Atranka į 2024 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas: uždavinių sąlygos ir sprendimai

Artūras Dubickas[1]

Pirmoji diena, 2024-04-26

1. Nustatykite kokią mažiausią reikšmę gali įgyti reiškinys $x^2+y^2+z^2$, kai realieji skaičiai x, y ir z tenkina sąlygą $xyz+x+y+z = xy+yz+zx+5$.

2. Duotas trikampis ABC, kuriame $AB = 15$, $BC = 14$ ir $AC = 13$. Atkarpos BM ir CN yra jo pusiaukraštinės, o atkarpos BD, CE - jo pusiaukampinės. Apskritimai, apibrėžti apie trikampius ADE ir AMN, kertasi taške P (čia $P \neq A$). Tiesė AP kerta tiesę BC taške Q. Raskite BQ.

3. Teniso turnyre dalyvavo $2n+1$ žaidėjas (čia $n \in \mathbb{N}$). Prieš turnyrą kiekvienas iš jų turėjo tam tikrą reitingą. Visų tenisininkų reitingai buvo skirtingi ir turnyro metu, kai kiekvienas žaidėjas su kiekvienu kitu sužaidė po vieną mačą, tenisininkų reitingai nesikeitė. (Tenise lygiųjų nebūna, taigi kiekvienas mačas baigėsi vieno iš žaidėjų pergale.) Turnyre buvo lygiai k mačų, kuriuose žemesnį reitingą turintis žaidėjas laimėjo prieš aukštesnį reitingą turintį žaidėją, čia $1 \leqslant k \leqslant 2n^2+n$.

   Įrodykite, kad bent vienas turnyre dalyvavęs žaidėjas jo metu laimėjo ne mažiau kaip $n-\sqrt{2k}$ ir ne daugiau kaip $n+\sqrt{2k}$ savo sužaistų mačų.

Antroji diena, 2024-04-27

4. Trijose krūvelėse yra a, b ir c saldainių. Matas ir Nora paeiliui atlieka tokį ėjimą: vieną saldainių krūvelę suvalgo, o kurią nors kitą krūvelę padalija į dvi netuščias krūveles. Žaidėjas pralaimi, kai jis nebegali atlikti ėjimo, t. y. visose trijose krūvelėse liko po vieną saldainį. Kuris žaidėjas turi laiminčią strategiją, kai $(a, b, c) = (200, 400, 2024)$? (Žaidimą pradeda Matas.)

[1]Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Matematikos institutas, Naugarduko 24, Vilnius LT-03225. `http://www.mif.vu.lt/~dubickas/`

5. Visų pirminių skaičių, dalijančių natūralųjį skaičių $n > 1$, sandaugą pažymėkime $P(n)$. (Pavyzdžiui, $P(12) = P(2^2 \cdot 3) = 2 \cdot 3 = 6$, o $P(7) = 7$.) Natūraliųjų skaičių porą (s, t), kurioje $1 < s < t$, vadinsime *draugiška*, jei $P(s) = P(t)$ ir $P(s+1) = P(t+1)$.
   a) Raskite bent vieną draugišką porą (s, t), kurioje $s \geqslant 10$.
   b) Ar egzistuoja bent viena draugiška pora (s, t), kurioje s - nelyginis?
   c) Įrodykite, kad yra be galo daug draugiškų porų.

6. Tarkime, kad S yra baigtinė nenulinių skaičių aibė, o $f : S \to S$ yra funkcija, su kiekvienu $x \in S$ tenkinanti vieną iš lygybių
$$f(f(x)) = x + f(x) \quad \text{arba} \quad f(f(x)) = \frac{x + f(x)}{2}.$$
Įrodykite, jog tada $f(x) = x$ su kiekvienu $x \in S$.

Sprendimai

1. Nustatykite kokią mažiausią reikšmę gali įgyti reiškinys $x^2 + y^2 + z^2$, kai realieji skaičiai x, y ir z tenkina sąlygą $xyz + x + y + z = xy + yz + zx + 5$.

Sprendimas. Duotąją sąlygą galima perrašyti taip:
$$(x-1)(y-1)(z-1) = 4.$$
Ją tenkina skaičių trejetas $(x, y, z) = (-1, -1, 2)$. Taigi mažiausia reiškinio $R = x^2 + y^2 + z^2$ reikšmė neviršija $(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2 = 6$.

Įrodysime, kad $R \geqslant 6$. Pažymėkime $a = x - 1$, $b = y - 1$, $c = z - 1$. Neprarasdami bendrumo, galime laikyti, kad $a \leqslant b \leqslant c$. Iš $abc = 4$ išplaukia, kad $a > 0$ arba $b < 0 < c$. Pirmuoju atveju, $c \geqslant \sqrt[3]{abc} > 1$, taigi $z = 1 + c > 2$, o $y = 1 + b \geqslant 1 + a = z > 1$. Vadinasi, $R > 6$. Antruoju atveju, $a \leqslant b < 0 < c$, naudosime lygybę
$$8 = 2abc = (-a)(-b)(2c) = (1-x)(1-y)(2z-2).$$
Pritaikę aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę trims teigiamiems skaičiams $1 - x, 1 - y$ ir $2z - 2$, gauname
$$2 = \sqrt[3]{(1-x)(1-y)(2z-2)} \leqslant \frac{1 - x + 1 - y + 2z - 2}{3} = \frac{2z - x - y}{3},$$

todėl $2z \geqslant 6 + x + y$. Vadinasi,

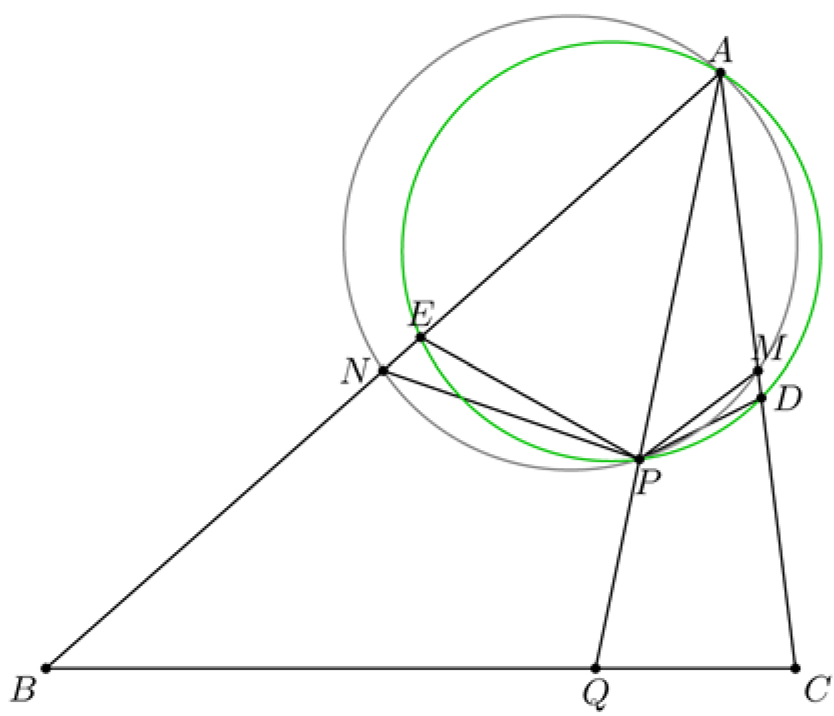
$$4 + z^2 \geqslant 4z \geqslant 12 + 2x + 2y \geqslant 12 - (1 + x^2) - (1 + y^2) = 10 - x^2 - y^2.$$

Iš čia išplaukia, kad $R = x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 6$, o tai ir yra reikiama nelygybė.

Atsakymas: 6.

2. Duotas trikampis ABC, kuriame $AB = 15$, $BC = 14$ ir $AC = 13$. Atkarpos BM ir CN yra jo pusiaukraštinės, o atkarpos BD, CE - jo pusiaukampinės. Apskritimai, apibrėžti apie trikampius ADE ir AMN, kertasi taške P (čia $P \neq A$). Tiesė AP kerta tiesę BC taške Q. Raskite BQ.

Sprendimas. Pagal pusiaukampinės savybę, $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC} = \frac{13}{14} < 1$, todėl



taškas E priklauso atkarpai AN. Analogiškai, taškas D priklauso atkarpai MC. Pagal tą pačią pusiaukampinės savybę, gauname $AE = \frac{65}{9}$ ir $CD = \frac{13 \cdot 14}{29}$. Vadinasi,

$$NE = AN - AE = \frac{15}{2} - \frac{65}{9} = \frac{5}{18}.$$

Analogiškai,

$$MD = CM - CD = \frac{13}{2} - \frac{13 \cdot 14}{29} = \frac{13}{58}.$$

Kadangi taškai A, N, P, M priklauso vienam apskritimui, tai

$$\angle ENP = \angle ANP = 180^\circ - \angle PMA = \angle PMD.$$

Be to, taškai A, E, P, D taip pat priklauso vienam apskritimui, taigi $\angle NEP = 180^\circ - \angle AEP = \angle MDP$. Vadinasi, trikampiai NEP ir MDP yra panašūs, todėl $NE : MD = NP : MP$. Taikydami sinusų teoremą trikampiams AMP ir ANP bei naudodamiesi lygybe $\sin\angle ANP = \sin\angle PMA$, gauname

$$\frac{\sin\angle BAQ}{\sin\angle QAC} = \frac{\sin\angle NAP}{\sin\angle PAM} = \frac{NP}{MP} = \frac{NE}{MD} = \frac{5/18}{13/58} = \frac{145}{117}.$$

Taigi

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{S_{ABQ}}{S_{ACQ}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AQ \cdot \sin\angle BAQ}{\frac{1}{2} \cdot AQ \cdot AC \cdot \sin\angle QAC} = \frac{15}{13} \cdot \frac{145}{117} = \frac{725}{507}.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$14 = BC = BQ + QC = BQ + \frac{507}{725}BQ = \frac{1232}{725}BQ = \frac{14 \cdot 88}{725}BQ,$$

todėl $BQ = \frac{725}{88}$.

Atsakymas: $\frac{725}{88}$.

3. Teniso turnyre dalyvavo $2n + 1$ žaidėjas (čia $n \in \mathbb{N}$). Prieš turnyrą kiekvienas iš jų turėjo tam tikrą reitingą. Visų tenisininkų reitingai buvo skirtingi ir turnyro metu, kai kiekvienas žaidėjas su kiekvienu kitu sužaidė po vieną mačą, tenisininkų reitingai nesikeitė. (Tenise lygiųjų nebūna, taigi kiekvienas mačas baigėsi vieno iš žaidėjų pergale.) Turnyre buvo lygiai k mačų, kuriuose žemesnį reitingą turintis žaidėjas laimėjo prieš aukštesnį reitingą turintį žaidėją, čia $1 \leqslant k \leqslant 2n^2 + n$.

   Įrodykite, kad bent vienas turnyre dalyvavęs žaidėjas jo metu laimėjo ne mažiau kaip $n - \sqrt{2k}$ ir ne daugiau kaip $n + \sqrt{2k}$ savo sužaistų mačų.

   Sprendimas. Kiekvienas tenisininkas sužaidė po $2n$ mačų. Teiginys akivaizdus, kai $k \geqslant \frac{n^2}{2}$, nes tada $n - \sqrt{2k} \leqslant 0$ ir $n + \sqrt{2k} \geqslant 2n$, todėl tinka bet kuris žaidėjas.

Tarkime, kad $1 \leqslant k < \frac{n^2}{2}$ ir kad tokio žaidėjo nėra. Pažymėkime tenisininkus reitingo didėjimo tvarka $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$. Turnyro mačą tarp žaidėjų A_i ir A_j, kur $0 \leqslant i < j \leqslant 2n$, vadinsime *nelogišku*, jei jame A_i laimėjo prieš A_j. Pagal uždavinio sąlygą, iš viso turnyre buvo sužaista k nelogiškų mačų.

Pažymėkime $r = [\sqrt{2k}]$. Tada $1 \leqslant r \leqslant n$. Tegul $i \in \{0, 1, \ldots, r\}$. Nagrinėkime žaidėjo A_{n-i} mačus. Remiantis mūsų prielaida, A_{n-i} laimėjo mažiau kaip $n - r$ arba daugiau kaip $n + r$ savo mačų. Pirmuoju atveju, A_{n-i} pralaimėjo daugiau kaip $r - i$ savo mačų prieš žemesnio reitingo žaidėjus. Antruoju atveju, A_{n-i} laimėjo daugiau kaip $r + i$ savo mačų prieš aukštesnio reitingo žaidėjus. Vadinasi, abiem atvejais, A_{n-i} sužaidė bent $r - i + 1$ nelogiškame mače. Analogiškai įsitikiname, kad žaidėjas A_{n+i}, kur $i = 0, 1, \ldots, r$, taip pat sužaidė bent $r-i+1$ nelogiškame mače. Vadinasi, iš viso žaidėjai $A_{n-r}, \ldots, A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, \ldots, A_{n+r}$ sudalyvavo bent

$$\Big(1 + \cdots + (r-1) + r\Big) + r + 1 + \Big(r + (r-1) + \cdots + 1\Big) =$$

$$= \frac{r(r+1)}{2} + r + 1 + \frac{r(r+1)}{2} = r(r+1) + r + 1 = (r+1)^2$$

nelogiškų mačų. Kadangi kiekviename mače dalyvauja lygiai du tenisininkai, tai iš viso nelogiškų mačų turnyre buvo ne mažiau kaip $\frac{(r+1)^2}{2}$. Vadinasi, $k \geqslant \frac{(r+1)^2}{2}$. Kita vertus, iš nelygybės $\sqrt{2k} < [\sqrt{2k}] + 1 = r + 1$ išplaukia, kad $k < \frac{(r+1)^2}{2}$, prieštara.

4. Trijose krūvelėse yra a, b ir c saldainių. Matas ir Nora paeiliui atlieka tokį ėjimą: vieną saldainių krūvelę suvalgo, o kurią nors kitą krūvelę padalija į dvi netuščias krūveles. Žaidėjas pralaimi, kai jis nebegali atlikti ėjimo, t. y. visose trijose krūvelėse liko po vieną saldainį. Kuris žaidėjas turi laiminčią strategiją, kai $(a, b, c) = (200, 400, 2024)$? (Žaidimą pradeda Matas.)

Sprendimas. Poziciją vadinsime *gera*, jei krūvelėse yra $2^n x$, $2^n y$ ir $2^m z$ saldainių, čia $0 \leqslant n < m$, o x, y, z - nelyginiai skaičiai. Prieš savo ėjimą turėdamas gerą poziciją žaidėjas suvalgo krūvelę $2^n x$, o krūvelę $2^m z$ padalija į dvi netuščias krūveles 2^n ir $2^m z - 2^n = 2^n(2^{m-n} z - 1) = 2^n z'$. Taigi kitas žaidėjas prieš savo ėjimą turi krūveles $2^n x'$, $2^n y'$ ir $2^n z'$ (čia x', y', z' - nelyginiai). Jis suvalgo vieną iš krūvelių, tarkime, $2^n z'$, o kitą, pvz., $2^n y'$ padalija į dvi krūveles $2^s y''$ ir $2^l z''$, čia $s \leqslant l$. Dar viena, trečioji krūvelė, liks $2^n x'$. Kadangi

$$2^s y'' + 2^l z'' = 2^n y',$$

tai $l \neq n$. (Jei $l = n$, tai $2^{l+1} \mid 2^l(y' - z'')$, taigi $s > l$, prieštara.) Vadinasi, $l < n$ arba $l > n$. Jei $l < n$, tai $s = l$, ir pozicija $2^l y''$, $2^l z''$, $2^n x'$ yra gera. Jei $l > n$, tai $s = n$, ir pozicija $2^n y''$, $2^l z''$, $2^n x'$ taip pat yra gera. Vadinasi, pirmasis žaidėjas vėl gali atlikti tokį patį ėjimą ir po bet kokio antrojo žaidėjo ėjimo pozicija vėl taps gera. Taigi, bent kartą gavęs gerą poziciją, žaidėjas visada gali laimėti žaidimą. Kadangi $200 = 2^3 \cdot 25$, $400 = 2^4 \cdot 25$ ir $2024 = 2^3 \cdot 253$, tai prieš pirmąjį Mato ėjimą pozicija buvo gera, todėl jis turi laiminčią strategiją, kurią jau nurodėme.

Atsakymas: Matas.

5. Visų pirminių skaičių, dalijančių natūralųjį skaičių $n > 1$, sandaugą pažymėkime $P(n)$. (Pavyzdžiui, $P(12) = P(2^2 \cdot 3) = 2 \cdot 3 = 6$, o $P(7) = 7$.) Natūraliųjų skaičių porą (s, t), kurioje $1 < s < t$, vadinsime *draugiška*, jei $P(s) = P(t)$ ir $P(s+1) = P(t+1)$.
   a) Raskite bent vieną draugišką porą (s, t), kurioje $s \geqslant 10$.
   b) Ar egzistuoja bent viena draugiška pora (s, t), kurioje s - nelyginis?
   c) Įrodykite, kad yra be galo daug draugiškų porų.

Sprendimas. Aišku, kad jei $t + 1 = (s+1)^2$, tai $P(s+1) = P(t+1)$. Kadangi $t = (s+1)^2 - 1 = s^2 + 2s = (s+2)s$, tai lygybė $P(s) = P(t)$ galioja, kai skaičių $s + 2$ dalija tik skaičių s dalijantys pirminiai skaičiai (nebūtinai visi). Imkime $s = 2^k - 2$, čia $k = 2, 3, 4, \ldots$. Tada $s + 2 = 2^k$, todėl $s+2$ dalija vienintelis pirminis skaičius 2, kuris dalija ir s. Vadinasi, skaičiai $s = 2^k - 2 = 2(2^{k-1} - 1)$ ir $t = (s+2)s = 2^k s = 2^{k+1}(2^{k-1} - 1)$ tenkina lygybę $P(s) = P(t)$. Įrodėme, kad visos poros

$$(s, t) = (2(2^{k-1} - 1), 2^{k+1}(2^{k-1} - 1)), \quad k = 2, 3, 4, \ldots,$$

yra draugiškos, nes $1 < s < t$ ir $P(s) = P(t)$ bei $P(s+1) = P(t+1)$.

Imdami $k = 4$, gauname draugišką porą $(s, t) = (14, 224)$. (Šioje poroje $s = 2 \cdot 7$, $t = 2^5 \cdot 7$ ir $s + 1 = 15 = 3 \cdot 5$, $t + 1 = 225 = 3^2 \cdot 5^2$.)

Galiausiai, pora $(s, t) = (75, 1215) = (3 \cdot 5^2, 3^5 \cdot 5)$ taip pat yra draugiška, nes $s + 1 = 76 = 2^2 \cdot 19$, o $t + 1 = 1216 = 2^6 \cdot 19$.

Atsakymas: a) pavyzdžiui, $(s,t) = (14, 224)$; b) egzistuoja, pavyzdžiui, $(s,t) = (75, 1215)$.

6. Tarkime, kad S yra baigtinė nenulinių skaičių aibė, o $f : S \to S$ yra funkcija, su kiekvienu $x \in S$ tenkinanti vieną iš lygybių
$$f(f(x)) = x + f(x) \quad \text{arba} \quad f(f(x)) = \frac{x + f(x)}{2}.$$
Įrodykite, jog tada $f(x) = x$ su kiekvienu $x \in S$.

Sprendimas. Tarkime, kad egzistuoja toks $x \in S$, su kuriuo $f(x) \neq x$. Nagrinėkime seką $x_0 = x$, $x_1 = f^1(x) = f(x)$, $x_2 = f^2(x) = f(f(x))$, $\ldots$, $x_n = f^n(x) = f(f(\ldots f(x)))$, kur f pasirodo lygiai n kartų. Pagal x apibrėžimą, $x_0 \neq x_1$. Įrodysime, kad nelygybė $x_i \neq x_{i+1}$ galioja su kiekvienu $i \geqslant 0$. Iš tikrųjų, priešingu atveju, egzistuoja toks $k \in \mathbb{N}$, su kuriuo $x_i \neq x_{i+1}$ kai $i = 0, 1, \ldots, k$, tačiau $x_{k+1} = x_{k+2}$. Pagal uždavinio sąlygą, turime $x_{k+2} = x_k + x_{k+1}$ arba $x_{k+2} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$. Pirmuoju atveju, gauname $x_k = 0$, prieštara. Antruoju atveju, $x_{k+1} = x_k$, taip pat prieštara. Vadinasi, bet kurie sekos $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ gretimi nariai yra skirtingi. Kadangi visi šios sekos nariai priklauso baigtinei aibei S, tai atsiras du tokie indeksai $i < j$, kad $x_i = x_j$, o skirtumas $m = j - i$ yra mažiausias. Įrodėme, kad $m \neq 1$. Jei $m = 2$, tai $x_i = x_j = x_{i+2} = x_i + x_{i+1}$ arba $x_i = x_{i+2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, taigi $x_{i+1} = 0$ arba $x_i = x_{i+1}$, vėl prieštara. Vadinasi, $m \geqslant 3$.

Pagal i, j ir $m = j - i$ apibrėžimus, aibės $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m-1}\}$ elementai yra skirtingi. Tarkime, kad didžiausias moduliu šios aibės elementas yra lygus M. Kadangi $x_{k+1} = f(x_k)$ su kiekvienu $k = i, i+1, i+2, \ldots$, tai begalinė seka $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots$ yra visiškai periodinė, o jos mažiausias periodas yra lygus m. Vadinasi, neprarasdami bendrumo ir pakeisdami, jei reikia, i didesniu indeksu, galime laikyti, kad, pavyzdžiui, $x_{i+2} = M$.

Išnagrinėkime atvejį $M > 0$. Tada $M = x_{i+2} \neq \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, nes $x_i < M$ ir $x_{i+1} < M$. Vadinasi,
$$M = x_{i+2} = x_i + x_{i+1} < M + x_{i+1} \implies x_{i+1} > 0.$$
Iš čia matome, kad lygybė $x_{i+3} = x_{i+1} + M$ negalima, nes $x_{i+3} < M$, o $x_{i+1} > 0$. Taigi $x_{i+3} = \frac{x_{i+1} + M}{2} > \frac{M}{2}$. Lygybė $x_{i+4} = M + x_{i+3}$ taip pat negalima, todėl $x_{i+4} = \frac{M + x_{i+3}}{2} > \frac{3M}{4} > \frac{M}{2}$. Tęsdami šį procesą įsitikiname, kad joks sekos narys nebus dviejų prieš jį esančių narių suma, nes

jie abu didesni už $\frac{M}{2}$. Vadinasi, $x_{i+k} = \frac{x_{i+k-1}+x_{i+k-2}}{2}$ su kiekvienu $k \geqslant 3$. Į šią formulę įrašę $k = m+2$, gauname $2x_{i+2+m} = x_{i+1+m} + x_{i+m}$. Tačiau iš sekos periodiškumo išplaukia, kad $x_{i+2+m} = x_{i+2} = M$ ir $x_{i+1+m}, x_{i+m} < M$, taigi ši lygybė negalioja, prieštara.

Belieka išnagrinėti atvejį $M < 0$. Tada $M = x_{i+2} \neq \frac{x_i+x_{i+1}}{2}$, nes $x_i, x_{i+1} > M$, todėl

$$M = x_i + x_{i+1} > M + x_{i+1} \implies x_{i+1} < 0.$$

Lygybė $x_{i+3} = M + x_{i+1}$ negalima, todėl $x_{i+3} = \frac{M+x_{i+1}}{2} < \frac{M}{2}$. Analogiškai, negalioja lygybė $x_{i+4} = M + x_{i+3}$, todėl $x_{i+4} = \frac{M+x_{i+3}}{2} < \frac{3M}{4} < \frac{M}{2}$. Tęsdami šį procesą įsitikiname, kad joks sekos narys nebus dviejų prieš jį esančių narių suma, nes jie abu mažesni už $\frac{M}{2}$, taigi sumoje gautume mažesnį už M skaičių. Vadinasi, $x_{i+k} = \frac{x_{i+k-1}+x_{i+k-2}}{2}$, jei $k \geqslant 3$. Iš sekos $x_i, x_{i+1}, x_{i+2} = M, x_{i+3}, \ldots$ periodiškumo ir skaičiaus M apibrėžimo žinome, kad $x_{i+2+m} = x_{i+2} = M$ bei $x_{i+1+m}, x_{i+m} > M$. Įrašę $k = m+2$, gauname $2M = 2x_{i+2+m} = x_{i+1+m} + x_{i+m} > M + M = 2M$, prieštara.