Remia
UAB ASSECO LIETUVA
LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJA
VU MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Organizuoja
VILNIAUS UNIVERSITETAS

XXXVIII LIETUVOS KOMANDINĖ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROF. JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas
2024-09-21

1. Raskite visus realiųjų skaičių trejetus (x, y, z), tenkinančius

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy - 3z^2 = 25 \end{cases}$$

2. Tegul $n \geq 2$ yra natūralusis skaičius, o $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yra tokie realūs skaičiai ($x_i \neq 0$, kai $i = 1, 2, \ldots, n$), kad $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Įrodykite, kad egzistuoja tokie skirtingi natūralieji skaičiai i ir j ($i, j \leq n$), kad

$$\frac{1}{2} \leq \left| \frac{x_i}{x_j} \right| \leq 2$$

3. Tegul a ir b yra realūs skaičiai. Yra žinoma, kad parabolė $y = ax^2 + b$ kerta kreivę $y = x + \frac{1}{x}$ lygiai trijuose taškuose. Įrodykite, kad $3ab < 1$.

4. Raskites visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ visiems $x, y \in \mathbb{R}$, tenkinančias lygtį

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

5. Tegul $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yra tokie teigiami realūs skaičiai, kad $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Įrodykite nelygybę

$$\frac{a_1^3}{a_1^2 + a_2a_3} + \frac{a_2^3}{a_2^2 + a_3a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}^3}{a_{n-1}^2 + a_na_1} + \frac{a_n^3}{a_n^2 + a_1a_2} \geq \frac{1}{2}$$

6. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių n, kad pusė n yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, trečioji n dalis – natūraliojo skaičiaus kubas, o penktoji n dalis – natūraliojo skaičiaus penktasis laipsnis.

7. Raskite visus tokius natūraliuosius skaičius a ir b, kad

$$(a^2 + b) \mid (a^2b + a) \quad \text{ir} \quad (b^2 - a) \mid (ab^2 + b),$$

($a \mid b$ reiškia, kad egzistuoja toks sveikasis skaičius c, kad $a \cdot c = b$).

8. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, kad

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y \quad \text{visiems } x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

9. Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug tokių natūraliųjų skaičių n, kad $2^n - 8$ dalijasi iš n.

10. (a) Raskite tokią dešimties natūraliųjų skaičių aibę A, kad nė viena šešių skirtingų A elementų suma nesidalytų iš 6.

    (b) Ar įmanoma rasti tokią vienuolikos natūraliųjų skaičių aibę?

11. Skaičiai nuo 1 iki 8 yra išdėstyti po vieną ant kiekvienos iš aštuonių kubo viršūnių taip, kad bet kurių trijų skaičių, esančių ant vienos kubo sienos, suma yra didesnė nei 9. Nustatykite, kokia gali būti mažiausia skaičių suma ant vienos kubo briaunos.

12. Tegul O ir A yra tokios $1 \times 1 \times 1$ kubo viršūnės, kad OA yra kubo sienos įstrižainė. Takas, kurio ilgis n, yra $n+1$-os kubo viršūnės seka, kurioje atstumas tarp kiekvienų dviejų gretimų viršūnių yra 1. Kokių skirtingų 2024 ilgio takų kiekis yra didesnis: a) prasidedančių O ir pasibaigiančių O ar b) prasidedančių O ir pasibaigiančių A?

13. 100 valdovių yra išdėstytos ant 100×100 šachmatų lentos taip, kad jokia valdovė nepultų kitos valdovės. Įrodykite, kad lentą padalijus į keturis nesikertančius 50×50 kvadratus, kiekvienas iš jų turės bent po vieną valdovę. (Valdovė puola visus langelius, kurie yra tame pačiame stulpelyje, toje pačioje eilutėje arba toje pačioje įstrižainėje.)

14. N žmonių ($N \geq 3$), kurių visų ūgiai yra skirtingi, sustojo ratu. Sakome, kad žmogus yra *vidutiniaūgis*, jei jis yra aukštesnis už vieną savo kaimyną ir žemesnis už kitą. Nustatykite visus galimus *vidutiniaūgių* žmonių skaičius.

15. Tegul $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ir tegul $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yra tokie sveikieji skaičiai, kad $0 < a_k \leq k$ visiems $k = 1, 2, \ldots, n$. Įrodykite, kad jei suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ yra lyginė, tai
$$a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n = 0$$
su tam tikru ženklų „+“ ir „−“ pasirinkimu.

16. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis yra 1. Kraštinėje AD pažymėti tokie taškai E ir Z, kad $DE = \frac{1}{3}$ ir $AZ = \frac{1}{4}$. Tiesės BZ ir CE susikerta taške H. Raskite trikampio BCH plotą.

17. Trapecijos $ABCD$, kurioje $AB||CD$, kampai prie pagrindo AB yra smailūs, o įstrižainės yra statmenos ir kertasi taške O. Atkarpa OA kerta apskritimą su skersmeniu BD taške M, o atkarpa OB kerta apskritimą su skersmeniu AC taške N. Įrodykite, kad taškai M, N, C ir D priklauso vienam apskritimui.

18. Duotas smailusis trikampis ABC, kurio $\angle B > \angle C$. Kraštinėse BC ir AC atitinkamai pažymėti tokie taškai D ir E, kad $AD \perp BC$ ir $DE \perp AC$. Atkarpoje DE pažymėtas taškas F. Įrodykite, kad tiesės AF ir BF yra statmenos tada ir tik tada, jei $EF \cdot DC = BD \cdot DE$.

19. Duotas trikampis ABC, kurio $\angle B > \angle C$. T yra apie ABC apibrėžto apskritimo lanko BC, kuriam priklauso taškas A, vidurio taškas, o I yra į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras. Taškas E yra toks, kad $\angle AEI = 90°$ ir $AE \parallel BC$. Tiesė TE antrą kartą kerta apie ABC apibrėžtą apskritimą taške P. Jei $\angle B = \angle IPB$, raskite kampą $\angle A$.

20. Trikampyje ABC aukštinių iš A, B ir C pagrindai yra atitinkamai D, E ir F. Taško F projekcijos į AC ir BC yra atitinkamai P ir Q. Įrodykite, kad tiesė PQ dalija atkarpas DF ir EF pusiau.