Atranka į 2024 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

Pirmoji diena, 2024-04-26

1. Nustatykite kokią mažiausią reikšmę gali įgyti reiškinys $x^2+y^2+z^2$, kai realieji skaičiai x, y ir z tenkina sąlygą $xyz+x+y+z = xy+yz+zx+5$.

2. Duotas trikampis ABC, kuriame $AB = 15$, $BC = 14$ ir $AC = 13$. Atkarpos BM ir CN yra jo pusiaukraštinės, o atkarpos BD, CE - jo pusiaukampinės. Apskritimai, apibrėžti apie trikampius ADE ir AMN, kertasi taške P (čia $P \neq A$). Tiesė AP kerta tiesę BC taške Q. Raskite BQ.

3. Teniso turnyre dalyvavo $2n+1$ žaidėjas (čia $n \in \mathbb{N}$). Prieš turnyrą kiekvienas iš jų turėjo tam tikrą reitingą. Visų tenisininkų reitingai buvo skirtingi ir turnyro metu, kai kiekvienas žaidėjas su kiekvienu kitu sužaidė po vieną mačą, tenisininkų reitingai nesikeitė. (Tenise lygiųjų nebūna, taigi kiekvienas mačas baigėsi vieno iš žaidėjų pergale.) Turnyre buvo lygiai k mačų, kuriuose žemesnį reitingą turintis žaidėjas laimėjo prieš aukštesnį reitingą turintį žaidėją, čia $1 \leqslant k \leqslant 2n^2+n$.

   Įrodykite, kad bent vienas turnyre dalyvavęs žaidėjas jo metu laimėjo ne mažiau kaip $n-\sqrt{2k}$ ir ne daugiau kaip $n+\sqrt{2k}$ savo sužaistų mačų.

Antroji diena, 2024-04-27

4. Trijose krūvelėse yra a, b ir c saldainių. Matas ir Nora paeiliui atlieka tokį ėjimą: vieną saldainių krūvelę suvalgo, o kurią nors kitą krūvelę padalija į dvi netuščias krūveles. Žaidėjas pralaimi, kai jis nebegali atlikti ėjimo, t. y. visose trijose krūvelėse liko po vieną saldainį. Kuris žaidėjas turi laiminčią strategiją, kai $(a, b, c) = (200, 400, 2024)$? (Žaidimą pradeda Matas.)

5. Visų pirminių skaičių, dalijančių natūralųjį skaičių $n > 1$, sandaugą pažymėkime $P(n)$. (Pavyzdžiui, $P(12) = P(2^2 \cdot 3) = 2 \cdot 3 = 6$, o $P(7) = 7$.) Natūraliųjų skaičių porą (s, t), kurioje $1 < s < t$, vadinsime *draugiška*, jei $P(s) = P(t)$ ir $P(s+1) = P(t+1)$.
   a) Raskite bent vieną draugišką porą (s, t), kurioje $s \geqslant 10$.
   b) Ar egzistuoja bent viena draugiška pora (s, t), kurioje s - nelyginis?
   c) Įrodykite, kad yra be galo daug draugiškų porų.

6. Tarkime, kad S yra baigtinė nenulinių skaičių aibė, o $f : S \to S$ yra funkcija, su kiekvienu $x \in S$ tenkinanti vieną iš lygybių
$$f(f(x)) = x + f(x) \quad \text{arba} \quad f(f(x)) = \frac{x + f(x)}{2}.$$
Įrodykite, jog tada $f(x) = x$ su kiekvienu $x \in S$.