t)$, gausime:

$$4(1+t) + 6t = 4t(1+t) \Rightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} \Rightarrow t = 2 \text{ arba } t = -\frac{1}{2}.$$

Jei $t = 2$, tai $\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$.

Jei $t = -\dfrac{1}{2}$, tai $\log_2 x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Taigi (10) lygtis turi du sprendinius – realiuosius skaičius 4 ir $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ats.: 4; $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Paprasčiausios logaritminės nelygybės yra $\log_a x < c$ ir $\log_a x > c$; čia $a > 0$, $a \neq 1$, $c \in \mathrm{R}$. Gerai suvokus jų sprendimą bei korektiškai taikant logaritmo savybes galima be didesnio vargo išspręsti daug įvairaus sudėtingumo logaritminių nelygybių.

Prisiminkime, kad logaritminė funkcija $y = \log_a x$, $x > 0$, yra *didėjančioji funkcija*, jeigu $a > 1$; ji yra *mažėjančioji funkcija*, jeigu $0 < a < 1$.

Kadangi $c = \log_a (a^c)$, $c \in \mathrm{R}$, tai logaritminė nelygybė $\log_a x < c$ yra ekvivalenti nelygybei $\log_a x < \log_a (a^c)$, o ši nelygybė yra ekvivalenti nelygybei $0 < x < a^c$, jei $a > 1$; ji yra ekvivalenti nelygybei $x > a^c$, jei $0 < a < 1$.

Vadinasi,

• logaritminės nelygybės $\log_a x < c$ sprendinių aibė yra:

1) intervalas $(0; a^c)$, jei $a > 1$;

2) intervalas $(a^c; +\infty)$, jei $0 < a < 1$;

• logaritminės nelygybės $\log_a x > c$ sprendinių aibė yra:

1) intervalas $(a^c; +\infty)$, jei $a > 1$;

2) intervalas $(0; a^c)$, jei $0 < a < 1$.

4 pavyzdys. Išspręskime logaritminę nelygybę

$$\log_2 \frac{4}{x+3} > \log_2 (2-x). \tag{12}$$

Sprendimas. Šios nelygybės apibrėžimo aibę sudaro nelygybių $\dfrac{4}{x+3} > 0$ ir $2 - x > 0$ sistemos sprendinių aibė. Šioje aibėje (12) logaritminė nelygybė yra ekvivalenti nelygybei

$$\frac{4}{x+3} > 2 - x.$$

Vadinasi, (12) nelygybės sprendinių aibė sutampa su nelygybių sistemos

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x+3} > 2 - x, \\ 2 - x > 0 \end{cases} \tag{13}$$

sprendinių aibe.

Spręsdami (13) sistemą, gauname:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x+3} > 2 - x, \\ 2 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x+3} - 2 + x > 0, \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x+3} > 0, \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+2)(x-1)}{x+3} > 0, \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 < x < -2 \text{ arba } x > 1, \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow -3 < x < -2 \text{ arba } 1 < x < 2.$$

Matome, kad (12) logaritminės nelygybės sprendinių aibė yra intervalų $(-3; -2)$ ir $(1; 2)$ sąjunga.

Ats.: $(-3; -2) \cup (1; 2)$.

5 pavyzdys. Išspręskime logaritminę nelygybę

$$\log_{0,5} \frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \le -1. \tag{14}$$

Sprendimas. Pagal logaritmo apibrėžimą, (14) nelygybė yra apibrėžta nelygybės

$$\frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} > 0 \tag{15}$$

sprendinių aibėje.

Aišku, kad

$$-1 = -\log_{0,5} 0,5 = \log_{0,5} (0,5)^{-1} = \log_{0,5} 2,$$

todėl (14) nelygybė ekvivalenti nelygybei

$$\log_{0,5} \frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \le \log_{0,5} 2.$$

O pastaroji nelygybė (esant (15) sąlygai) yra ekvivalenti nelygybei

$$\frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \ge 2. \tag{16}$$

Matome, kad (14) logaritminės nelygybės sprendinių aibė sutampa su (16) nelygybės sprendinių aibe. Spręsdami ją, gauname:

$$\frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \ge 2 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{4x - 11} - 1 \ge 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 6x + 8}{4x - 11} \ge 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x-4)}{4x - 11} \ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [2; 2,75) \cup [4; +\infty).$$

Ats.: $[2; 2,75) \cup [4; +\infty)$.

6 pavyzdys. Išspręskime logaritminę nelygybę

$$3\log_x 3 - 1 \le \frac{4}{3\log_x 3 - 1}. \tag{17}$$

Sprendimas. Aišku, kad (17) nelygybė yra apibrėžta aibėje $(0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Pažymėkime $t = 3\log_x 3 - 1$ ir iš pradžių išspręskime nelygybę

$$t \le \frac{4}{t}.$$

Gausime:

$$t \le \frac{4}{t} \Rightarrow t - \frac{4}{t} \le 0 \Rightarrow \frac{t^2 - 4}{t} \le 0 \Rightarrow \frac{(t+2)(t-2)}{t} \le 0 \Rightarrow t \le -2 \text{ arba } 0 < t \le 2.$$

Matome, kad (17) nelygybės sprendinių aibė yra nelygybių

$$3\log_x 3-1\le -2 \quad \text{ir} \quad 0\le 3\log_x 3-1\le 2$$

sprendinių aibių sąjunga.

Spręsdami šias nelygybes, gausime:

1) $3\log_x 3-1\le -2 \Rightarrow \log_x 27\le -1 \Rightarrow \log_x 27\le \log_x \frac{1}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ 27\ge \frac{1}{x} \end{cases} \text{arba} \begin{cases} x>1, \\ 27\le \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ x\ge \frac{1}{27} \end{cases} \text{arba} \begin{cases} x>1, \\ x\le \frac{1}{27} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{27}\le x<1;$$

2) $0<3\log_x 3-1\le 2 \Rightarrow 1<\log_x 27\le 3 \Rightarrow \log_x x<\log_x 27\le \log_x(x^3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ x>27\ge x^3 \end{cases} \text{arba} \begin{cases} x>1, \\ x<27\le x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1, \\ x<27, \\ x^3\ge 27 \end{cases} \Rightarrow 3\le x<27.$$

Vadinasi, (17) lygties sprendinių aibė yra intervalų $\left[\frac{1}{27};1\right)$ ir $[3;27)$ sąjunga.

Ats.: $\left[\frac{1}{27};1\right)\cup[3;27)$.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite lygtį $\log_5(2+\log_3(3+x))=0$.

2. Išspręskite lygtį $\lg(5-x)-\frac{1}{3}\lg(35-x^3)=0$.

3. Išspręskite lygtį $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2$.

4. Išspręskite lygtį $\log_3(3^x-8)=2-x$.

5. Išspręskite lygtį $\log_{x+4}(x^2-1)=\log_{x+4}(5-x)$.

6. Išspręskite lygtį $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2=4$.

7. Išspręskite nelygybę $\dfrac{\lg 7-\lg(8-x^2)}{\lg(x+3)}>0$.

8. Išspręskite nelygybę $2\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>\frac{2}{3}$.

9. Išspręskite nelygybę $2\log_4(2x^2+3)<\log_2(x^2+6)$.

10. Išspręskite nelygybę $\log_x\left(x^2-\frac{3}{16}\right)>4$.

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite lygtį
$$4x^4 - x^3 + 16x - 4 = 0.$$
2. Iš taško A nubrėžtos apskritimo liestinė ir kirstinė. Atstumas nuo taško A iki lietimosi taško lygus 16, o atstumas nuo taško A iki vieno iš apskritimo ir kirstinės susikirtimo taškų lygus 32. Kirstinė nuo apskritimo centro nutolusi atstumu 5. Raskite apskritimo spindulio ilgį.
3. Į kiekvieną 3×3 lentelės langelį įrašyta po teigiamą skaičių tokiu būdu, kad visų trijų kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio skaičių sandauga yra lygi 1, o visų keturių bet kurio 2×2 kvadrato skaičių sandauga yra lygi 2. Nustatykite, koks skaičius yra įrašytas centriniame lentelės langelyje.
4. Raskite sveikųjų skaičių poras (x, y), kurios yra lygties
$$x^2 - y^2 + 7x + y + 10 = 0$$
sprendiniai.

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Tėvo metų skaičius yra 5 didesnis už trijų jo sūnų metų sumą. Po 10 metų tėvas bus dvigubai vyresnis už vyriausiąjį sūnų, po 20 metų – dvigubai vyresnis už vidurinįjį sūnų, o po 30 metų bus dvigubai vyresnis už jaunėlį. Kiek metų yra tėvui ir kiekvienam sūnui?

Sprendimas. Sakykime, kad $x,\ x_1, x_2, x_3, -$ tėvo ir sūnų metų skaičiai. Pagal sąlygą yra teisingos lygybės

$$\begin{gathered} x = x_1 + x_2 + x_3 + 5, \\ x + 10 = 2(x_1 + 10), \\ x + 20 = 2(x_2 + 20), \\ x + 30 = 2(x_3 + 30). \end{gathered}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą gauname, kad $x = 50,\ x_1 = 20,\ \ x_2 = 15,\ \ x_3 = 10.$

Ats.: tėvui yra 50 metų, sūnums 20, 15 ir 10 metų.

2. Iš uosto tuo pačiu metu išplaukė du motorlaiviai – vienas į pietus, o kitas – į rytus. Po 2 valandų atstumas tarp jų buvo 174 km. Į rytus plaukiantis motorlaivis kas valandą nuplaukdavo 3 km daugiau, nei kitas. Raskite kiekvieno motorlaivio greitį.

Sprendimas. Jei į pietus plaukiančio motorlaivio greitis $x\ \ km/h$, tai į rytus plaukiančio motorlaivio greitis $x + 3\ \ km/h$. Per dvi valandas plaukiantis į pietus nuplaukė $2x\ km.$ o plaukiantis į rytus - $2(x + 3)$. Pagal Pitagoro teoremą $(2x)^2 + (2(x + 3))^2 = 174^2$. Pertvarkę gauname lygtį $x^2 + 3x - 3780 = 0$, kurios teigiamas sprendinys $x = 60$.

Ats.: į pietus plaukiančio motorlaivio greitis $60\ \ km/h$, o į rytus – $63\ \ km/h$.

3. Grupė mokinių sutarė organizuoti kelionę, visi mokėdami po lygiai. Kelionės kaina yra tarp 170 ir 195 eurų. Vėliau du mokiniai atsisakė vykti, todėl likusieji turėjo sumokėti po 1 eurą daugiau. Kiek kainavo kelionė?

Sprendimas. Sakykime, kad pradžioje buvo x mokinių, kurių kiekvienas turėjo sumokėti po y eurų, taigi kelionės kaina $xy,\ \ 170 \leq xy \leq 190.$ Kai du mokiniai atsisakė vykti, liko $x - 2$ mokiniai, kurie turėjo mokėti po $y + 1$ eurą. Turime lygtį $(x - 2)(y + 1) = xy$. Iš šios lygties gauname, kad $x - 2y = 2,\ y = \frac{x-2}{2}$ ir $170 \leq \frac{x(x-2)}{2} \leq 190,$ t. y. $340 \leq x(x - 2) \leq 380.$ Šią nelygybę tenkina vienintelis natūralusis $x = 20$; jei $x < 20,\ x(x - 2) \leq 19 \cdot 17 = 323 < 340$, o kai $x > 20,\ x(x - 2) \geq 21 \cdot 19 = 399 > 380.$ Taigi iš pradžių buvo 20 mokinių, kiekvienas turėjo mokėti po $y = \frac{20-2}{2} = 9$ eurus, todėl kelionės kaina yra 180 eurų.

Ats.: 180 eurų.

4. Triženklio skaičiaus skaitmenys yra pirminiai skaičiai, o kiekvienas skaitmuo yra šio skaičiaus daliklis. Raskite visus tokius triženklius skaičius.

Sprendimas. Vienaženkliai pirminiai skaičiai yra 2, 3, 5, 7.

Tarkime, ieškomojo skaičiaus pirmasis skaitmuo yra 2. Šis skaičius turi dalytis iš 2, vadinasi, ir paskutinis skaitmuo turi būti 2. Vidurinysis skaitmuo gali būti tik 2, nes skaičius 232 nesidalija iš 3, skaičius 252 nesidalija iš 5, o 272 nesidalija iš 7. Taigi toks skaičius yra 222.

Jeigu ieškomasis skaičius prasideda 3, tai paskutiniai du skaitmenys turi sudaryti skaičių, kuris turi dalytis iš 3. Tie skaitmenys gali būti 3,3arba 5,7. Tinka tik atvejis 333.

Analogiškai, jei ieškomasis skaičius prasideda 5, tai gauname tik skaičių 555.

Jeigu ieškomasis skaičius prasideda 7, tai paskutiniai du skaitmenys turi sudaryti skaičių, kuris dalijasi iš 7. Gauname dar du sąlygą tenkinančius skaičius 735 ir 777.

Ats. 222, 333, 555, 735, 777.

5. Su kuria **neigiama** *a* reikšme funkcija $f(x)=ax^2+2x+6$ intervale $\left[1-\frac{1}{a};2-\frac{1}{a}\right]$ įgyja mažiausią reikšmę, lygią 3 ?

Sprendimas. Kai $a<0$, parabolės $f(x)=ax^2+2x+6$ šakos nukreiptos žemyn, o viršūnės abscisė yra $x=-\frac{1}{a}$. Tuomet intervale $\left[1-\frac{1}{a};2-\frac{1}{a}\right]$ mažiausia reikšmė įgyjama dešiniajame intervalo gale, t. y. taške $2-\frac{1}{a}$. Ji turi būti lygi 3. Gauname lygtį:

$$a\left(2-\frac{1}{a}\right)^2+2\left(2-\frac{1}{a}\right)+6=3 \Rightarrow 4a^2+3a-1=0 \Rightarrow a_{1,2}=\frac{-3\pm 5}{8} \Rightarrow a_1=\frac{1}{4}; a_2=-1.$$

Ats. $a=-1$.

6. Išspręskite lygtį

$$\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}.$$

Sprendimas. Lygtį pertvarkome

$$\frac{1}{x^2+2x}-\frac{1}{x^2+2x+1}=\frac{1}{12}$$

ir žymime $x^2+2x=y.$ Gauname lygtį $\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}=\frac{1}{12},$ kuri ekvivalenti lygčiai $\frac{12y+12-12y-\ {}^2-y}{12y(y+1)}=0.$ Šios lygties sprendiniai $y=3$ ir $y=-4$. Išsprendę lygtį $x^2+2x=3$ gauname du sprendinius $x=1$ ir $x=-3,$ o lygtis $x^2+2x=-4$ sprendinių neturi.

Ats.: 1 ir -3.

7. Išspręskite nelygybę

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}.$$

Sprendimas. Pertvarkome nelygybę:

$$\frac{2(x-1) - 2x + x(x-1)}{2x(x-1)} < 0;$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{x(x-1)} < 0;$$

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x(x-1)} < 0.$$

Sprendžiame šią nelygybę intervalų metodu ir gauname, kad sprendinys yra intervalų sąjunga $(-1, 0) \cup (1, 2)$.

Ats.: $(-1, 0) \cup (1, 2)$.

8. Išspręskite lygčių sistemą

$$\sqrt{\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}} = \frac{5}{2},$$
$$|x + y| = 5.$$

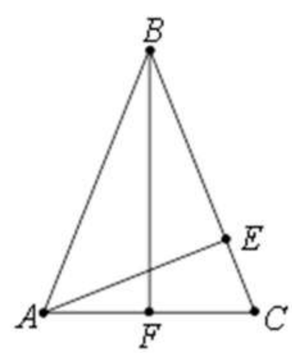
Sprendimas. Žymėdami $\frac{y}{x} = t$ ir keldami pirmosios lygties abi puses kvadratu, gauname lygtį $t + 2 + \frac{1}{t} = \frac{25}{4}$, $4t^2 - 17t + 4 = 0$. Jos sprendiniai $t_1 = 4$, $t_2 = \frac{1}{4}$. Pirmuoju atveju turime $\frac{x}{y} = 4$, $x = 4y$, todėl antroji lygtis tampa tokia $|5y| = 5$, $y = \pm 1$, tuomet $x = \pm 4$. Antruoju atveju $\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$, $y = 4x$, $|5x| = 5$, $x = \pm 1$, $y = \pm 4$.

Ats.: $(4, 1), (-4, -1)$, $(1, 4)$, $(-1, -4)$.

9. Atkarpos AE ir BF yra lygiašonio trikampio ABC $(AB = BC)$ aukštinės, $FC : BC = 2 : 5$. Raskite santykį $AE : BF$.

Sprendimas. Kadangi stačiųjų trikampių AEC ir BFC smailusis kampas C yra bendras (1 pav.), tai jie yra panašieji, todėl $\frac{AE}{BF} = \frac{AC}{BC} = \frac{2F}{BC} = 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$.

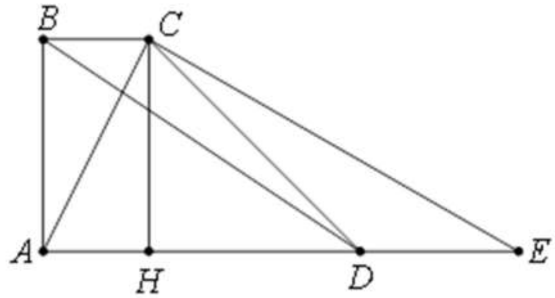
Ats.: $4 : 5$.



1 pav.

10. Stačiakampės trapecijos įstrižainės yra statmenos, jos aukštinė lygi 2, didesnysis pagrindas lygus 3. Raskite mažesniojo pagrindo ilgį.

Sprendimas. Tarkime, kad trapecijos $ABCD$ didesnysis pagrindas $AD = 3$, kampai A ir B statieji, aukštinė $AB = 2$. Žymėkime $BC = x$, $AC = y$, $BD = z$. Per tašką C nubrėžkime tiesę, lygiagrečią su tiese BD, kuri kerta tiesę AD taške E (2 pav.). Kadangi $AE \parallel BC$, $CE \parallel BD$, tai $\angle ACE = 90°$, keturkampis $BCED$ yra lygiagretainis, $CE = BD = z$, $DE = BC = x$. Jei atkarpa CH yra trikampio ACE aukštinė, tai $CH = AB = 2$. Keturkampis $ABCH$ yra stačiakampis, todėl $AH = BC = x$, $HE = HD + DE = (AD - AH) + BC = (AD - BC) + BC = AD = 3$. Iš stačiųjų trikampių ACE, ACH ir CEH gauname lygybes $AC^2 + CE^2 = AE^2$, $AH^2 + CH^2 = AC^2$, $CH^2 + HE^2 = CE^2$, t. y. $y^2 + z^2 = (x+3)^2$, $x^2 + 2^2 = y^2$, $2^2 + 3^2 = z^2$. Iš čia $z^2 = 13$, $y^2 = x^2 + 4$. Tada pirmoji lygtis tampa: $x^2 + 4 + 13 = (x+3)^2$, kurios sprendinys $x = \frac{4}{3}$.



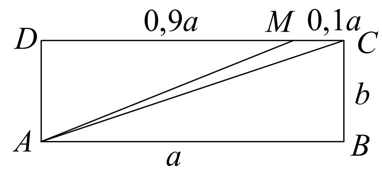
2 pav.

Ats.: $\frac{4}{3}$.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Lygus laukas yra stačiakampio formos. Vieno krašto taške M yra akmuo, nuo artimiausio kampo nutolęs per vieną dešimtąją to krašto ilgio dalį. Einant iš taško M iki tolimiausio kampo sklypo kraštu, ir ėjimo kryptį keičiant tik vieną kartą tektų sugaišti 1 h 3 min, o einant į tą kampą tiesiai v lauką pakaktų 45 min. Kelionė sklypo įstrižaine užtruktų daugiau kaip 48 min. Apskaičiuokite, per kelias minutes iš taško M galima nueiti (tuo pačiu pastoviu greičiu kaip ir kitur) iki artimiausio kampo.

Sprendimas. Tegu akmuo yra stačiakampio $ABCD$ kraštinėje CD, o šio stačiakampio kraštinių ilgiai (metrais) yra a ir b (žr. pav.). Pagal sąlygą, $CM = 0{,}1a$ ir $MD = 0{,}9a$. Ėjimo greitį pažymėkime v. Kadangi $MD + DA = 0{,}9a + b$, $MA = \sqrt{0{,}81a^2 + b^2}$, o greitis v yra pastovus, tai



$$v = \frac{0{,}9a + b}{63} = \frac{\sqrt{0{,}81a^2 + b^2}}{45}.$$

Iš čia gauname:

$$\left(\frac{0{,}9a + b}{7}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{0{,}81a^2 + b^2}}{5}\right)^2,$$

$$\frac{(0{,}9a + b)^2}{49} = \frac{0{,}81a^2 + b^2}{25},$$

$$25(0{,}81a^2 + 1{,}8ab + b^2) = 49(0{,}81a^2 + b^2),$$

$$8b^2 - 15ab + 6{,}48a^2 = 0,$$

$$b = \frac{15a \pm \sqrt{225a^2 - 32 \cdot 6{,}48a^2}}{16} = \frac{15a \pm 4{,}2a}{16}.$$

Taigi $b = 1{,}2a$ arba $b = 0{,}675a$.

Jei $b = 1{,}2a$, tai $v = \frac{0{,}9a + 1{,}2a}{63} = \frac{1}{30}a.$

Jei $b = 0{,}675a$, tai $v = \frac{0{,}9a + 0{,}675a}{63} = \frac{1{,}575}{63}a = \frac{1}{40}a.$

Pirmu atveju kelionės laikas įstrižaine AC (jos ilgis $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2{,}44a^2} = 2a\sqrt{0{,}61}$) būtų

$$\frac{AC}{v} = 60 \cdot \sqrt{0{,}61} < 48 \text{ (min)},$$

o antru atveju $\frac{AC}{v} = \frac{\sqrt{a^2 + (0{,}675a)^2}}{v} = 40 \cdot \sqrt{1{,}455625} > 48$ (min).

Remdamiesi uždavinio sąlyga, pirmą atvejį ($b = 1{,}2a$) turime atmesti.

Vadinasi, $v = \frac{1}{40}a$, o ieškomas laikas yra $\frac{0{,}1a}{v} = 4$ (min).

Ats.: 4 min.

2. Du grybautojai miške rado po 40 grybų, tarp kurių per abu buvo 52 baravykai, Apskaičiuokite, kiek baravykų rado kiekvienas grybautojas, jei žinoma, kad pirmojo grybautojo baravykų ir likusių grybų skaičiaus santykis yra 4 kartus didesnis už antrojo grybautojo baravykų ir likusių grybų skaičiaus santykį.

Sprendimas. Tarkime, kad pirmasis grybautojas rado x baravykų. Tada $52 - x$ yra antrojo grybautojo baravykų skaičius.

Pagal uždavinio sąlygą, $\frac{x}{40 - x} = 4 \cdot \frac{52 - x}{x - 12}.$

Iš čia gauname:

$$x(x - 12) = 4(52 - x)(40 - x),$$

$$x^2 - 12x = 8320 - 368x + 4x^2,$$

$$3x^2-358x+8320=0 \Rightarrow x=\frac{178\pm 82}{3}.$$

Kadangi $x<52,$ tai $x=\frac{178-82}{3}=32.$

Vadinasi, pirmasis grybautojas rado 32, o antrasis – 20 baravykų.

Ats.: 32 ir 20.

3. Du darbininkai tam tikrą darbą atliko per 10 dienų, bet pirmas darbininkas paskutines dvi dienas nedirbo. Apskaičiuokite, per kelias dienas visą darbą galėtų atlikti pirmas darbininkas.

Sprendimas. Tegu visa darbo apimtis (tam tikrais matavimo vienetais) yra a, o x ir y yra atitinkamai pirmo ir antro darbininko darbo tempas (a dalis per 1 dieną). Remdamiesi sąlyga, gauname:

$$\begin{cases} 8x+10y=a, \\ 7x+7y=0,8a \end{cases} \Rightarrow 7\cdot 8x-10\cdot 7x=7a-8a \Rightarrow 14x=a.$$

Taigi $x=\frac{1}{14}a,$ o ieškomas dienų skaičius yra 14.

Ats.: 14.

4. Iš A į B išvažiavo krovininis automobilis, o po valandos – ir lengvasis automobilis. Punktą B abu automobiliai pasiekė tuo pačiu laiko momentu. Jei vienas iš jų būtų išvažiavęs iš A į B, o kitas – iš B į A (tuo pačiu laiko momentu), tai būtų susitikę po 1 h 12 min. Kiek laiko iš A į B važiavo krovininis automobilis?

Sprendimas. Tarkime, kad s yra atstumas (km) tarp A ir B, o v_1 ir v_2 - atitinkamai krovininio ir lengvojo automobilio greitis (km/h). Pagal sąlygą,

$$\frac{s}{v_1}=\frac{s}{v_2}+1 \quad \text{ir} \quad 1,2v_1+1,2v_2=s.$$

Spręsdami šių lygčių sistemą, gauname:

$$\begin{cases} s\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)=1, \\ s=1,2(v_1+v_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1,2(v_1+v_2)\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)=1, \\ s=1,2(v_1+v_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\left(\frac{v_2}{v_1}-\frac{v_1}{v_2}\right)=5, \\ s=1,2(v_1+v_2). \end{cases}$$

Pažymėję $u=\frac{v_2}{v_1},$ iš pirmos lygties gauname:

$$6\left(u-\frac{1}{u}\right)=5 \Rightarrow 6u^2-5u-6=0 \Rightarrow u=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{12}=\frac{5\pm 13}{12}.$$

Kadangi $u>0,$ tai $u=\frac{5+13}{12}=1,5.$ Todėl $v_2=1,5v_1.$ Tada iš antros lygties gauname:

$$s=1,2(v_1+1,5v_2) \Rightarrow s=3v_1 \Rightarrow \frac{s}{v_1}=3.$$

Vadinasi, ieškomas laikas yra 3 valandos.

Ats.: 3 h.

5. Indas pripiltas 96 % koncentracijos rūgšties tirpalo. Nupylus 2,5 litro, į jį įpilta tiek pat 80 % koncentracijos tos pačios rūgšties tirpalo. Pakartojus tokį pat veiksmą (nupylus 2,5 litro gauto tirpalo ir įpylus tiek pat 80 % koncentracijos tirpalo), rūgšties koncentracija tirpale pasidarė 89 %. Kokia indo talpa?

Sprendimas. Tegu V yra indo talpa (litrais). Tada $0,96V$ yra rūgšties kiekis inde. Pirmą kartą buvo nupilta $0,96\cdot 2,5=2,4$ litro rūgšties ir įpilta $0,8\cdot 2,5=2$ litrai rūgšties, todėl inde liko $0,96V-0,4$ litrų rūgšties, o rūgšties koncentracija inde pasidarė

$$\frac{0,96V-0,4}{V}=0,96-\frac{0,4}{V} \text{ procentų.}$$

Antru veiksmu nupilta

$$\left(0,96-\frac{0,4}{V}\right)\cdot 2,5=2,4-\frac{1}{V},$$

o įpilta $0,8\cdot 2,5=2$ litrai rūgšties. Todėl inde liko

$$(0,96V-0,4)-\left(0,4-\frac{1}{V}\right)=0,96V+\frac{1}{V}-0,8$$

litrų rūgšties. Pagal sąlygą,

$$\frac{0,96V+\frac{1}{V}-0,8}{V}=0,89.$$

Atlikę veiksmus, gauname kvadratinė lygtį

$$7V^2-80V+100=0,$$

todėl

$$V=\frac{40\pm\sqrt{1600-700}}{7}=\frac{40\pm 30}{7}.$$

Aišku, kad turi būti $V>2,5,$ todėl

$$V=\frac{40+30}{7}=10.$$

Ats.: 10 ltr.

6. Yra trys lydiniai, sudaryti iš metalų A, B ir C. Pirmą lydinį sudaro tik metalai A ir B, kurių masių santykis 3:5; antrą – tik metalai B ir C, kurių masių santykis 1:2, o trečią – tik A ir C, kurių masių santykis 2:3. Iš šių lydinių gautas naujas lydinys, kuriame metalų A, B ir C santykis yra 3:5:2. Raskite pirmo, antro ir trečio lydinio masių santykį šiame lydinyje.

Sprendimas. Tegu x, y ir z yra atitinkamai pirmo, antro ir trečio lydinio masė. Tada $x+y+z$ yra naujo lydinio masė.Pagal sąlygą, metalo A masė yra

$$\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}z=0,3(x+y+z),$$

metalo B masė yra

$$\frac{5}{8}x+\frac{1}{3}y=0,5(x+y+z),$$

metalo C masė yra

$$\frac{2}{3}y+\frac{3}{5}z=0,2(x+y+z).$$

Spręsdami šių lygčių sistemą, gauname:

$$\begin{cases}15x+16z=12(x+y+z),\\ 15x+\ 8y=12(x+y+z),\\ 10y+\ 9z=\ 3(x+y+z)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-12y+4z=0,\\ 3x-4y-12z=0,\\ -3x+7y+\ 6z=0.\end{cases}\tag{1}$$

Sudėję antrą lygtį su trečia, gauname, kad $3y-6z=0,$ o iš čia - $y=2z.$ Šią išraišką įrašykime į (1) ir apskaičiuokime x:

$$\begin{cases}3x-24z+4z=0,\\ 3x-\ 8z-12z=0,\\ -3x+14z+6z=0\end{cases}\Rightarrow 3x-20z=0\Rightarrow x=\frac{20}{3}z.$$

Vadinasi, $x:y:z=\frac{20}{3}z:2z:z=\frac{20}{3}:2:1=20:6:3.$

Ats.: 20:6:3.

7. Sugalvotas teigiamas sveikasis skaičius. Reikėjo jį padidinti 200 000 vienetų ir gautą skaičių patrigubinti. Tačiau pakako prirašyti prie sugalvoto skaičiaus skaitmenį 2 (dešinėje pusėje) ir buvo gautas tas pats rezultatas. Koks skaičius buvo sugalvotas?

Sprendimas. Sugalvotą skaičių pažymėkime x. Pagal sąlygą, $(x+200\,000)\cdot 3 = 10x+2$. Iš čia gauname: $7x = 600\,000 - 2 \Rightarrow x = \dfrac{599\,998}{7} = 85\,714.$

Ats.: 85 714.

8. Apskaičiuokite funkcijos *f*, tenkinančios sąlygą, $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = x^3 + \dfrac{1}{x^3}$, $x > 0$, reikšmę *f*(4).

Sprendimas. Jei $x + \dfrac{1}{x} = 4$, tai

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right) = 4\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 1\right) = 4(4^2-3) = 52.$$

Ats.: 52.

9. Nustatykite, ar yra parabolė, kuri eitų per taškus $M_1(1;3)$, $M_2(0;5)$, $M_3(2;5)$ ir $M_4(1;11)$, − o simetrijos ašis būtų lygiagreti su koordinačių sistemos ašimi Oy. Jeigu taip, parašykite jos lygtį.

Sprendimas. Bendroji parabolės lygtis yra $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Kad parabolė eitų per konkretų tašką, jo koordinatės turi tenkinti lygtį. Gauname keturių lygčių (a, b ir c atžvilgiu) sistemą:

$$\begin{cases} 3 = a + b + c, \\ 5 = \qquad\quad c, \\ 5 = 4a + 2b + c, \\ 11 = a - b + c. \end{cases}$$

Iš antros lygties gauname, kad $c = 5$. Toliau sprendžiame kitų trijų lygčių (įrašę $c = 5$) sistemą:

$$\begin{cases} a + b = -2, \\ 4a + 2b = 0, \\ a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -2, \\ b = -2a, \\ a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2a = -2, \\ b = -2a, \\ a + 2a = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = -4, \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -4.$$

Taigi parabolė $y = 2x^2 - 4x + 5$ eina per visus keturis taškus.

Ats.: $y = 2x^2 - 4x + 5$.

10. Raskite tokią a ir b reikšmių porą $(a; b)$, kad tiesė $y = ax + b$ eitų per tašką $(-1; 1)$ ir per tiesių $y = 3x - 5$ ir $y = x + 1$ susikirtimo tašką M.

Sprendimas. Tiesių $y = 3x - 5$ ir $y = x + 1$ susikirtimo taško M koordinatės turi būti lygčių sistemos

$$\begin{cases} y = 3x - 5, \\ y = x + 1 \end{cases}$$

sprendinys. Įrašę $y = x + 1$ į pirmą lygtį, gauname: $x + 1 = 3x - 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$.
Vadinasi, $y = 4$, o pora (3; 4) yra taško M koordinatės.

Kad tiesė $y = ax + b$ eitų per taškus (-1; 1) ir (3; 4), turi galioti abi lygybės:

$$1 = -a + b \quad \text{ir} \quad 4 = 3a + b.$$

Iš jų gauname:

$$\begin{cases} -a + b = 1, \\ 3a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a + 1, \\ 3a + (a+1) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a + 1, \\ 4a = 3 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{4}, b = \frac{7}{4}.$$

Taigi ieškoma a ir b pora yra $\left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{7}{4}\right)$.

Ats.: $\left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{7}{4}\right)$.

ANTROSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Išspręskite lygtį $x^3 - 19x + 30 = 0$.

Sprendimas. Aišku, kad $x = 2$ yra sprendinys. Padalijoriginalus iš $x - 2$ gauname

$$\frac{x^3 - 19x + 30}{x - 2} = x^2 + 2x - 15.$$

Išsprendę kvadratinę lygtį $x^2 + 2x - 15 = 0$, gauname dar du pradinės lygties sprendinius – realiuosius skaičius 3 ir -5.

Ats.: $-5; 2; 3$.

2. Išspręskite lygtį $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 990$.

Sprendimas. Jei x būtų sveikasis skaičius, tai kairėje lygybės pusėje turėtume trijų iš eilės einančių sveikųjų skaičių $x + 1$, $x + 2$ ir $x + 3$ sandaugą. Kadangi $990 = 9 \cdot 10 \cdot 11$, tai $x + 1 = 9 \Longrightarrow x = 8$. Taigi $x = 8$ yra lygties sprendinys. Toliau

$$\frac{(x + 1)(x + 2)(x + 3) - 990}{x - 8} = \frac{x^3 + 6x^2 + 11x - 984}{x - 8} = x^2 + 14x + 123$$
$$= (x + 7)^2 + 74 > 0,$$

kai $x \neq 8$. Vadinasi, lygtis turi tik vieną sprendinį – realųjį skaičių 8.

Ats.: 8.

3. Išspręskite lygtį $x^3 + x^2 = 36$.

Sprendimas. Skaičius 3 yra lygties sprendinys. Padaliję iš $x - 3$ gauname:

$$\frac{x^3 + x^2 - 36}{x - 3} = x^2 + 4x + 12 = (x + 2)^2 + 8 > 0,$$

kai $x \neq 3$. Taigi 3 yra vienintelis lygties sprendinys.

Ats.: 3.

4. Išspręskite lygtį $x^6 - x^3 = 2$.

Sprendimas. Pažymėkime $x^3 = t$ ir išspręskime kvadratinę lygtį $t^2 - t - 2 = 0$. Gausime:

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Longrightarrow t = -1 \text{ arba } t = 2.$$

Jei $t = -1$, tai $x^3 = -1 \Longrightarrow x^3 + 1 = 0 \Longrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$. Kadangi $x^2 - x + 1 > 0$, kai $x \in \mathbb{R}$, tai $x = -1$ yra vienintelis lygties $x^3 = -1$ sprendinys.

Jei $t = 2$, tai $x^3 = 2 \Longrightarrow x^3 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 0 \Longrightarrow (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}) = 0$. Iš čia išplaukia, kad $\sqrt[3]{2}$ yra vienintelis lygties $x^3 = 2$ sprendinys, nes $x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4} > 0$, kai $x \in \mathbb{R}$.

Ats.: -1; $\sqrt[3]{2}$.

5. Išspręskite lygtį $x^4 = (x+1)^4$.

Sprendimas. Spręskime taip:

$x^4 = (x+1)^4 \Longrightarrow (x^2)^2 - ((x+1)^2)^2 = 0 \Longrightarrow (x^2 - (x+1)^2)(x^2 + (x+1)^2) = 0 \Longrightarrow$
$(x - (x+1))(x + (x+1))(2x^2 + 2x + 1) = 0 \Longrightarrow (2x+1)(2x^2 + 2x + 1) = 0.$

Gauta lygybė teisinga tik kai $2x + 1 = 0$, nes $2x^2 + 2x + 1 > 0$, kai $x \in \mathbb{R}$. Vadinasi, $x = -\frac{1}{2}$ yra vienintelis lygties $x^4 = (x+1)^4$ sprendinys.

Ats.: $-\frac{1}{2}$.

6. Išspręskite lygtį $(x^2 + 6x)^2 - (x+3)^2 = 11$.

Sprendimas. Kadangi $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$, pasirinkime keitinį $t = x^2 + 6x$ ir iš pradžių išspręskime kvadratinę lygtį $t^2 - t - 9 = 11$. Gauname:

$$t^2 - t - 20 = 0 \Longrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} \Longrightarrow t = -4 \text{ arba } t = 5.$$

Jei $t = -4$, tai $x^2 + 6x = -4 \Longrightarrow (x+3)^2 = 5 \Longrightarrow x = -3 \pm \sqrt{5}$.

Jei $t = 5$, tai $x^2 + 6x = 5 \Longrightarrow (x+3)^2 = 14 \Longrightarrow x = -3 \pm \sqrt{14}$.

Ats.: $-3 \pm \sqrt{5}, -3 \pm \sqrt{14}$.

7. Išspręskite lygtį $(x-6)^4 + (x-8)^4 = 16$. (1)

Sprendimas. Jei pasirinktume keitinį $t = x - 7$, gautume lygtį

$(t+1)^4 + (t-1)^4 = 16$ (2)

Kadangi

$$(t+1)^4 = t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1,$$
$$(t-1)^4 = t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1,$$

tai (2) lygtis taptų bikvadratine lygtimi

$$2(t^4 + 6t^2 + 1) = 16,$$

o tada gautume:

$t^4 + 6t^2 + 1 = 8 \Longrightarrow (t^2 - 3)^2 = 16 \Longrightarrow t^2 = 3 \pm 4 \Longrightarrow t^2 = 1 \Longrightarrow t = 1 \text{ arba } t = -1.$

Jei $t = -1$, tai $x - 7 = -1 \Longrightarrow x = 6$. Jei $t = 1$, tai $x - 7 = 1 \Longrightarrow x = 8$.

Taigi (1) lygtis turi du sprendinius – sveikuosius skaičius 6 ir 8.

Ats.: 6; 8.

8. Išspręskite lygtį $x^4 - 6x^3 - 21x^2 + 104x - 42 = 0$.

Sprendimas. Laisvojo nario dalikliai 3 ir 7 yra lygties sprendiniai, nes

$$3^4 - 6 \cdot 3^3 - 21 \cdot 3^2 + 104 \cdot 3 - 42 = 0,$$

$$7^4 - 6 \cdot 7^3 - 21 \cdot 7^2 + 104 \cdot 7 - 42 = 0.$$

Padaliję iš dvinarių $x - 3$ ir $x - 7$ sandaugos $(x-3)(x-7) = x^2 - 10x + 21$, $(x \neq 3,\ x \neq 7)$ gauname:

$$\frac{x^4 - 6x^3 - 21x^2 + 104x - 42}{x^2 - 10x + 21} = x^2 + 4x - 2$$

ir $x^2 + 4x - 2 = 0 \Longrightarrow (x+2)^2 = 6 \Longrightarrow x = -2 \pm \sqrt{6}$.

Ats.: 3; 7; $-2 \pm \sqrt{6}$.

9. Išspręskite lygtį $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680$. (4)

Sprendimas. Sudauginus dvinarius (4) lygtį galima užrašyti standartiniu pavidalu $P(x) = 0$,

$$P(x) = x^4 - 22x^3 + 179x^2 - 638x - 840.$$

Nors laisvojo nario daliklių yra daug, bet vieną sveikąjį lygties sprendinį $(x = -1)$ būtų nesunku rasti. Padalię $P(x)$ iš $x + 1$, gautume

$$\frac{P(x)}{x+1} = x^3 - 23x^2 + 202x - 840.$$

Įsižiūrėję į dalmenį – daugianarį $Q(x) = x^3 - 23x^2 + 202x - 840$, iš karto suprastume, kad lygtis $Q(x) = 0$ tikrai neturi neigiamų sprendinių. Todėl lygties $Q(x) = 0$ sveikojo sprendinio pakaktų ieškoti tik tarp laisvojo nario $(-840 = -2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)$ teigiamų daliklių, bet turėtume nukeliauti iki 12, nes tik $Q(12) = 0$. Ir tik tada tolesnis darbas palengvėtų. Gautume:

$$\frac{Q(x)}{x-12} = \frac{x^3 - 23x^2 + 202x - 840}{x-12} = x^2 - 11x + 70,$$

$$x^2 - 11x + 70 = (x - 5{,}5)^2 + 39{,}75 > 0.$$

Beliktų padaryti išvadą, kad lygtis $Q(x) = 0$ turi tik vieną sprendinį $x = 12$, o (4) lygtis turi du sprendinius – sveikuosius skaičius -1 ir 12. Ir tuo sprendimą būtų galima baigti.

O dabar pasvarstykime, ar yra lengvesnių kelių sprendžiant (4) lygtį.

1) Išskaidę skaičių 1680 pirminiais daugikliais gautume, kad

$$1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

o tada galėtų pasisekti suprasti, kad skaičius 1680 yra keturių iš eilės einančių sveikųjų skaičių sandauga $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ arba $(-5) \cdot (-6) \cdot (-7) \cdot (-8)$.

Kadangi dvinariai $x - 4$, $x - 5$, $x - 6$ ir $x - 7$ taip pat yra keturi iš eilės einantys sveikieji skaičiai, tai visai lengvai rastume du sveikuosius (4) lygties sprendinius $x = 12$ ir $x = -1$. Padalię $P(x)$ iš dvinarių $x + 1$ ir $x - 12$ sandaugos $(x-12)(x+1) = x^2 - 11x - 12$, gautume:

$$\frac{P(x)}{x^2 - 11x - 12} = \frac{x^4 - 22x^3 + 179x^2 - 638x - 840}{x^2 - 11x - 12} = x^2 - 11x + 70.$$

Kadangi $x^2 - 11x + 70 > 0$, jei $x \in \mathbb{R}$, tai (4) lygtis turi tik du sprendinius – sveikuosius skaičius -1 ir 12.

2) Įsižiūrėję į sandaugą $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$ galėtume pamatyti, kad sandaugos $(x-4)(x-7)$ ir $(x-5)(x-6)$ yra tam tikra prasme panašios:

$$(x-4)(x-7) = x^2 - 11x + 28,$$
$$(x-5)(x-6) = x^2 - 11x + 30.$$

Tada pasirinkę keitinį $t = x^2 - 11x + 28$, gauname kvadratinę lygį $t^2 + 2t - 1680 = 0$, kurios sprendiniai yra 40 ir -42.

Jei $t = 40$, tai $x^2 - 11x + 28 = 40 \Longrightarrow x^2 - 11x - 12 = 0 \Longrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121+48}}{2} = \frac{11 \pm 13}{2} \Longrightarrow x = 12$ arba $x = -1$.

Jei $t = -42$, tai $x^2 - 11x + 28 = -42 \Longrightarrow x^2 - 11x + 70 = 0 \Longrightarrow D = 11^2 - 4 \cdot 70 = 121 - 280 < 0$. Vadinasi (4) lygtis turi tik du sprendinius – skaičius -1 ir 12.

Ats.: $-1;\ 12$.

10. Įrodykite, kad lygtis $x^4 - x^3 + x^2 + 2x + 12 = 0$ neturi sprendinių.

Sprendimas. Kairėje pusėje esantį daugianarį pažymėkime $P(x)$.

Jei $x \leq 0$, tai $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 2x + 12 = (x^4 - x^3) + (x+1)^2 + 11 > 0$.

Jei $x \geq 1$, $x^4 - x^3 = x^3(x-1) \geq 0$ ir $x^2 + 2x + 12 > 0$, todėl $P(x) > 0$.

Jei $0 < x < 1$, tai $x^2 - x^3 > 0$, ir $x^4 + 2x + 12 > 0$, todėl $P(x) > 0$.

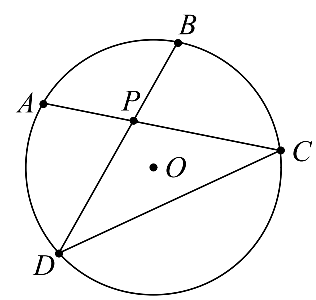
Taigi $P(x) > 0$, jei $x \in \mathbb{R}$, todėl lygtis $P(x) = 0$ sprendinių neturi.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Apskritimo stygos AC ir BD susikerta apskritimo viduje esančiame taške P, $AP = 6$, $PC = 1$, $BD = 5$, $DP > PB$, centrinis kampas, besiremiantis į lanką AD, lygus α, o centrinis kampas, besiremiantis į lanką BC lygus β. Raskite atkarpų PB ir PD ilgius ir kampo APD didumą.

Sprendimas. Žymėkime $PD = x$, $BP = y$. Taikydami susikertančių stygų formulę turime (1 pav.), kad $DP \cdot PB = PA \cdot PC$, t. y. $xy = 6$. Kadangi $PD + PB = BD$, tai $x + y = 5$. Kadangi $x > y$, tai iš sistemos $xy = 6, x + y = 5$ randame $x = 3$, $y = 2$. Kampas APD yra trikampio DPC priekampis, todėl pagal 1 teoremą $\angle APD = \angle PDC + \angle PCD = \angle BDC + \angle ACD = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\alpha$.

Ats.: $PD = 3$, $PB = 2$, $\angle APD = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

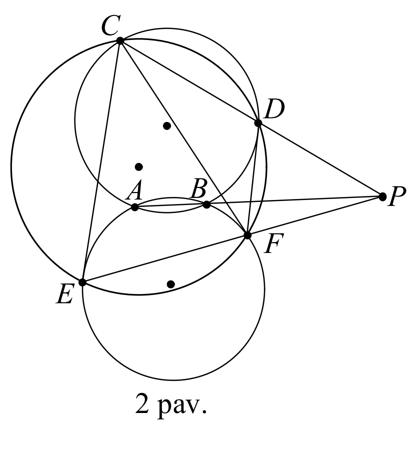


1 pav.

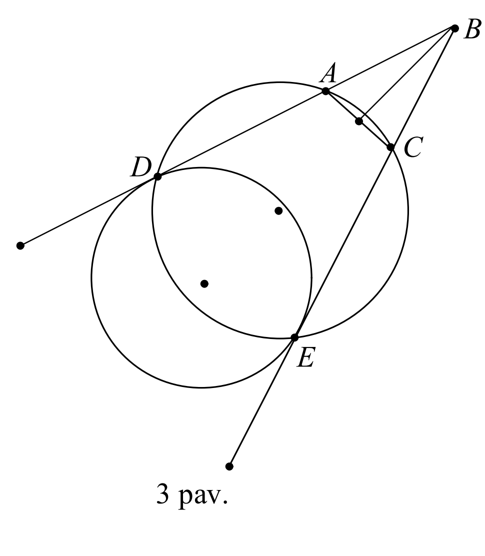
2. Du apskritimai kertasi taškuose A ir B. Tiesėje AB yra taškas P, esantis šių apskritimų išorėje ir $PA > PB$. Per jį nubrėžtos abejų apskritimų kirstinės: viena jų kerta vieną apskritimą taškuose C ir D, $PC > PD$, o kita kerta kitą apskritimą taškuose E ir F, $PE > PF$. Raskite kampą CEF, jei $\angle PDF = \alpha$.

Sprendimas. Kadangi taškai A, B, C, D yra viename apskritime, o tiesės AB ir CD susikerta taške P (2 pav.), tai pagal 3 teoremą teisinga lygybė $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Analogiškai taškai A, B, E, F yra viename apskritime, o tiesės AB ir EF kertasi taške P, tai $PA \cdot PB = PE \cdot PF$. Iš gautųjų lygybių išplaukia, kad $PC \cdot PD = PE \cdot PF$, taigi pagal 3 teoremą taškai C, D, E, F yra viename apskritime. Kadangi taškai D ir E yra skirtingose šio apskritimo stygos CF pusėse, tai pagal 4 išvadą $\angle CEF + \angle CDF = 180^0$. Kadangi $\angle CDF = 180^0 - \angle PDF = 180^0 - \alpha$, tai iš čia gauname, kad $\angle CEF = \alpha$.

Ats.: α.



2 pav.



3 pav.

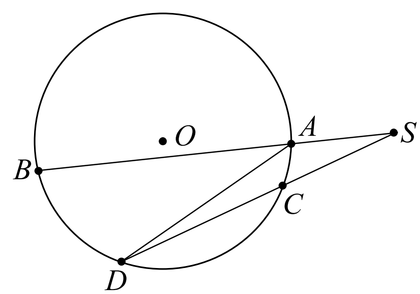
3. Iš taško B nubrėžtos apskritimo liestinės, kurios liečia apskritimą taškuose D ir E. Atkarpoje BD yra taškas A toks, kad $AB = 13$. Apskritimas, einantis per taškus A, E, D, kerta atkarpą BE taške C, be to, $AC = 1$. Raskite trikampio ABC plotą.

Sprendimas. Pagal liestinių, nubrėžtų iš vieno taško, savybę $BD = BE$. Kadangi taškai A, E, D, C yra viename apskritime (3 pav.), o tiesės AD ir EC susikerta taške B, tai pagal 3 teoremą $BD \cdot BA = BE \cdot BC$. Kadangi $BD = BE$, tai iš čia turime $BC = BA = 13$, taigi trikampis ABC yra lygiašonis. Jo į pagrindą AC nubrėžta aukštinė $h = \sqrt{AB^2 - (\frac{AC}{2})^2} =$ $= \sqrt{13^2 - 0,5^2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$, todėl trikampio plotas $S = \frac{1}{2} AC \cdot h = \frac{15\sqrt{3}}{4}$.

Ats.: $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

4. Per apskritimo išorėje esantį tašką S nubrėžtos dvi apskritimo kirstinės, viena jų kerta apskrinimą taškuose A ir B, $SA < SB$, kita kirstinė apskritimą kerta taškuose C ir D, $SC < SD$. Gautųjų apskritimo lankų santykis $AC : CD : DB : BA = 2 : 3 : 5 : 8$. Raskite kampo ASC didumą.

Sprendimas. Žymėkime lankų AC, CD, DB, BA didumus $2x$, $3x$, $5x$, $8x$ atitinkamai (4 pav.). Kadangi šie lankai sudaro apskritimą, tai jų didumų suma turi būti lygi 360^0, taigi $2x + 3x + 5x + 8x = 360^0$. Iš čia $x = 20^0$, todėl lankų AC, CD, DB, BA didumai lygūs 40^0, 60^0, 100^0, 160^0. Pagal centrinių ir įbrėžtinių kampų savybes iš čia turime, kad $\angle BAD = 50^0$, $\angle ADC = \angle ADS = 20^0$. Kampas BAD yra trikampio ASD priekampis, tai $\angle BAD = \angle ASC + \angle ADS$, todėl $\angle ASC =$ $= \angle BAD - \angle ADS = 50^0 - 20^0 = 30^0$.

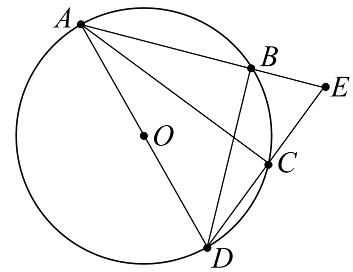


4 pav.

Ats.: 30^0.

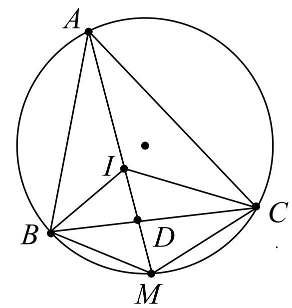
5. Per apskritimo išorėje esantį tašką E nubrėžtos dvi apskritimo kirstinės, viena jų kerta apskritimą taškuose A ir B, $EA > EB$, kita kirstinė apskritimą kerta taškuose C ir D, $EC < ED$. Kampas BEC lygus 60^0, kampas ABD yra tris kartus didesnis už kampą BAC. Įrodykite, kad atkarpa AD yra apskritimo skersmuo.

Įrodymas. Sakykime, kad $\angle BAC = \angle BDC = x$, tuomet pagal sąlygą, $\angle ABD = 3x$. Kadangi kampas ABD yra trikampio EBD priekampis, tai teisinga lygybė $\angle ABD = \angle BAD + \angle BED$, t. y. $3x = x + 60^0$, todėl $x = 30^0$. Todėl $\angle ABD =$ $= 3x = 90^0$, o iš čia išplaukia, kad atkarpa AD yra apskritimo skersmuo.



5 pav.

6. Taškas I yra į trikampį ABC įbtrėžto apskritimo centras, atkarpa atkarpa AD yra kampo A pusiaukampinė, tiesė AD kerta apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo lanką taške M, $AD = 9$, $DM = 3$. Raskite atkarpos AI ilgį.

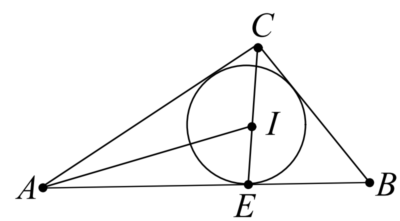


6 pav.

Sprendimas. Taikydami 3 pavyzdžio rezultatą randame $MB^2 =$ $= MA \cdot MD = (AD + MD) \cdot MD = (9 + 3) \cdot 3 = 36$ (6 pav.), todėl pagal tą patį pavyzdį $IM = MB = 6$. Tuomet $AI = AM - IM =$ $= 12 - 6 = 6$.

Ats.: 6.

7. Taškas I yra į statųjį trikampį ABC, $(\angle C = 90^0)$ įbrėžto apskritimo centras, atkarpa CE yra trikampio ABC pusiaukampinė ir yra teisinga lygybė $CI : IE = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Raskite trikampio ABC smailiųjų kampų didumus.



7 pav.

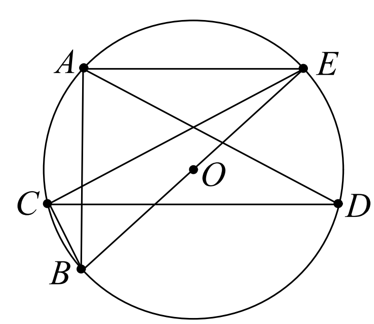
Sprendimas. Kadangi įbrėžto į trikampį apskritimo centras I yra trikampio pusiaukampinių sankirtos taškas, tai $\angle ACI = \angle BCI = 45^0$, $\angle CAI = \angle BAI = \frac{1}{2}\angle A$. Sakykime, kad statinis AC yra trumpesnis už statinį BC, todėl kampas CEB yra bukasis. Smailusis kampas AEC yra trikampio CEB priekampis, todėl $\angle AEC = 45^0 + \angle B$ (7 pav.). Trikampiams AIC ir AIE taikome sinusų teoremą ir gauname lygybes

$$\frac{CI}{\sin\frac{1}{2}\angle A} = \frac{IA}{\sin 45^0}, \qquad \frac{IE}{\sin\frac{1}{2}\angle A} = \frac{IA}{\sin(45^0 + \angle B)}.$$

Padaliję vieną lygybę iš kitos turime $\frac{CI}{IE} = \frac{\sin(45^0 + \angle B)}{\sin 45^0}$. Pagal sąlygą $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \sin 45^0 =$ $= \sin(45^0 + \angle B)$. Taigi $\sin(45^0 + \angle B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $45^0 + \angle B = 60^0$, $\angle B = 15^0$. Tuomet $\angle A =$ $= 75^0$. Kai statinis AC yra ilgesnis už statinį BC, kampas $\angle AEC = 45^0 + \angle B$ yra bukasis, todėl iš lygybės $\sin(45^0 + \angle B) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120^0$ gauname $\angle B = 75^0$, $\angle A = 15^0$.

Ats.: 15^0 ir 75^0.

8. Apskritimo susikertančios stygos AB ir CD yra statmenos, $AD = m$, $BC = n$. Raskite apskritimo spindulio ilgį.



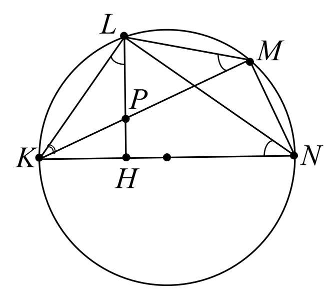
8 pav.

Sprendimas. Nubrėžkime stygą AE lygiagrečią su styga CD, kadangi $\angle EAB = 90^0$, atkarpa BE yra apskritimo skersmuo (8 pav.). Pagal 6 teoremą lankai AC ir ED tarp lygiagrečių stygų AE ir CD yra lygūs, todėl lygūs ir lankai CAE ir DEA (nes jie gauti prie lygių lankų AC ir ED pridėjus tą patį lanką AE). Taigi lygios ir į juos besiremiančios stygos $AD = CE = m$. Iš stačiojo trikampio ECB randame apskritimo skersmenį $EB = \sqrt{CB^2 + CE^2} = \sqrt{n^2 + m^2}$.

Ats.: $\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$.

9. Stačiojo trikampio KLN kampas L yra statusis, taškas P yra aukštinėje LH, iš taško N nuleistas statmuo NM į tiesę KP. Raskite kraštinės KL ilgį, jei $KP = a$, $PM = b$.

Sprendimas. Kadangi $\angle KLN = \angle KMN = 90^0$, o taškai L ir M yra vienoje tiesės KN pusėje, tai taškai $K. L. M. N$ yra viename apskritime, kurio skersmuo yra atkarpa KN (9 pav.). Įbrėžtiniai kampai KML ir KNL remiasi į tą patį lanką KL, o taškai M, N yra toje pačioje tiesės KL pusėje, todėl $\angle KML = \angle KNL = 90^0 - \angle NLP = \angle KLP$. Trikampių KPL ir KLM kampas LKM yra bendras, o kampai KLP ir KML yra lygūs, taigi šie trikampiai yra panašieji, todėl $\frac{KL}{KP} = \frac{KM}{KL}$. Iš čia $KL^2 = KP \cdot KM = a(a+b)$, $KL = \sqrt{a(a+b)}$.

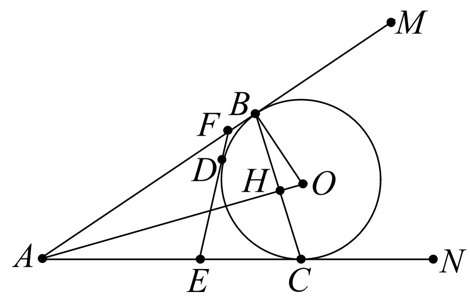


9 pav.

Ats.: $KL = \sqrt{a(a+b)}$.

10. Smailiojo kampo MAN viduje yra nubrėžtas apskritimas, liečiantis spindulius AM ir AN taškuose B ir C, apskritimo spindulys lygus 5, atkarpos BC ilgis lygus 8. Mažesniame apskritimo lanke BC yra taškas D, per tašką D nubrėžta apskritimo liestinė, kertanti atkarpas AB ir AC atitinkamai taškuose F ir E. Raskite trikampio AFE perimetrą.

Sprendimas. Kaip išplaukia iš 6 pavyzdžio rezultato, bet kuriam lanko BC taškui D trikampio AEF perimetras lygus dvigubam atkarpos AB ilgiui (10 pav.). Sakykime, kad apskritimo centras yra taškas O, atkarpos BC ir AO kertasi taške H. Kadangi taškai B ir C yra simetriški tiesės AO atžvilgiu, tai tiesės AO ir BC yra statmenos, o $BH = CH = 4$. Iš stačiojo trikampio OBH randame $OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = 3$. Iš stačiųjų trikampių ABH ir BOH panašumo turime, kad $\frac{AB}{OB} = \frac{BH}{OH}$, todėl $AB = \frac{OB \cdot BH}{OH} = \frac{20}{3}$. Taigi trikampio AEF perimetras lygus $\frac{40}{3}$.



10 pav.

Ats.: $\frac{40}{3}$.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

Išspręskite nelygybes:

1. $\frac{x-1}{6} + x \geq \frac{2x+1}{2} - \frac{3}{4}$;

Sprendimas. Aišku, kad nelygybės apibrėžimo sritis yra visa realiųjų skaičių aibė R . Pertvarkę nelygybę gauname: $\frac{x-1}{6} + x \geq \frac{2x+1}{2} - \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2(x-1) + 12x \geq 6(2x+1) - 9 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

Ats. $x \in [-\frac{1}{2};\ +\infty)$.

2. $5(x-1)^2 + 3x < 3$.

Sprendimas. Nelygybės apibrėžimo sritis – realiųjų skaičių aibė R. Tuomet: $5(x-1)^2 + 3x < 3 \Leftrightarrow 5x^2 - 7x + 2 < 0 \Leftrightarrow 5(x-1)\left(x - \frac{2}{5}\right) < 0 \Rightarrow \frac{2}{5} < x < 1$.

Ats. $x \in \left(\frac{2}{5}; 1\right)$.

3. Su kuriomis *m* reikšmėmis nelygybės $x^2 + 2(m+1)x + 9m > 5$ sprendinių aibė yra visa realiųjų skaičių aibė ?

Sprendimas. Nelygybės apibrėžimo sritis – realiųjų skaičių aibė R. Tuomet: $x^2 + 2(m+1)x + 9m > 5 \Leftrightarrow x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 > 0$. Pastaroji nelygybė galios su visomis realiosiomis *x* reikšmėmis, kai kvadratinio trinario $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5$ diskriminantas yra neigiamas: $(m+1)^2 - 9m + 5 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-6) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 6$.

Ats. $m \in (1; 6)$.

Išspręskite nelygybes:

4. $\frac{x^2-5x+1}{x^2-4x+5} \geq 3$;

Sprendimas. Nelygybės apibrėžimo sritis – realiųjų skaičių aibė R, nes $x^2 - 4x + 5 > 0$ su visomis realiosiomis *x* reikšmėmis. Tuomet: $\frac{x^2-5x+1}{x^2-4x+5} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+1}{x^2-4x+5} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+7x-14}{x^2-4x+5} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-7x+14}{x^2-4x+5} \leq 0$. Pastaroji nelygybė sprendinių neturi, nes $2x^2 - 7x + 14 > 0$ ir $x^2 - 4x + 5 > 0$ su visomis realiosiomis *x* reikšmėmis.

Ats. $\emptyset$.

5. $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \geq 1$;

Sprendimas. Nelygybės apibrėžimo sritis yra $\{\mathrm{R}: x \neq -1, x \neq -2, x \neq -3\}$, t. y. realiųjų skaičių aibė išmetus taškus $-1, -2, -3$. Pertvarkome nelygybę:

$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-12(x^2+1)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow$ $\frac{x^2+1}{(x+1)(x+2)(x+3)} \leq 0$. Intervalų metodu nesunkiai nustatome, kad pastarosios nelygybės sprendinių aibė yra $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; -1)$.

Ats. $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; -1)$.

6. $\sqrt{(x+4)(x-5)} > \sqrt{(2-x)(x+1)} - \sqrt{x^2+x+1}$;

Sprendimas. Nustatykime nelygybės apibrėžimo sritį:

$$\begin{cases} (x+4)(x-5) \geq 0, \\ (2-x)(x+1) \geq 0, \\ x^2+x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+4)(x-5) \geq 0, \\ (x-2)(x+1) \leq 0, \\ x^2+x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -4] \cup [5; +\infty), \\ x \in (-1; 2], \\ x \in (-\infty; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \emptyset.$$

Apibrėžimo sritis – tuščia aibė, taigi nelygybė sprendinių neturi.

Ats. $\emptyset$.

7. $x+2 < \sqrt{x+14}$;

Sprendimas. Nelygybės apibrėžimo sritis: $x+14 \geq 0 \Rightarrow x \geq -14$. Nagrinėkime du atvejus: 1) $x+2<0$ ir 2) $x+2 \geq 0$.

1) Kai $x+2<0$, tai nelygybė galioja jos apibrėžimo srityje: $\begin{cases} x < -2, \\ x \geq -14 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{-14 \leq x < -2}$.

2) Kai $x+2 \geq 0$, turėsime:

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ (x+2)^2 < x+14, \\ x \geq -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ x^2+3x-10 < 0, \\ x \geq -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ -5 < x < 2, \\ x \geq -14 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{-2 \leq x < 2}.$$

Apjungę abiejų atvejų rezultatus gauname nelygybės sprendinių aibę $-14 \leq x < 2$.

Ats. $x \in [-14;\ 2)$.

8. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} > \frac{3}{2}$;

Sprendimas. Nelygybės apibrėžimo sritis:

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x+2\sqrt{x-1} \geq 0, \\ x-2\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x \geq 2\sqrt{x-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 \geq 4(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ (x-2)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1.$$

Pakėlę abi nelygybės puses kvadratu po pertvarkymų gausime nelygybę $2x + 2|x-2| > \frac{9}{4}$.

Kai $x \geq 2$, turėsime: $\begin{cases} x \geq 1, \\ x \geq 2, \\ 4x-4 > \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x > \frac{25}{16} = 1{,}5625 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x \geq 2}.$

Kai $x < 2$, tuomet: $\begin{cases} x \geq 1, \\ x < 2, \\ 2x-2x+4 > \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2, \\ 16 > 9 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{1 \leq x < 2}.$

Apjungę abiejų atvejų rezultatus gauname nelygybės sprendinių aibę $x \geq 1$.

Ats. $x \in [1;\ +\infty)$.

9. $\frac{\sqrt{2x^2+7x-4}}{x+4} < \frac{1}{2}$.

Sprendimas. Nelygybės apibrėžimo sritis:

$$\begin{cases} 2x^2+7x-4 \geq 0, \\ x \neq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-\frac{1}{2})(x+4) \geq 0, \\ x \neq -4 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty;\ -4) \cup [\tfrac{1}{2}; +\infty).$$

Kai $x < -4$, tuomet kairioji nelygybės pusė neigiama. Taigi nelygybė galioja kai $\boldsymbol{x < -4}$.

Kai $x > -4$ (atsižvelgiant į apibrėžimo sritį – kai $x \geq \frac{1}{2}$), abi nelygybės puses keliame kvadratu: $\begin{cases} \frac{\sqrt{2x^2+7x-4}}{x+4} < \frac{1}{2}, \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x^2+7x-4}{(x+4)^2} < \frac{1}{4}, \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x^2+20x-32 < 0, \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} (x+4)(x-\frac{8}{7}) < 0, \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 < x < \frac{8}{7}, \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < \frac{8}{7}.$$

Apjungę abiejų atvejų sprendinių aibes gauname nelygybės sprendinių aibę $(-\infty;\ -4) \cup [\frac{1}{2}; \frac{8}{7})$.

Ats. $x \in (-\infty;\ -4) \cup [\frac{1}{2}; \frac{8}{7})$.

10. Įrodykite nelygybę $\left(\frac{x^2}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y^2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} > \sqrt{x} + \sqrt{y}$, kai $x > 0,\ y > 0,\ x \neq y$.

Įrodymas. Nelygybę įrodysime ją ekvivalenčiai pertvarkydami (pradžioje abi nelygybės puses pakeldami kvadratu) iki nelygybės, kuri akivaizdžiai galioja su $x > 0,\ y > 0,\ x \neq y$.

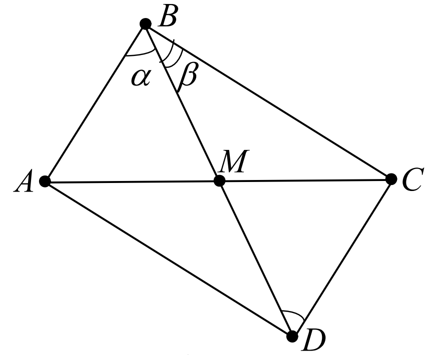
$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y^2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} > \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow \frac{x^2}{y} + 2\sqrt{xy} + \frac{y}{x^2} > x + 2\sqrt{xy} + y \Leftrightarrow \frac{x^2}{y} + \frac{y}{x^2} > x + y$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+y^3}{xy} > x + y \Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2) > xy(x+y) \Leftrightarrow (x-y)^2 > 0.$$

Nelygybė įrodyta.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Atkarpa BM yra trikampio ABC pusiaukraštinė, ji su kraštinėmis BA ir BC sudaro kampus lygius α ir β. Raskite šios pusiaukraštinės ilgį, jei kraštinės BC ilgis lygus a.

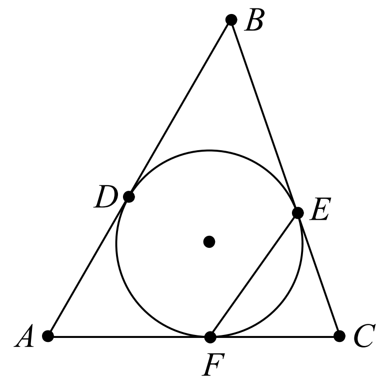


1 pav.

Sprendimas. Pusiaukraštinės BM tęsinyje už taško M atidedame atkarpą $MD = BM$ (1 pav.). Kadangi keturkampio $ABCD$ įstrižainės AC ir BD susikirsdamos taške M dalijasi pusiau, tai šis keturkampis yra lygiagretainis, todėl $\angle BDC = \angle ABD = \alpha$, o $\angle BCD = 180^0 - \angle ABC = 180^0 - (\alpha + \beta)$. Trikampiui BCD pritaikę sinusų teoremą gauname, kad $\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin \angle BCD}$. Iš čia $BD = \frac{a \sin(180^0 - (\alpha+\beta))}{\sin \alpha} = \frac{a \sin(\alpha+\beta)}{\sin \alpha}$. Taigi $BM = \frac{1}{2} BD = \frac{a \sin(\alpha+\beta)}{2 \sin \alpha}$.

Ats.: $\frac{a \sin(\alpha+\beta)}{2 \sin \alpha}$.

2. Trikampio ABC kampo A didumas lygus 60^0, įbrėžtas į trikampį apskritimas liečia kraštines AB, BC, AC atitinkamai taškuose D, E, F, $AF = 5$, $FC = 3$. Raskite atkarpos EF ilgį.



2 pav.

Sprendimas. Pagal apskritimo liestinių, nubrėžtų iš vieno taško, savybes turime, kad $AD = AF = 5$, $CF = CE = 3$ (2 pav.). Sakykime, kad $DB = BE = a$, $EF = x$. Taikydami kosinusų teoremą trikampiui ABC, gauname, kad $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$, iš čia $(a+3)^2 = (5+a)^2 + 8^2 - 2(a+5) \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$. Atlikę veiksmus gauname, kad $a^2 + 6a + 9 = 25 + 10a + a^2 + 64 - 8a - 40$, t. y. $a = 10$. Taikydami kosinusų teoremą trikampiui ABC rasime kampo C kosinusą: $\cos \angle C = \frac{CA^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot CA \cdot BC} = \frac{8^2 + 13^2 - 15^2}{2 \cdot 8 \cdot 13} = \frac{1}{26}$. Dabar iš kosinusų teoremos trikampiui CEF randame

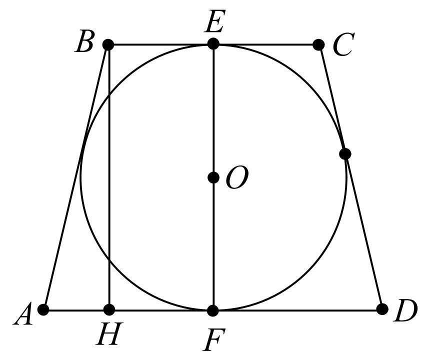
$$EF^2 = CE^2 + CF^2 - 2CE \cdot CF \cos \angle C = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{26} = \frac{225}{13},$$

taigi $EF = \frac{15}{\sqrt{13}}$.

Ats.: $\frac{15}{\sqrt{13}}$.

3. Apie apskritimą, kurio spindulys lygus R, apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios smailusis kampas lygus α. Raskite trapecijos perimetrą.

Sprendimas. Sakykime, kad trapecijos $ABCD$ pagrindai AD ir BC, $AD > BC$, $\angle BAD = \angle ADC = \alpha$ yra smailusis trapecijos kampas (3 pav.). Per apskritimo centrą O nubrėžkime atkarpą EF, statmeną trapecijos pagrindams ir nubrėžkime trapecijos aukštinę BH, akivaizdu, kad $BH = 2R$, o $AB = \frac{BH}{\sin \angle BAH} = \frac{2R}{\sin \alpha}$. Trapecijos perimetras $p = AB + BC + CD + AD = BC + AD + 2AB$. Kadangi trapecija apibrėžta apie apskritimą, tai $AB + CD = BC + AD$, t. y. $2AB = BC + AD$, todėl $p = 2AB + 2AB = 4AB = \frac{8R}{\sin \alpha}$.

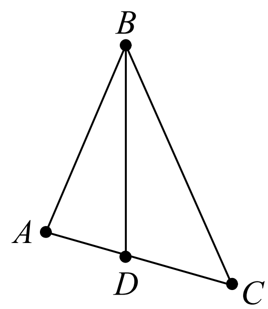


3 pav.

Ats.: $\frac{8R}{\sin \alpha}$.

4. Trikampyje ABC $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, kraštinėje AC yra taškas D toks, kad $\angle BDC = \gamma$. Raskite atkarpos BD ilgį.

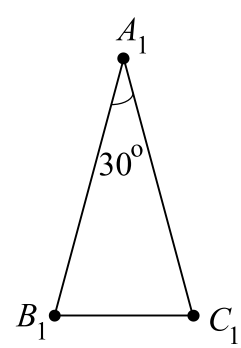
Sprendimas. Trikampiui ABC (4 pav.) taikydami sinusų teoremą gauname, kad $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$, todėl $BC = \frac{b \sin}{\sin \beta}$. Kadangi $\angle ACB = 180^0 - \alpha - \beta$, tai iš sinusų teoremos trikampiui BDC gauname, kad $\frac{BD}{\sin \angle ACB} = \frac{BC}{\sin \angle BDC}$, taigi $BD = \frac{BC \sin(180^0 - \alpha - \beta)}{\sin \gamma} = \frac{b \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \sin \gamma}$.



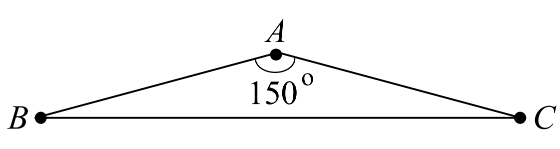
4 pav.

5. Trikampio ABC kraštinės $AB = 8$, $AC = 10$, o jo plotas lygus 20. Raskite trečios trikampio kraštinės ilgį.

Sprendimas. Trikampio ABC plotas $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle ACB$, todėl pagal sąlygą $20 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \sin \angle ACB$. Iš čia randame, kad $\sin \angle ACB = 0{,}5$. Taigi $\angle ACB = 30^0$ (5a pav.), arba $\angle ACB = 150^0$ (5b pav.). Taikydami kosinusų teoremą $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle ACB$ pirmuoju atveju gauname $BC^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 164 - 80\sqrt{3}$, o antruoju atveju $BC^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 164 + 80\sqrt{3}$,



5a pav.

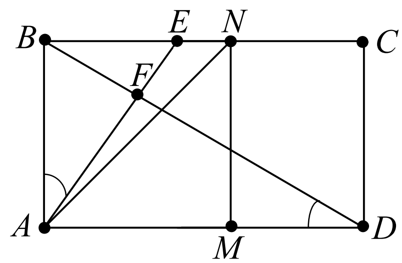


5b pav.

Ats.: $\sqrt{164 \pm 80\sqrt{3}}$.

6. Stačiakampio $ABCD$ kraštinėse AD ir BC atitinkamai pažymėti taškai M ir N taip, kad keturkampis $AMNB$ yra kvadratas, kurio įstrižainė lygi stačiakampio ilgesniajai kraštinei, taškas E yra kraštinės BC vidurio taškas. Raskite kampą tarp tiesių BD ir AE.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesės AD ir AE susikerta taške F (6 pav.), stačiakampio $ABCD$ trumpesnioji kraštinė $AB = a$, taigi ir kvadrato $AMNB$ kraštinė lygi a, tuomet ilgesnioji stačiakampio kraštinė $AD = AN = \sqrt{2}a$, o atkarpa $BE = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ (6 pav.). Iš stačiųjų trikampių AEB ir ADB randame, kad $tg\angle BAE = \frac{BE}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $tg\angle ADB = \frac{AB}{AD} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = tg\angle BAE$, taigi kampai BAE ir ADB yra lygūs. Kadangi $\angle ADB = 90^0 - \angle ABD$, tai ir $\angle BAE = 90^0 - \angle ABD$. Iš trikampio ABF randame, kad $\angle AFB = 180^0 - \angle BAF - \angle ABF = 90^0$.

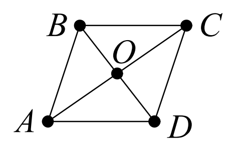


6 pav.

Ats.: 90^0.

7. Rombo perimetro ir įstrižainių ilgių sumos santykis lygus 3 :2. Raskite rombo kampus.

Sprendimas. Sakykime, kad rombo $ABCD$ kraštinės ilgis $AB = BC = m$, smailusis kampas $\angle BAD = x$, o įstrižainių ilgiai $AC = c$, $BD = d$ (7 pav.). Sakykime, kad rombo įstrižainės susikerta taške O. Kadangi rombo įstrižainės yra statmenos ir dalija rombo kampus pusiau, tai iš stačiojo trikampio AOB randame $\frac{d}{2} = m\sin\frac{x}{2}$, $\frac{c}{2} = m\cos\frac{x}{2}$. Pagal sąlygą $\frac{4m}{c+d} = \frac{3}{2}$, todėl $\frac{4m}{2m(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})} = \frac{3}{2}$. Suprastinę iš m matome, kad ieškomasis smailusis kampas x yra trigonometrinės lygties $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = \frac{4}{3}$ sprendinys. Kadangi abi lygties pusės yra teigiamos, tai šią lygtį galima spręsti keliant abi puses kvadratu: $\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = \frac{16}{9}$. Kadangi $\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1$, o $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x$, tai gautoji lygtis tampa tokia: $\sin x = \frac{7}{9}$, taigi smailusis kampas $x = \arcsin\frac{7}{9}$.

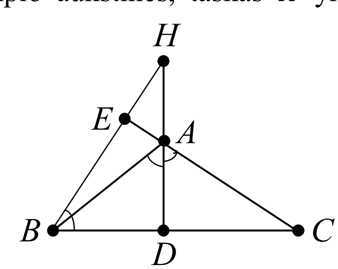


7 pav.

Ats.: $\angle BAD = \angle BCD = \arcsin\frac{7}{9}$, $\angle ABC = \angle ADC = 180^0 - \arcsin\frac{7}{9}$.

8. Lygiašonio trikampio ABC kampas prie viršūnės α yra bukasis, pagrindo BC ilgis lygus a, atkarpa BE yra aukštinė, nubrėžta į šoninę kraštinę. Raskite taško E atstumą iki trikampio ABC ortocentro (aukštinių sankirtos taško).

Sprendimas. Sakykime, kad lygiašonio trikampio ABC kampas prie viršūnės $\angle BAC = \alpha$ yra bukasis kampas, pagrindas $BC = a$, atkarpos AD ir BE yra trikampio aukštinės, taškas H yra aukštinių sankirtos taškas (8 pav., kadangi trikampis yra bukasis, tai taškas H yra trikampio išorėje, aukštinių AD ir BE tęsiniuose). Kadsangi $\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^0 - \angle BAC) = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$, o $\angle HBC = \angle EBC = 90^0 - \angle ECB = 90^0 - \angle ACB = \frac{\alpha}{2}$, tai iš stačiųjų trikampių BHD ir BEC randame, kad $BH = \frac{BD}{\cos\angle HBD} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$, $BE = BC\sin\angle BCE = a\sin\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = a\cos\frac{\alpha}{2}$. Todėl



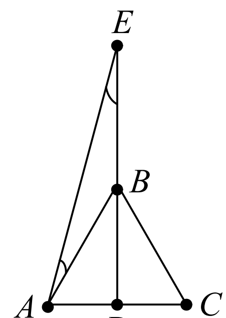
8 pav.

$$EH = BH - BE = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}} - a\cos\frac{\alpha}{2} = a\frac{1 - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = a\frac{1 - 2\cdot\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = -a\frac{\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Ats.: $-a\frac{\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

9. Atkarpa BD yra lygiakraščio trikampio ABC aukštinė, jos tęsinyje už taško B atidėta atkarpa BE lygi trikampio kraštinei. Naudodami šią konstrukciją, raskite 15^0 kampo sinuso, kosinuso ir tangento reikšmes.

Sprendimas. Sakykime, kad BD yra lygiakraščio trikampio ABC aukštinė, jos tęsinyje atidėta atkarpa $BE = AB$ ir nubrėžta atkarpa EA (9 pav). Kadangi $\angle ABD = 30^0$, tai $\angle ABE = 150^0$, todėl $\angle EBA = \angle AEB = \frac{1}{2}(180^0 - \angle ABE) = 15^0$. Iš stačiojo trikampio ADE randame $tg\angle AEB = tg15^0 = \frac{AD}{ED}$. Jei trikampio kraštinė $AB = a$, tai $BD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $AD = \frac{a}{2}$, $ED = EB + BD = a + \frac{\sqrt{3}}{2}a$, todėl $tg15^0 = \frac{a}{2} : \frac{2+\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$. Taikydami formules $\sin^2 x = \frac{tg^2x}{1+tg^2x}$ ir $\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2x}$, gauname $\sin^2 15° = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{1+(2-\sqrt{3})^2} = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{8-4\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{4(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)$, $\cos^2 15° = \frac{1}{8-4\sqrt{3}} = \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)$.



9 pav.

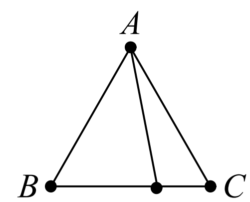
Ats.: $\sin 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\cos 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $tg15^0 = 2 - \sqrt{3}$.

10. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinėje BC yra taškas D ir $BD : DC = 2 : 1$. Raskite kampą ADB.

Sprendimas. Sakykime, kad trikampio ABC kraštinės ilgis yra a, $\angle ADB = \alpha$. (10 pav.). Taikydami kosinusų teoremą trikampiui ABD gauname $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD\cos 60^0 = a^2 + (\frac{2a}{3})^2 - 2a \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{9}a^2$, todėl $AD = \frac{\cdot\sqrt{7}}{3}a.$. Trikampiui ABD dar kartą taikome kosinusų teoremą ir gauname, kad $AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2 \cdot BD \cdot AD\cos\alpha$, taigi

$$a^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + \frac{7}{9}a^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}a \cdot \cos\alpha,$$

iš čia $\frac{2}{9}a^2 = \frac{4\sqrt{7}}{9}a^2\cos\alpha$, todėl $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{7}}$.



10 pav.

Ats. : $\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}$.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Jonas lygiomis dienos porcijomis statinaitę giros išgertų per 10 dienų, o Andrius – per 14 dienų. Per kiek dienų jie išgertų statinaitę giros gerdami abudu kartu?

Sprendimas. Per vieną dieną Jonas išgertų $\frac{1}{10}$ statinaitės giros, o Andrius – $\frac{1}{14}\cdot$ Todėl juodu abudu per vieną dieną išgertų $\frac{1}{10}+\frac{1}{14}=\frac{7+5}{70}=\frac{12}{70}=\frac{6}{35}$ statinaitės giros. Todėl visą statinaitę giros juodu išgertų per $\frac{1}{\frac{6}{35}}=\frac{35}{6}$ dienos.

Atsakymas. Per 35/6 dienos.

2. Petras norėtų pirkti knygą, bet jis visai neturi pinigų. Todėl jis kreipėsi pagalbos į tėtį ir į du savo brolius – jaunesnįjį ir vyresnįjį ir jų padedamas jis tą knygą nusipirko. Yra žinoma, jog jo tėtis davė pusę tos sumos, kurią davė abudu Petro broliai, vyresnysis brolis davė trečiąją dalį to, ką davė tėtis ir jaunesnysis brolis, kuris tiesiog iš karto davė 10 eurų. Kiek gi kainuoja ta knyga?

Sprendimas. Sakykime, kad tėvas davė T eurų, vyresnysis brolis V eurų. Tada pagal sąlygą

$$T=\frac{1}{2}(V+10) \qquad \text{ir} \qquad V=\frac{1}{3}(T+10).$$

Įrašius T išraišką į antrąją lygtį gautume

$$V=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}(V+10)+10)\,.$$

Pertvarkę gautume

$$V=\frac{1}{6}V+\frac{10}{6}+\frac{10}{3}, \quad \text{arba} \quad \frac{5}{6}V=5.$$

Galiausiai

$$\frac{1}{6}V=1 \quad \text{ir} \quad V=6.$$

Taigi tėvas davė $T=\frac{1}{2}(10+6)=8$, o visa knyga kainuoja 8 + (6 + 10) = 24 eurus.

Atsakymas. Knyga kainuoja 24 eurus.

3. Koks yra pats mažiausias natūralusis skaičius, kurį galima dviem būdais užrašyti trijų natūraliųjų skaičių suma taip, jog visi 6 dėmenys yra skirtingi.

Sprendimas. Jeigu pabandytume konkrečius skaičius, tai pamatytume, kad 15 taip užrašyti galime, nes

$$15 = 6 + 8 + 1 = 9 + 2 + 4.$$

Galima ir 14, nes

$$14 = 6 + 7 + 1 = 8 + 2 + 4.$$

Kur turėtume sustoti?

Jeigu T yra toks pats mažiausias skaičius, kurį dviem būdais galima užrašyti trijų skirtingų natūraliųjų skaičių suma taip, kad visi 6 dėmenys yra skirtingi, tai tada tikrai sudėjus tas abi lygybes turėtume

$$2T \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6.$$

Tada

$$T \geq 10{,}5$$

ir, vadinasi, kadangi T yra natūralusis skaičius, tai $T \geq 11$.

Pastebėkime, kad 11 tikrai taip užrašyti galima, nes 11 = 4 + 5 + 2 = 7 + 1+ 3 ir visi 6 dėmenys yra skirtingi.

Atsakymas. 11.

4. Raskite tris iš eilės einančius natūraliuosius skaičius, kad jų suma baigtųsi skaičiumi 2023. Koks yra toksai pats mažiausias tokių skaičių trejetas?

Sprendimas. Pirmiausiai pastebėkime, kad trijų iš eilės einančių natūraliųjų skaičių suma $a + (a + 1) + (a + 2)$ yra lygi $3a + 3$ ir dalijasi be liekanos iš 3. Todėl dėl to dalumo iš 3, pats mažiausias tokių skaičių trejetas, kuris baigiasi skaitmenimis 2, 0, 2, 3 turi turėti bent 9 lygią skaitmenų sumą, vadinasi, toji suma yra mažiausiai penkiaženklė ir jeigu taip, tai jos pirmasis skaitmuo turi būti lygus 2.

Todėl gauname, jog

$$3a + 3 = 22023, \quad 3a = 22020 \quad \text{ir} \quad a = 7340.$$

Atsakymas. 7340, 7341 ir 7342.

5. Tenisininkas Petras skaičiuoja savo laimėtų mačų (nuo visų jo sužaistųjų mačų) procentą. Prieš paskutinį turnyrą, kuriame Petras laimėjo visus mačus, tas procentas buvo lygiai 25 procentai, o po to paskutinio turnyro jis pasidarė lygus lygiai 75 procentams.

Nustatykite, kelis kartus visų Petro paskutiniame turnyre laimėtų mačų skaičius yra didesnis už jo visų iki to turnyro jo sužaistų (laimėtų ir pralaimėtų) mačų skaičių.

Sprendimas. Iki paskutinio turnyro Petras žaidė $4N$ partijų ir iš jų laimėjo N susitikimų. Paskutiniame turnyre jis laimėjo visus susitikimus, tarkime, kad jų buvo A. Tada jo pergalių procentas yra lygiai 75 ir, vadinasi,

$$\frac{N+A}{4N+A}=\frac{3}{4}.$$

Todėl

$$4N+4A=12N+3A,$$

iš kur išplaukia, kad A = $8N$. Ir mes matome, jog Petro paskutiniame turnyre laimėtų mačų skaičius yra lygiai du kartus didesnis už jo visų iki to turnyro sužaistų mačų skaičių.

Atsakymas: 2 kartus didesnis.

6. Ar galima į kvadratinės lentelės 5 x 5 langelius įrašyti visus skaičius nuo 1 iki 25 (po vieną skaičių į kiekvieną langelį) taip kad skaičių suma kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir abiejose įstrižainėse būtų nelyginė?

Sprendimas. Tarp 25 natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 25 yra 13 nelyginių skaičių. Pažymėkime juos raide N ir surašykime juos į lentelės 5 x 5 langelius taip kaip tai parodyta žemiau pateikiamame brėžinyje.

		N		
	N	N	N	
N	N	N	N	N
	N	N	N	
		N		

*Likusiuose 12 nepa*žymėtų langelių bus surašyti lyginiai skaičiai. Nesunku įsitikinti, kad taip užpildytoje lentelėje kiekvienoje eilutėje, kiekviename stulpelyje ir abiejose (ilgosiose) įstrižainėse tikrai yra po nelyginį nelyginių skaičių, o tai ir reiškia, kad visos tos 12 sumų bus nelyginės.

Atsakymas. Taip surašyti galima.

7. Į kiekvieną lentelės 3 x 3 langelį įrašyta po teigiamą skaičių tokiu būdu, kad visų trijų kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio skaičių sandauga yra lygi 1, o visų keturių bet kurio 2 x 2 kvadrato skaičių sandauga yra lygi 2. Nustatykite, koks skaičius yra įrašytas centriniame lentelės langelyje.

Sprendimas. Pažymėkime tuos skaičius raidėmis a, b, c, d, e, f, g, h ir i.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Kadangi visų pirmųjų dviejų stulpelių skaičių sandaugos yra lygios 1, o visų keturių kairiojo apatinio 2 x 2 skaičių sandaugos yra lygios 2, todėl padalinę pirmą lygybę iš antrosios gauname, jog ab = ½. Analogiškai cf = ½. Lygiai taip pat sandaugos hi ir dg yra lygios po vieną antrąją.

Sudauginę tas keturias lygybes gauname, jog visų skaičių, išskyrus centrinį skaičių *e,* sandaugos yra lygios 1/16. Kadangi visų lentelės skaičių (kaip visų trijų eilučių skaičių) sandauga lygi 1, tai centrinis skaičius *e* yra lygus 16.

Atsakymas. 16.

8. Mokytojas nupiešė lentoje stačiakampį ir padalino jį į 4 mažesnius stačiakampius *A*, *B*, *C* ir *D* (žiūrėkite piešinį).

A	*C*
B	*D*

Tada mokytojas pakvietė prie lentos Martyną ir pasiūlė jam išspręsti tokį uždavinį: „Tarp skaičių 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 18 kažkurie keturi skaičiai reiškia stačiakampių A, B, C ir D plotus; be to, dar yra žinoma, kad tie visi plotai yra skirtingi. Ar galėtum nurodyti, kokie yra tie 4 skaičiai?“

Padėkite Martynui išspręsti mokytojo jam pasiūlytą uždavinį. Ar tai padaryti yra įmanoma?

Sprendimas. Jeigu plotai yra tokie, kaip parodyta brėžinyje, todėl turi galioti lygybė $A\cdot D = B \cdot C$. Kadangi visi plotai yra skirtingi, tai matome, jog iš lentelėje pasiūlytų nelygių plotų sąlygą tenkina 3, 6, 9 ir 18, nes $3 \cdot 18 = 6 \cdot 9$.

Atsakymas. Taip padaryti yra įmanoma.

9. Tėvas parnešė sūnui 4 natūraliuosius skaičius ir paprašė sūnaus visaip sudėti juos po du skirtingus skaičius visais galimais būdais. Sūnus sudėjo ir pradėjo 6-šias gautąsias sumas rašyti iš eilės. Jis tespėjo užrašyti tik 5-ias iš 6-ių gautųjų sumų

$$10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 17,$$

kai tėvas, pasižiūrėjęs, ką jis ten rašo, pasakė, kad jis bus kažką sumaišęs. Kuris iš jų yra teisus?

Sprendimas. Sakykime, kad tėvas parnešė sūnui sudėti k vienokio lyginumo ir $4 - k$ kitokio lyginumo skaičių ($k = 0$, 1 arba 2). Kadangi dviejų natūraliųjų skaičių suma yra nelyginė tada ir tiktai tada, kai dėmenys yra skirtingo lyginumo, tai tada tarp 6-ių sūnaus gautųjų sumų nelyginių sumų bus lygiai $k(4 - k)$.

Įrašydami į išraišką $k(4 - k)$ skaičiaus k reikšmes, lygias 0, 1 ir 2, gauname atitinkamai, kad nelyginių paporių tėvo parneštųjų skaičių sumų gali būti tik arba 0, arba 3, arba 4. Tačiau nė viena iš tų galimybių negali būti realizuota tarp sąlygoje jau nurodytų paporių sumų, nes pirmiausiai, sąlygoje jau yra nurodyta viena nelyginė suma, todėl nelyginių sumų tada galėtų būti daugiausiai dvi. Todėl, skaičiuodamas sumas, sūnus tikrai bus apsirikęs, o tėvas yra teisus.

Atsakymas. Tėvas yra teisus.

10. Utopijos fermoje fermeris Svajūnas turi lauką, kuriame esančios žolės kiekis kasdien padidėja po tiek pat. Šešioms karvėms užtruktų 3 pilnas dienas nuėsti visą viso lauko žolės kiekį, o trys karvės tą patį padarytų per 7 pilnas dienas.

Laikant, kad fermerio Svajūno karvės suėda visos kasdien po tiek pat šieno, kiek laiko užtruktų 1 karvei nuėsti visą to lauko šieną?

Sprendimas. Sakykime, kad F yra pačioje pradžioje pievoje esančio šieno kiekis, K – šieno kiekis, kuri kiekviena karvė suėda per vieną dieną (pagal sąlygą tas K yra vienas ir toks pats visoms karvėms) ir A yra tas kiekis, kiek žolės Svajūno pievoje priauga per vieną pilną dieną. Iš sąlygoje pateiktos informacijos turime, kad

$$F + 3A = 6 \cdot 3 \cdot K \quad \text{ir} \quad F + 7A = 3 \cdot 7 \cdot K.$$

Iš antrosios lygybės atėmę pirmąją gausime, kad $4 \cdot A = 3 \cdot K$ ir todėl $F = 21 \cdot A$.

Toliau sakykime, kad n yra tas dienų skaičius, per kurį viena karvė nuės visą Svajūno pievos žolės kiekį. Tada mes turime turėti, kad

$$F + n \cdot A = n \cdot K.$$

Pasinaudodami tuo, kas jau buvo gauta, mes gauname lygybę

$$21 \cdot A + n \cdot A = \frac{4}{3}\, n \cdot A.$$

Suprastinę iš A gausime

$$21 + n = \frac{4}{3}\, n, \quad \text{arba galutinai} \quad n = 63.$$

Atsakymas. Viena karvė fermerio Svajūno pievą pilnai nuėstų per 63 pilnas dienas.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1–7 uždaviniai. Išspręskite diofantines lygtis:

1. a) $x^2 - 7y - 17 = 0$;
b) $x^2 - 2x - 7y - 1107 = 0$;

2. a) $15x + 11y = 1$; b) $15x + 21y = 1$;

3. $225563x + 53313y = 39$;

4. $3xy + x - 2y - 29 = 0$;

5. $2x^2 - 7xy + x - 2y - 3 = 0$;

6. a) $x^2 + 9y^2 = 77777779$;
b) $4x^2 + 6xy + 3y^2 - 2x - 48 = 0$;

7. a) $x^2 - y^2 + 3x - 5y + 24 = 0$;
b) $x^2 - 5y^2 = 3$.

Sprendimai. Spręsdami kiekvieną iš duotųjų lygčių, tarkime, kad (x, y) yra tos lygties (sveikasis) sprendinys. Pirmiausiai išspręsime lygtis 1.a, 2.b, 6.a, 7.b. Kiekvienu iš šių keturių atvejų gausime prieštarą prielaidai, kad lygtis turi sprendinį (x, y), ir taip įrodysime, kad lygtis neturi sprendinių.

1. a) Skaičius $x^2 = 7y + 17 = 7y + 14 + 3$ dalijasi iš 7 su liekana 3. Tegu $x = 7k + r$, kur r yra skaičiaus x dalybos iš 7 liekana. Tada $x^2 = 49k^2 + 14kr + r^2$ dalybos iš 7 liekana 3 yra tokia pati kaip skaičiaus r^2. Tačiau čia $r = 0, 1, 2, ..., 6$, ir jokiu iš 7 atvejų skaičiaus r^2 dalybos iš 7 liekana nėra lygi 3.

2. b) Skaičius $15x + 21y = 3 \cdot (5x + 7y)$ vienu metu ir dalijasi iš 3, ir yra lygus 1. Taip būti negali.

6. a) Sveikojo skaičiaus kvadratas visada dalijasi iš 4 su liekana 0 arba 1 (žr. VII užduoties 10 pavyzdį). Taigi $x^2 + y^2$ dalybos iš 4 liekana gali būti tik $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$ arba $1 + 1 = 2$. Tokia pati yra ir $x^2 + 9y^2 = x^2 + y^2 + 4 \cdot 2y^2$ dalybos iš 4 liekana. Tačiau $x^2 + 9y^2 = 77777779$ dalijasi iš 4 su liekana 3.

7. b) Skaičius $x^2 = 5y^2 + 3$ dalijasi iš 5 su liekana 3. Tegu $x = 5k + r$, kur r yra skaičiaus x dalybos iš 5 liekana. Tada skaičiaus $x^2 = 25k^2 + 10kr + r^2$ dalybos iš 5 liekana 3 yra tokia pati kaip skaičiaus r^2. Tačiau čia $r = 0, 1, 2, 3, 4$, ir jokiu atveju skaičiaus r^2 dalybos iš 5 liekana nėra lygi 3.

Ats.: $\emptyset$ (lygtys 1.a, 2.b, 6.a, 7.b).

Toliau išspręsime likusias lygtis.

1. b) Išskirkime pilnąjį kvadratą:

$$x^2 - 2x + 1 = 7y + 1107 + 1, \qquad (x-1)^2 = 7y + 1108 = 7y + 7 \cdot 158 + 2.$$

Taigi $(x-1)^2$ dalijasi iš 7 su liekana 2. Tegu $x - 1 = 7k + r$, kur r yra skaičiaus $x - 1$ dalybos iš 7 liekana. Tada $(x-1)^2 = 49k^2 + 14kr + r^2$ dalybos iš 7 liekana 2 yra tokia pati kaip skaičiaus r^2. Tinka tik $r = 3$ ir $r = 4$. Atitinkamai $x = 7k + 4$ ir $x = 7k + 5$. Lygybėje $49k^2 + 14kr + r^2 = 7y + 1108$ įrašę r reikšmes, gauname atitinkamas y išraiškas. Čia k yra bet koks sveikasis skaičius.

Ats.: $(x, y) = (7k + 4,\ 7k^2 + 6k - 157),\ k \in \mathbb{Z}$; $(x, y) = (7k + 5,\ 7k^2 + 8k - 156),\ k \in \mathbb{Z}$.

2. a) Lengva atspėti lygties atskirąjį sprendinį $(3, -4)$. Pertvarkykime duotąją lygtį:

$$15x + 11y = 15 \cdot 3 + 11 \cdot (-4), \qquad 15x - 15 \cdot 3 = -11y - 11 \cdot 4, \qquad 15(x-3) = -11(y+4).$$

Kadangi skaičiai 15 ir 11 yra tarpusavyje pirminiai, tai $x - 3$ dalijasi iš 11. Pažymėkime $x - 3 = 11k$. Tada $x = 11k + 3$, $\quad 15 \cdot 11k = -11(y+4)$, $\quad 15k = -y - 4$, $\quad y = -15k - 4$ (čia $k \in \mathbb{Z}$ – bet koks).

Ats.: $(x, y) = (11k + 3, -15k - 4),\ k \in \mathbb{Z}$.

3. Skaičiams $a = 225563$, $b = 53313$ pritaikykime Euklido algoritmą. Iš eilės dalijame

- a iš b: dalmuo 4, liekana $a - 4b = 12311$;
- b iš $a - 4b$: dalmuo 4, liekana $b - 4(a - 4b) = 17b - 4a = 4069$;
- $a - 4b$ iš $17b - 4a$: dalmuo 3, liekana $(a - 4b) - 3(17b - 4a) = 13a - 55b = 104$;
- $17b - 4a$ iš $13a - 55b$: dalmuo 39, liekana $(17b - 4a) - 39(13a - 55b) = 2162b - 511a = 13$.

(Pagaliau, dalydami 104 iš 13, gauname liekaną 0.) Lygybę $2162b - 511a = 13$ padauginę iš 3, gauname, kad duotoji lygtis $ax + by = 39$ turi atskirąjį sprendinį $(x, y) = (-1533, 6486)$.

Remiantis Euklido algoritmu, $\text{DBD}(a, b) = 13$. Tad pertvarkydami duotąją lygtį, padalykime ją iš 13:

$$225563x + 53313y = 39 = 225563 \cdot (-1533) + 53313 \cdot 6486, \quad |: 13,$$

$$17351x + 4101y = 17351 \cdot (-1533) + 4101 \cdot 6486, \quad \text{čia } \text{DBD}(17351, 4101) = \text{DBD}\left(\frac{a}{13}, \frac{b}{13}\right) = 1,$$

$$17351(x + 1533) = 4101(6486 - y), \ x + 1533 = 4101k, \ 6486 - y = 17351k \ \text{(čia } k \in \mathbb{Z} \text{ – bet koks).}$$

Ats.: $(x, y) = (4101k - 1533, -17351k + 6486),\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Lygtyje iškėlę prieš skliaustus x, gauname $x(3y+1)-2y-29=0$. Vienur lygtyje turime $3y+1$, o kitur $2y$. Kad ir čia gautume $3y+1$, padauginkime lygtį iš 3:

$$3x(3y+1)-2\cdot 3y-87=0,$$
$$3x(3y+1)-2(3y+1)+2-87=0,$$
$$(3x-2)(3y+1)=85=5\cdot 17,$$
$$3x-2=\pm 1, \pm 5, \pm 17, \pm 85.$$

Tinka $3x-2=1, -5, -17$ ir 85 (tada $x\in\mathbb{Z}$). Atitinkamai $3y+1=85, -17, -5$ ir 1. Liko išreikšti x ir y.

Ats.: $(x,y)=(1,28), (-1,-6), (-5,-2), (29,0)$.

5. Sugrupuokime narius, kuriuose yra y: gauname $y(7x+2)=2x^2+x-3$. Taigi $2x^2+x-3$ dalijasi iš $a=7x+2$. Reiškinį $2x^2+x-3$ išreikškime per a, prieš tai dėl patogumo padauginkime lygtį iš 7^2:

$$49ay=49y(7x+2)=2\cdot 7^2\cdot x^2+7^2\cdot x-7^2\cdot 3=2\cdot(7x)^2+7\cdot 7x-147=$$
$$=2(a-2)^2+7(a-2)-147=2a^2-8a+8+7a-14-147=2a^2-a-153.$$

Kadangi $2a^2-a-153$ dalijasi iš $a=7x+2$, tai dalijasi ir skaičius $153=3^2\cdot 17$. Taigi $7x+2=\pm 1, \pm 3$, $\pm 9, \pm 17, \pm 51, \pm 153$. Tinka tik $7x+2=9$ ir 51. Atitinkamai $x=1$ ir 7, o $y=\frac{2x^2+x-3}{7x+2}$ lygu 0 ir 2.

Ats.: $(x,y)=(1,0), (7,2)$.

6. b) Lygtyje galima įžvelgti pilnąjį kvadratą: $3y^2+6xy+3x^2=3(x+y)^2$. Pertvarkytoje lygtyje išskirkime dar vieną pilnąjį kvadratą:

$$0=3(x+y)^2+x^2-2x-48=3(x+y)^2+x^2-2x+1-49,$$
$$49=(x-1)^2+3(x+y)^2.$$

Pažymėję $X=x-1$, $Y=x+y$, gauname $49=X^2+3Y^2\geq 3Y^2$. Skaičius Y sveikasis, todėl lygtyje pakanka perrinkti galimybes $Y=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$. Tinka tik $(X,Y)=(\pm 7,0), (1,\pm 4), (-1,\pm 4)$. Atitinkamai gauname pradinės lygties šešis sprendinius (x,y) pagal formules $x=X+1$ ir $y=Y-x$.

Ats.: $(x,y)=(8,-8), (-6,6), (2,2), (2,-6), (0,4), (0,-4)$.

7. a) Koeficientai prie x ir y nelyginiai, tad, prieš išskirdami pilnuosius kvadratus (atskirai pagal x ir y), dėl patogumo padauginkime lygtį iš 4:

$$(2x)^2+12x-(2y)^2-20y+96=0,$$
$$(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+3^2-3^2-(2y)^2-2\cdot 2y\cdot 5-5^2+5^2+96=0,$$
$$(2x+3)^2-9-(2y+5)^2+25+96=0,$$
$$(2x+3)^2-(2y+5)^2=-112,$$
$$(2x-2y-2)(2x+2y+8)=-112,$$
$$(x-y-1)(x+y+4)=-28=-2^2\cdot 7.$$

Taigi $x-y-1=\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 14, \pm 28$. Atitinkamai $x+y+4=\mp 28, \mp 14, \mp 7, \mp 4, \mp 2, \mp 1$. Pavyzdžiui, jei $x-y-1=1$, tai turime $x+y+4=-28$, o sudėję šias lygybes, randame $2x+3=-27$ ir $x=-15$, $y=-17$. Analogiškai randame dar 7 sprendinius (kai $x-y-1=-1, \pm 4, \pm 7, \pm 28$). Likusius 4 atvejus galima atmesti, nes gaunama lyginė $2x+3$ reikšmė.

Ats.: $(x,y)=(-15,-17), (-15,12), (12,-17), (12,12), (0,3), (0,-8), (-3,3), (-3,-8)$.

8. Nustatykite diofantinės lygties $xy-4x+11y-2024=0$ sprendinių skaičių.

Sprendimas. Pertvarkykime lygtį taip:

$$x(y-4)+11y-2024=0,$$
$$x(y-4)+11(y-4)+11\cdot 4-2024=0,$$
$$(x+11)(y-4)=1980=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11.$$

Pažymėkime $X=x+11$, $Y=y-4$. Diofantinė lygtis $XY=1980$ turi tiek sprendinių, kiek skaičius 1980 turi daliklių. Kiekvieną sprendinį (X,Y) atitinka lygiai vienas pradinės lygties sprendinys $(x,y)=$ $=(X-11,Y+4)$. Taigi liko suskaičiuoti skaičiaus 1980 daliklius. Tai visi skaičiai $\pm 2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 11^d$, kur $a=0$, 1 arba 2, $b=0$, 1 arba 2, $c=0$ arba 1, $d=0$ arba 1. Turime $3\cdot 3\cdot 2\cdot 2=36$ tokius teigiamus daliklius, o iš viso $2\cdot 36=72$ daliklius bei atitinkamai 72 sprendinius (x,y).

Ats.: lygtis turi 72 sprendinius.

9. Pasinaudodami Pelio lygtimi, raskite diofantinės lygties $x^2 - 7y^2 = 2$ sprendinį, kuriam $x > 800$.

Sprendimas. Lengva atspėti duotosios lygties sprendinį $(x_0, y_0) = (3, 1)$ ir Pelio lygties $a^2 - 7b^2 = 1$ sprendinį $(a, b) = (8, 3)$. Juos atitinka skaičiai $3 + \sqrt{7}$ ir $8 + 3\sqrt{7}$. Gauname duotosios lygties sprendinius:

$$(3 + \sqrt{7}) \cdot (8 + 3\sqrt{7}) = 24 + 9\sqrt{7} + 8\sqrt{7} + 21 = 45 + 17\sqrt{7}, \qquad (x_1, y_1) = (45, 17);$$

$$(45 + 17\sqrt{7}) \cdot (8 + 3\sqrt{7}) = 360 + 135\sqrt{7} + 136\sqrt{7} + 357 = 717 + 271\sqrt{7}, \qquad (x_2, y_2) = (717, 271);$$

$$(717 + 271\sqrt{7}) \cdot (8 + 3\sqrt{7}) = 5736 + 2151\sqrt{7} + 2168\sqrt{7} + 5691 = 11427 + 4319\sqrt{7},$$

$$(x_3, y_3) = (11427, 4319), \text{ čia } x_3 > 800.$$

Ats.: pavyzdžiui, $(x, y) = (11427, 4319)$.

10. Tarkime, kad $(x, y) = (A, B)$ yra diofantinės lygties $x^2 - 5y^2 - 12x + 35 = 0$ natūralusis sprendinys. Nustatykite keturias mažiausias galimas skaičiaus A reikšmes.

Sprendimas. Pertvarkykime lygtį, išskirdami pilnąjį kvadratą:

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 - 6^2 - 5y^2 + 35 = 0, \qquad (x - 6)^2 - 5y^2 = 1.$$

Pažymėję $x - 6 = X$, gauname Pelio lygtį $X^2 - 5y^2 = 1$. Kiekvieną jos sprendinį (X, y) atitinka pradinės lygties sprendinys $(x, y) = (X + 6, y)$. Toliau laikykime, kad $y = B$, $X = x - 6 = A - 6$. Čia $A \geq 1$, $B \geq 1$. Tiesiogiai patikrinama, kad netinka $y = 1, 2, 3$, taigi $y \geq 4$. Jei $y = 4$, tai $X = \pm 9$, o jei $y > 4$, tai $X > 9$ arba $X < -9$. Jei $X \leq -9$, tai $A = X + 6 < 0$ (netinka). Taigi $X \geq 9$ yra natūralusis skaičius, (X, y) yra gautosios Pelio lygties **natūralusis** sprendinys, o toks sprendinys su mažiausia y reikšme yra $(a, b) = (9, 4)$. Pasiremkime bendrosiomis žiniomis apie Pelio lygtį: lygties $X^2 - 5y^2 = 1$ **visi** natūralieji sprendiniai (X, y) gaunami pagal formulę $X + y\sqrt{d} = (9 + 4\sqrt{5})^n$. Didėjant $n = 1, 2, 3, \ldots$, gaunamos vis didesnės X, $y = B$ ir $A = X + 6$ tinkamos natūraliosios reikšmės. Pagal formulę iš eilės gauname keturias ieškomas reikšmes:

$$(9 + 4\sqrt{5})^1 = 9 + 4\sqrt{5}, \qquad A = 9 + 6 = 15,$$

$$(9 + 4\sqrt{5})^2 = 161 + 72\sqrt{5}, \qquad A = 161 + 6 = 167,$$

$$(9 + 4\sqrt{5})^3 = (161 + 72\sqrt{5}) \cdot (9 + 4\sqrt{5}) = 2889 + 1292\sqrt{5}, \qquad A = 2889 + 6 = 2895,$$

$$(9 + 4\sqrt{5})^4 = (2889 + 1292\sqrt{5}) \cdot (9 + 4\sqrt{5}) = 51841 + 23184\sqrt{5}, \qquad A = 51841 + 6 = 51847.$$

Ats.: $A = 15, 167, 2895, 51847$.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Išspręskite lygtį $\log_5(2+\log_3(3+x))=0.$

Sprendimas.

$\log_5(2+\log_3(3+x))=0 \Rightarrow 2+\log_3(3+x)=1 \Rightarrow \log_3(3+x)=-1 \Rightarrow 3+x=\frac{1}{3} \Rightarrow x=-\frac{8}{3}.$

Ats.: $-\frac{8}{3}.$

2. Išspręskite lygtį $\lg(5-x)-\frac{1}{3}\lg(35-x^3)=0.$

Sprendimas. Padauginę iš 3, gausime lygtį

$$3\lg(5-x)-\lg(35-x^3)=0,$$

kuri ekvivalenti lygčiai $\lg(5-x)^3=\lg(35-x^3).$

Turėdami mintyje, kad turi galioti nelygybės $5-x>0$ ir $35-x^3$, išspręskime lygtį

$$(5-x)^3=35-x^3.$$

Gausime:

$125-75x+15x^2-x^3=35-x^3 \Rightarrow 15x^2-75x+90=0 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=2$ arba $x=3.$

Abu sprendiniai tenkina nelygybes $5-x>0$ ir $35-x^3>0;$ todėl yra logaritminės lygties sprendiniai.

Ats.: 2; 3.

3. Išspręskite lygtį $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2.$

Sprendimas. Kadangi $2=2\log_{\sqrt{5}}\sqrt{5}=\log_{\sqrt{5}}5,$ tai logaritminė lygtis ekvivalenti lygčiai

$$\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)=\log_{\sqrt{5}}5(2^x-2).$$

Taikydami keitinį $t=2^x,$ išspręskime lygtį

$$4^x-6=5(2^x-2).$$

Gausime:

$$t^2-6=5(t-2) \Rightarrow t^2-5t+4=0 \Rightarrow t=1 \text{ arba } t=4;$$

$$2^x=1 \Rightarrow x=0,$$

$$2^x=4 \Rightarrow x=2.$$

Sprendinys $x=0$ netenkina sąlygų $4^x-6>0$ ir $2^x-2>0,$ todėl jį atmetame.

Vadinasi, logaritminė lygtis turi tik vieną sprendinį – realųjį skaičių 2.

Ats.: 2.

4. Išspręskite lygtį $\log_3(3^x-8)=2-x.$

Sprendimas. $\log_3(3^x-8)=2-x \Rightarrow 3^x-8=3^{2-x} \Rightarrow 3^x-8=9\cdot 3^{-x} \Rightarrow (3^x)^2-8\cdot 3^x-9=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^x=-1$ (atmetame) arba $3^x=9 \Rightarrow x=2.$

Skaičius 2 tenkina nelygybę $3^x-8>0,$ todėl yra logaritminės lygties sprendinys.

Ats.: 2.

5. Išspręskite lygtį $\log_{x+4}(x^2-1)=\log_{x+4}(5-x).$

Sprendimas. Pagal logaritmo apibrėžimą, turi galioti šios sąlygos:

$$x^2-1>0,\ \ 5-x>0 \text{ ir } x+4\in(0;1)\cup(1;+\infty).$$

Belieka išspręsti lygtį $x^2-1=5-x$ ir patikrinti, ar jos sprendiniai tenkina visas tris sąlygas.

Gausime:

$$x^2-1=5-x \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x=-3 \text{ arba } x=2.$$

Kadangi $x+4=1$, jei $x=-3$, tai $x=-3$ nėra logaritminės lygties sprendinys.

Ats.: 2.

6. Išspręskite lygtį $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2=4.$

Sprendimas.

$\log_{x+1}(x^2+x-6)^2=4 \Rightarrow (x^2+x-6)^2=(x+1)^4 \Rightarrow (x^2+x-6)^2=(x^2+2x+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2+x-6)^2-(x^2+2x+1)^2=0 \Rightarrow (-x-7)(2x^2+3x-5)=0 \Rightarrow (x+7)(2x^2+3x-5)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2+3x-5=0 \text{ (nes } x+7=(x+1)+6>0) \Rightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{49}}{4}=\dfrac{-3\pm 7}{4} \Rightarrow x=-\dfrac{5}{2} \text{ arba } x=1.$

Skaičius $x=-\dfrac{5}{2}$ netenkina sąlygos $x+1>0$, todėl nėra logaritminės lygties sprendinys.

Ats.: 1.

7. Išspręskite nelygybę $\dfrac{\lg 7-\lg(8-x^2)}{\lg(x+3)}>0.$

Sprendimas. Kadangi $x+3>0$ ir $x+3\neq 1$, tai

$$\frac{\lg 7-\lg(8-x^2)}{\lg(x+3)}=-\frac{\lg\frac{1}{7}(8-x^2)}{\lg(x+3)}=-\log_{x+3}\frac{1}{7}(8-x^2).$$

Vadinasi, nelygybė

$$\frac{\lg 7-\lg(8-x^2)}{\lg(x+3)}>0 \qquad (1)$$

yra ekvivalenti nelygybei

$$\log_{x+3}\frac{1}{7}(8-x^2)<0. \qquad (2)$$

Jei $0<x+3<1$, tai iš (2) gauname nelygybę $\frac{1}{7}(8-x^2)>1$, o jei $x+3>1$, tai gauname nelygybę $0<\frac{1}{7}(8-x^2)<1$.

Toliau:

1) $\begin{cases}0<x+3<1,\\ \frac{1}{7}(8-x^2)>1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3<x<-2,\\ 8-x^2>7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3<x<-2,\\ x^2<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3<x<-2,\\ -1<x<1\end{cases} \Rightarrow \varnothing;$

2) $\begin{cases}x+3>1,\\ 0<\frac{1}{7}(8-x^2)<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>-2,\\ 0<8-x^2<7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>-2,\\ -8<-x^2<-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>-2,\\ 1<x^2<8\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}x>-2,\\ -2\sqrt{2}<x<-1 \text{ arba } 1<x<2\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow x\in(-2;-1)\cup(1;2\sqrt{2}).$

Ats.: $(-2;-1)\cup(1;2\sqrt{2})$.

8. Išspręskite nelygybę $2\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>\dfrac{2}{3}.$

Sprendimas. Kadangi

$$\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\log_8 8=\log_8\left(\sqrt[3]{8}\right)^2=\log_8 4,$$

tai

$$2\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>\frac{2}{3}\Rightarrow 2\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>\log_8 4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\log_8(x-2)>\log_8 4(x-3)\Rightarrow\begin{cases}x>3,\\(x-2)^2>4(x-3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>3,\\x^2-8x+16>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>3,\\(x-4)^2>0\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow x\in(3;\,4)\cup(4;\,+\infty).$

Ats.: $(3;\,4)\cup(4;\,+\infty).$

9. Išspręskite nelygybę $2\log_4(2x^2+3)<\log_2(x^2+6).$

Sprendimas. Kadangi

$$2\log_4(2x^2+3)=2\cdot\frac{\log_2(2x^2+3)}{\log_2 4}=\log_2(2x^2+3),$$

tai

$$2\log_4(2x^2+3)<\log_2(x^2+6)\Rightarrow\log_2(2x^2+3)<\log_2(x^2+6)\Rightarrow 2x^2+3<x^2+6\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2<3\Rightarrow-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}.$$

Taigi nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $(-\sqrt{3};\,\sqrt{3}).$

Ats.: $(-\sqrt{3};\,\sqrt{3}).$

10. Išspręskite nelygybę $\log_x\left(x^2-\frac{3}{16}\right)>4.$

Sprendimas. Kadangi

$$4=4\cdot\log_x x=\log_x(x^4),$$

tai nelygybė $\log_x\left(x^2-\frac{3}{16}\right)>4$ yra ekvivalenti nelygybei $\log_x\left(x^2-\frac{3}{16}\right)>\log_x(x^4).$

Jei $0<x<1,$ tai turi galioti nelygybė $0<x^2-\frac{3}{16}<x^4,$ o jei $x>1,$ tai – nelygybė $x^2-\frac{3}{16}>x^4.$

Nagrinėdami šias dvi galimybes, gausime:

$$1)\ \begin{cases}0<x<1,\\0<x^2-\frac{3}{16}<x^4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<1,\\x^4>x^2-\frac{3}{16},\\x^2-\frac{3}{16}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<1,\\x^4-x^2+\frac{3}{16}>0,\\x^2>\frac{3}{16}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<1,\\x^2<\frac{1}{4}\text{ arba }x^2>\frac{3}{4},\\x^2>\frac{3}{16}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}0<x<1,\\x^2<\frac{1}{4},\\x^2>\frac{3}{16}\end{cases}\text{ arba }\begin{cases}0<x<1,\\x^2>\frac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{4}<x<\frac{1}{2}\text{ arba }\frac{\sqrt{3}}{2}<x<1;$$

2) $\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - \dfrac{3}{16} > x^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x^4 - x^2 + \dfrac{3}{16} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{1}{4} < x^2 < \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$

Vadinasi, nelygybės $\log_x\left(x^2 - \dfrac{3}{16}\right) > 4$ sprendinių aibė yra intervalų $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$ ir $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$ sąjunga.

Ats.: $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
$x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -\sqrt[3]{4}$	13	16	$(-5, 0)$, $(-5, 1)$, $(-2, 0)$, $(-2, 1)$