XXXVIII Lietuvos komandinė mokinių matematikos olimpiada
prof. Jono Kubiliaus taurei laimėti

Atsakymai ir sprendimai

Parengė Dominykas Marma ir Daumilas Ardickas

1. Pakelkime pirmąją lygybę kvadratu. Gauname $(x+y)^2 = 100$. Iš to, kad kiekvieno realiojo skaičiaus kvadratas neneigiamas, gauname $(x-y)^2 \geq 0$, taigi $x^2+y^2 \geq 2xy$. Todėl $4xy \leq x^2+y^2+2xy = (x+y)^2 = 100$ ir $xy \leq 25$.

   Tačiau iš paskutinės nelygybės ir lygties $xy - 3z^2 = 25$ gauname, kad $-3z^2 \geq 0$. O tai galioja tik kai $-3z^2 = 0$ ir $xy = 25$. Pirmoji lygybė galioja tik kai $z = 0$, o antroji – kai $(x-y)^2 = 0$, t. y. $x = y = 5$.

   Atsakymas: $x = 5$, $y = 5$, $z = 0$.

2. Neprarasdami bendrumo tarkime, kad $|x_1| \geq |x_2| \geq \ldots \geq |x_n|$. Darykime prielaidą, kad jokie i ir j netenkina sąlygoje aprašytos savybės. Tada $\frac{|x_i|}{|x_{i+1}|} > 2$, taigi kiekvienam $i = 2, \ldots, n$,

$$|x_i| < \frac{1}{2}|x_{i-1}| < \frac{1}{2^2}|x_{i-2}| < \ldots < \frac{1}{2^{i-1}}|x_1|.$$

   Todėl

$$|x_1| > |x_1|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) > |x_2|+|x_3|+\cdots+|x_n| \geq |x_1+x_2+\ldots+x_n|$$

   Bet pagal sąlygą $|x_1| = |x_1+x_2+\ldots+x_n|$, taigi gauname prieštarą.

3. Iš užduoties sąlygų darome išvadą, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} y = ax^2+b \\ y = x+\frac{1}{x} \end{cases}$$

   turi tris sprendinius, t. y. kubinė lygtis

$$ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$$

   turi tris realius sprendinius. Pažymėkime šiuos sprendinius kaip x_1, x_2, x_3. Iš Vijeto teoremos gauname:

$$x_1+x_2+x_3 = \frac{1}{a}$$
$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = \frac{b}{a}$$
$$x_1x_2x_3 = \frac{1}{a}$$

   Nelygybė $3ab < 1$ yra ekvivalenti $\frac{1}{a^2} > 3\cdot\frac{b}{a}$, iš ko gauname

$$(x_1+x_2+x_3)^2 > 3\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)$$

Pertvarkius paskutinę lygybę gauname

$$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2 > 0,$$

o ši nelygybė yra teisinga, nes taškai yra tarpusavyje skirtingi.

4. Pirmiausia parodysime, kad funkcija $g(x)=f(x)-f(0)$ yra adityvi. Imkime bet kuriuos $x,y\in\mathbb{R}$. Iš duotosios lygybės gauname, kad

$$\begin{aligned}\frac{g(x)+g(y)}{2} &= \frac{f(x)+f(y)}{2}-f(0)=f\left(\frac{x+y}{3}\right)-f(0)\\ &= \frac{f(x+y)+f(0)}{2}-f(0)=\frac{g(x+y)}{2}\end{aligned}$$

kas reiškia, jog $g(x+y)=g(x)+g(y)$ bet kokiems $x,y\in\mathbb{R}$.

Toliau parodysime, kad funkcija f yra konstantinė. Su $x=y$ gauname, kad visiems $x\in\mathbb{R}$ galioja $g(2x)=2g(x)$. Pagal užduoties sąlygą gauname, kad $g\left(\frac{x+y}{3}\right)=\frac{g(x)+g(y)}{2}$, todėl $g(x)=g\left(\frac{2x+x}{3}\right)=\frac{g(2x)+g(x)}{2}$ bet kokiems $x\in\mathbb{R}$. Taigi, $g(2x)=g(x)$ ir iš to seka, kad $g(x)\equiv 0$. Taigi, $f(x)=f(0)$ visiems $x\in\mathbb{R}$. Įsistačius šią funkciją matome, kad ji tenkina lygtį.

5. Turime, kad

$$\begin{aligned}\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2a_3} &= \frac{a_1^3+a_1a_2a_3-a_1a_2a_3}{a_1^2+a_2a_3}=a_1-a_1a_2a_3\cdot\frac{1}{a_1^2+a_2a_3}\\ &\overset{A-G}{\geqslant} a_1-a_1a_2a_3\cdot\frac{1}{2a_1\sqrt{a_2a_3}}=a_1-\frac{1}{2}\sqrt{a_2a_3}\overset{A-G}{\geqslant} a_1-\frac{a_2+a_3}{4},\end{aligned}$$

kur A–G yra aritmetinio-geometrinio vidurkio nelygybės. Pritaikius šią nelygybę visiems n narių, gauname:

$$\begin{aligned}&\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2a_3}+\frac{a_2^3}{a_2^2+a_3a_4}+\cdots+\frac{a_{n-1}^3}{a_{n-1}^2+a_na_1}+\frac{a_n^3}{a_n^2+a_1a_2}\\ &\geqslant\left(a_1-\frac{a_2+a_3}{4}\right)+\left(a_2-\frac{a_3+a_4}{4}\right)+\cdots+\left(a_{n-1}-\frac{a_n+a_1}{4}\right)+\left(a_n-\frac{a_1+a_2}{4}\right)\\ &=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

6. Tegul $n=2^a3^b5^de$, kur e nėra dalus nei iš 2, nei iš 3, nei iš 5. Pagal sąlygas gauname, kad a yra dalus iš 3 ir 5, o $a-1$ yra dalus iš 2. Mažiausias tai tenkinantis skaičius yra 15. Taigi

$a \geq 15$. Taip pat b yra dalus iš 2 ir 5, o $b-1$ yra dalus iš 3. Todėl $b \geq 10$. O c yra dalus iš 2, 3 bei $c-1$ dalus iš 5. Todėl $c \geq 6$.

Iš to gauname, kad $n \geq 2^{15}3^{10}5^{6}$. Pastebėkime, kad šis skaičius tenkina sąlygą.

Atsakymas: $n = 2^{15}3^{10}5^{6}$.

7. Iš $(a^2+b) \mid (a^2b+a)$ seka, kad

$$\frac{a^2b+a}{a^2+b} = \frac{b\,(a^2+b)+a-b^2}{a^2+b} = b - \frac{b^2-a}{a^2+b}$$

yra sveikas skaičius.

Todėl arba $a^2+b \leqslant b^2-a$, arba $b^2-a=0$, arba $a^2+b \leqslant a-b^2$. Pagal sąlygą antras atvejis neįmanomas, nes dalijama iš b^2-a. Trečiuoju atveju gauname, kad $a < a^2+b \leqslant a-b^2 < a$, kas irgi yra neįmanoma. Taigi, $a^2+b \leqslant b^2-a$.

Panašiai, iš to, kad $(b^2-a) \mid (ab^2+b)$, gauname, jog

$$\frac{ab^2+b}{b^2-a} = \frac{a\,(b^2-a)+a^2+b}{b^2-a} = a + \frac{a^2+b}{b^2-a}$$

yra sveikas skaičius. Iš to išplaukia, kad $b^2-a \leqslant a^2+b$, todėl $b^2-a = a^2+b$. Šią lygybę galima perrašyti kaip $(b+a)(b-a) = a+b$, o padalijus iš $a+b$ gauname $b = a+1$.

Įsistačius patikriname, kad visi $(n, n+1)$, kur n yra natūralusis skaičius tenkina lygtį.

8. Kai $x=0$, lygybė tampa $f(f(y)) = y$, todėl f yra surjektyvi.

Į duotą lygtį įsistačius $x=1$ gauname $f(1+f(y)) = f(1)+y$. Šioje lygybėje panaudojus keitinį $y = f(x)$ gauname $f(1+x) = f(1)+f(x)$.

Pagal indukciją gauname, visiems $n \in \mathbb{N}$ $f(n) = nf(1)+f(0)$. Į $f(1+x) = f(1)+f(x)$ įsistačius $x=0$ gauname, kad $f(0)=0$. Kadangi f yra surjektyvi, tai $f(1)=1$. Todėl $f(n)=n$. Įsistačius šią funkciją matome, kad ji tenkina lygtį.

9. Parodysime, kad visiems teigiamiems sveikiesiems skaičiams $n = 3p$ (kur $p > 3$ yra pirminis skaičius) galioja

$$n \mid 2^n - 8$$

Pagal mažąją Ferma teoremą turime, kad $2^p \equiv 2 \pmod p$. Todėl gauname, kad

$$2^{3p} - 8 = (2^p)^3 - 8 = 2^3 - 8 = 0 \pmod p \tag{1}$$

Kadangi $3p$ yra nelyginis skaičius, turime

$$2^{3p} - 8 \equiv (-1)^{3p} - 2 = -3 \equiv 0 \pmod 3 \tag{2}$$

Kadangi 3 ir p yra tarpusavyje pirminiai, iš (1) ir (2) išvedame, kad

$$2^{3p} - 8 \equiv 0 \pmod{3p}$$

Kadangi yra be galo daug pirminių skaičių didesnių nei 3, tai yra ir be galo daug skaičių, tenkinančių sąlygą.

10. (a) Pastebėkime, kad svarbios tik liekanos dalijant iš 6, tai galima tarti, kad aibėje A leidžiami pasikartojimai. Tada paprasčiausias tokios aibės pavyzdys yra $\{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1\}$. Akivaizdu, kad bet kuri šių skaičių grupė, sudaryta iš šešių elementų, sudaro sumą, ne mažesnę už 1, nes bent vienas vienetas turi būti įtrauktas, ir mažesnę nei 6, nes gali būti įtraukti ne daugiau kaip penki vienentai. Todėl bet kuri aibė iš šešių skaičių tenkins sąlygą.

    Atsakymas: $\{6, 12, 18, 24, 30, 1, 7, 13, 19, 25\}$.

    (b) Įrodysime, kad tokius aibės nėra. Pradžioje įrodysime dvi paprastesnias, lemas:

    Lema 1: Bet kuri sveikųjų skaičių aibė, turinti 3 ar daugiau elementų, turi elementų porą, kurios suma dalijasi iš 2.
    Įrodymas: arba aibė turi bent du nelyginius skaičius, arba joje yra bent du lyginiai skaičiai. Tokių skaičių poros suma yra lyginė.

    Lema 2: Bet kuri sveikųjų skaičių aibė, turinti 5 ar daugiau elementų, turi trejetą, kurio suma dalijasi iš 3.

    Įrodymas: yra trys skirtingos liekanos dalijant iš 3 (0, 1 arba 2). Jei aibė turi tris skaičius, kurių liekanos dalijant iš 3 yra skirtingos ($3a$, $3b + 1$, $3c + 2$), tuomet šių skaičių suma $3(a + b + c) + 3$ dalijasi iš 3. Jei ne, tuomet yra 3 skaičiai su ta pačia liekana dalijant iš 3 ir jų suma taip pat dali iš 3.

    Jei turime vienuolika sveikųjų skaičių, tai pakartotinai taikant Lemą 1, galime rasti penkias nesikertančias skaičių poras, kurių kiekvienos suma yra lyginė. Taikant Lemą 3 šiems penkiems skaičiams, galime iš jų rasti tris poras, kurių suma dalijasi iš 3. Ši suma taip pat bus lyginė, nes ji yra ligi lyginių skaičių sumai. Todėl turime šešis skaičius iš pradinės aibės, kurių suma dalijasi iš 6.

11. Pastebėkime, kad jei dvi viršūnės yra sujungtos briauna, tai jos yra ant dviejų bendrų sienų. Jei ant dviejų briauna sujungtų viršūnių esančių skaičių suma neviršija 4, tai ant keturių viršūnių, kurios yra bendrose sienose, įrašyti skaičiai turi būti ne mažesni už 6. Tačiau tokių skaičių yra tik 3, todėl visos briaunų sumos yra nemažesnės nei 5. Kita vertus, yra įmanoma surašyti skaičius ant briaunų, kad mažiausia suma būtų 5. Tai galima pasiekti viršūtiniame aukšte įrašius (ratu) 1, 7, 6, 4, o apatiniame (ta pačia tvarka) 8, 2, 3, 5.

12. Tegul a_n yra takų nuo O iki O, kurių ilgis lygus n, skaičius, o b_n yra n ilgio takų skaičius nuo O iki A.

    Nagrinėkime taką nuo O iki O. Pažiūrėkime į $(n - 1) -$ąją tako viršūnę. Ji turėtų būti arba O, arba viršūnė, kurią su O jungia kubo sienos įstrižainė. Takų, kurių ilgis yra 2, skaičius nuo O iki O yra 3. Takų, kurių ilgis yra 2, skaičius nuo A iki O yra 2. Taigi turime lygybę:

$$a_n = 2\left(b_{n-2} + b_{n-2} + b_{n-2}\right) + 3a_{n-2}$$

Panašiai galima parodyti, kad

$$b_n = 2\left(a_{n-2} + b_{n-2} + b_{n-2}\right) + 3b_{n-2}$$

Dabar, imdami a_n ir b_n skirtumą, gauname

$$a_n - b_n = a_{n-2} - b_{n-2}$$

Taigi turime, kad $a_{2024} - b_{2024} = a_{2022} - b_{2022} = \cdots = a_0 - b_0 = 1$

13. Kadangi negalime padėti daugiau nei vienos valdovės toje pačioje eilutėje ar stulpelyje, ir turime 100 valdovių ant 100×100 lentos, tai kiekvienoje eilutėje ir stulpelyje turi būti lygiai po vieną valdovę.

    Sakykime priešingai, kad tam tikrame 50×50 kvadrante nėra valdovių.

    Kadangi kiekvienoje eilutėje ir stulpelyje turi būti po vieną valdovę, tai kvadrantuose, gretimuose neturinčiam valdovių, yra po 50 valdovių, taigi likusiam kvadrantui lieka 0 valdovių.

    Kiekvienoje lentos įstrižainėje gali būti tik viena valdovė. Abu kvadrantai, kuriuose yra po 50 valdovių, dalijasi 99 įstrižainėmis lentos plokštumoje viena kryptimi. Iš viso turime 100 valdovių 99 įstrižainėse, taigi bent dvi valdovės turi būti toje pačioje įstrižainėje – prieštara.

14. Pirmiausia stebime, kaip keičiasi žmonių ūgis, einant ratu pagal laikrodžio rodyklę. Kiekvienai kaimynų porai A ir B (kur B yra po A pagal laikrodžio rodyklę) dedame simbolį „<“ tarp jų, jei B yra aukštesnis už A, ir simbolį „>“, jei B yra žemesnis už A. Tokiu būdu gauname N simbolių seką arba C.
    Asmuo yra vidutiniaūgis tada ir tik tada, kai abu simboliai šalia šio asmens yra vienodi. Todėl žmonių, kurie nėra vidutiniai, skaičius yra lygus simbolių pasikeitimų skaičiui sekoje C. Simbolio „<“ pasikeitimų į „>“ skaičius yra lygus simbolio „>“ pasikeitimų į „<“ skaičiui. Taigi žmonių, kurie nėra vidutiniaūgiai, skaičius yra lyginis.
    Taigi darome išvadą, kad vidutiniaūgių žmonių skaičius yra to pačio lyginumo kaip N. Kadangi aukščiausias žmogus rate nėra vidutiniaūgis, tai vidutiniaūgių žmonių skaičius tikrai yra mažesnis nei N.
    Tegul $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$ žymi žmonių ūgius. Sukonstruokime pavyzdį, kad $N - 2k$ žmonių būtų vidutiniaūgiai bet kuriam $k = 1, \ldots \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$. Tai įgyvendinama, kai žmonių ūgių išsidėstymas ratu yra toks:

$$\underbrace{a_1, a_N, a_2, a_{N-1}, \ldots, a_k, a_{N-k+1}}_{2k}, \underbrace{a_{N-k}, \ldots, a_{k+1}}_{N-2k}$$

15. Įrodinėsime indukcijos būdu. Tarkime, kad visiems $m < n$ galioja: bet kuriems $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$, kuriems $0 < a_k \leq k$ visiems $k = 1, 2, \ldots, m$ ir $a_1 + \cdots + a_m$ yra lyginis, egzistuoja $+$ ir $-$ ženklų pasirinkimas reiškinyje $a_1 \pm a_2 \pm \cdots a_m$, kad reiškinio reikšmė yra lygi nuliui.

    Nagrinėkime $A_{n-1} = a_n - a_{n-1}$. Kadangi $a_n \leqslant n$ ir $a_{n-1} \geqslant 1$, tai $A_{n-1} \leqslant n - 1$.

    Jei $A_{n-1} = 0$, tai $a_{n-1} = a_n$. Tada $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2}$ yra lyginis ir galime pasinaudoti indukcine hipoteze $n - 2$ skaičių atvejui.

Jei $A_{n-1} > 0$, tai $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} + A_{n-1}$ yra lyginis ir galime naudotis indukcine prielaida su $m = n - 1$ ir $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-2} + a_{n-1}) = (a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, A_{n-1})$

Jei $A_{n-1} < 0$, tai $-(n-1) \leq A_{n-1} < 0$. Tada $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} - A_{n-1}$ yra lyginis ir galime naudotis indukcine prielaida su $m = n - 1$ ir $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-2} + a_{n-1}) = (a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, -A_{n-1})$

16. Nubrėžkime trikampio BCH aukštinę HT. Tegu ji kerta AD taške K. Pažymėkime $EK = x, KZ = y$ ir $KH = z$. Tada $HT = 1 + z$ ir pažymėjus trikampio BCH plotą E gauname:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + z) \tag{1}$$

Trikampiai CDE ir HKE yra panašūs pagal tris kampus. Todėl

$$\frac{KH}{CD} = \frac{KE}{DE} \Leftrightarrow \frac{z}{1} = \frac{x}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow z = 3x \tag{2}$$

Taip pat ir trikampiai BAZ ir HKZ yra panašūs pagal 3 kampus ir

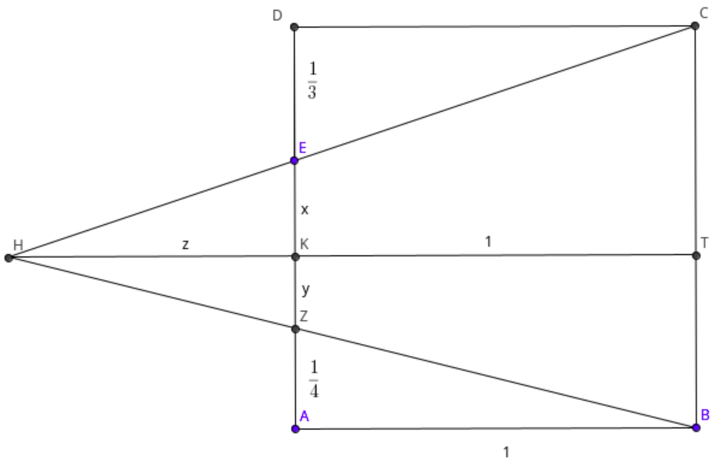
$$\frac{KH}{AB} = \frac{KZ}{AZ} \Leftrightarrow \frac{z}{1} = \frac{y}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow z = 4y \tag{3}$$

Kadangi

$$x + y = AD - AZ - DE = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12} \tag{4}$$

iš (2) (3) ir (4) turime $x + y = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{z}{3} + \frac{z}{4} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow z = \frac{5}{7}$, ir

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{5}{7}\right) = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

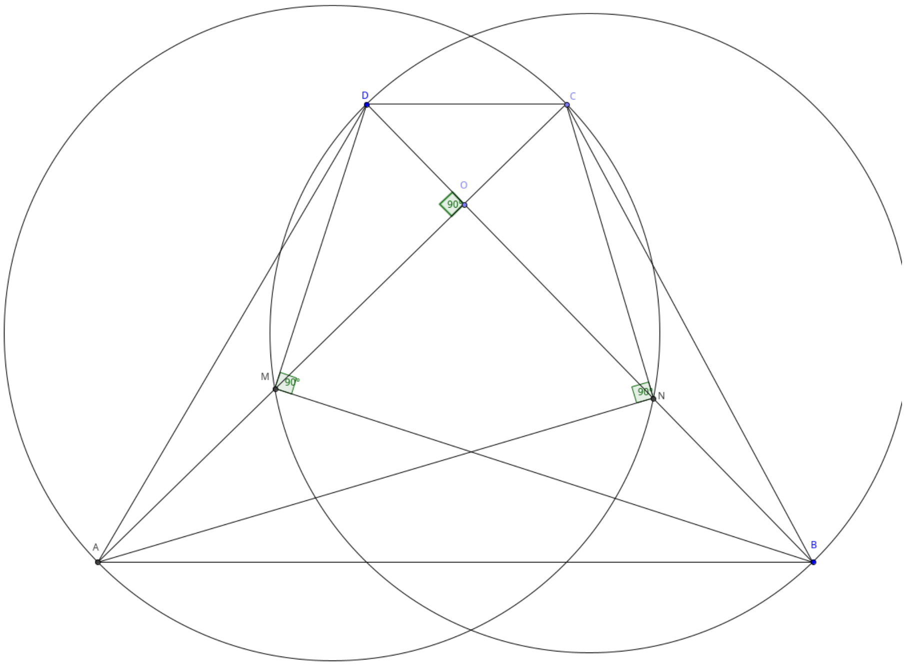


17. Kadangi $ABCD$ yra trapecija, tai trikampiai ABO ir CDO yra panašūs pagal 3 kampus ir galioja $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$.

Iš stačiojo trikampio DBM savybių gauname: $|OM|^2 = |OB| \cdot |OD|$. Analogiškai trikampiui ANC: $|ON|^2 = |OA| \cdot |OC|$. Padaline šias lygybes gauname:

$$\frac{|OM|^2}{|ON|^2} = \frac{|OB| \cdot |OD|}{|OA| \cdot |OC|} = \frac{|OD|^2}{|OC|^2}$$

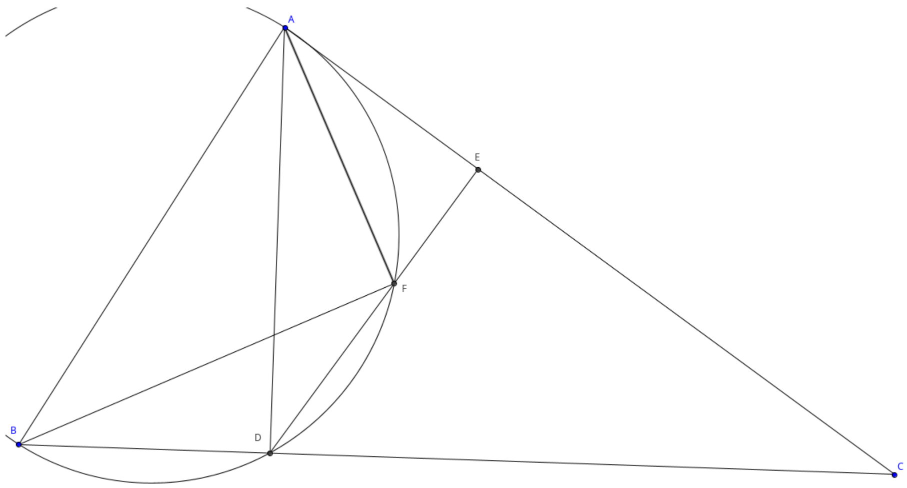
Taigi galioja $|OM| : |ON| = |OD| : |OC|$. Iš to ir $\angle MON = \angle COD = 90°$ seka, kad trikampiai MON ir DOC yra panašūs pagal 2 kraštines ir kampą tarp jų. Todėl $\angle MND = \angle MNO = \angle DCO = \angle DCM$. Taigi taškai C, D, M ir N yra viename apskritime.



18. Jei $AF \perp BF$, tai pastebėkime, kad keturkampis $ABDF$ yra įbrėžtinis, taigi $\angle ABF = \angle ADF$ ir $\angle BAF = \angle DAE$. Todėl, $\angle BAD = \angle FAE$. Iš to seka, kad $\angle BAD = \angle FAE$. Taigi trikampiai ABD ir AFE yra panašūs pagal 3 kampus, todėl $\frac{BD}{FE} = \frac{AD}{AE}$.

Taip pat ir trikampiai ADE ir DCE yra panašūs pagal 3 kampus, taigi $\frac{AD}{AE} = \frac{CD}{DE}$. Paskutinės dvi lygybės duoda $\frac{BD}{FE} = \frac{CD}{DE}$, iš ko gauname, $EF \cdot DC = BD \cdot DE$.

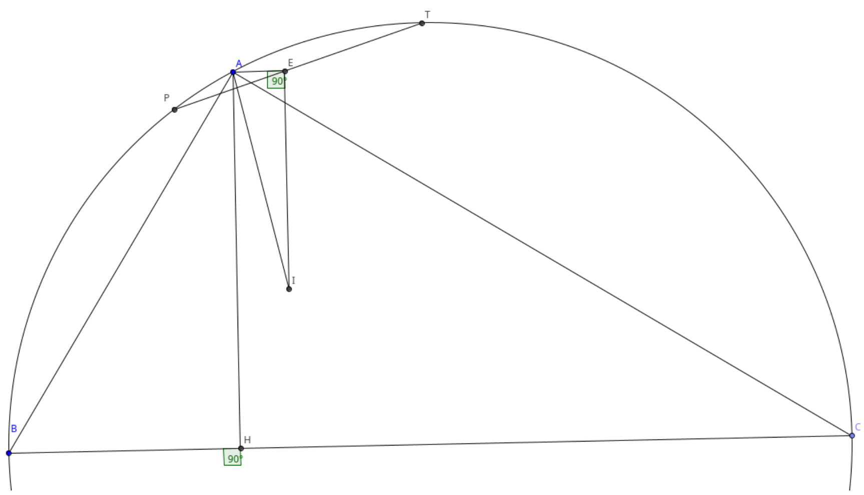
Kitą vertus, jei $EF \cdot DC = BD \cdot DE$, tai pertvarkius gauname $\frac{BD}{FE} = \frac{CD}{DE}$. Taip pat trikampiai ADE ir DCE yra panašūs pagal 3 kampus ir $\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{AE}$. Tada iš $\frac{BD}{PE} = \frac{AD}{AE}$ gauname, kad trikampiai ABD ir AFE yra panašūs ir dėl to $\angle AFE = \angle ABD$. Taigi keturkampis $ABDF$ yra įbrėžtinis. Dėl to $\angle AFB = \angle BDA$ ir $AF \perp BF$.



19. Jei AH yra aukštinė, nubrėžta iš A, tai $IE \| AH$, taigi

$$\angle AIE = \angle IAH = \angle IAB - \angle HAB = \frac{\angle A}{2} - (90^\circ - \angle B) = \frac{\angle B - \angle C}{2}$$

Bet $\angle APE$ yra lygus pusei lanko AT. Todėl $\angle APE = \frac{\angle B - \angle C}{2}$. Taigi $\angle APE = \angle AIE$, kas rodo, kad $APEI$ yra įbrėžtinis keturkampis. Kadangi $\angle AEI = 90^\circ$, turime $\angle API = 90^\circ$. Pagal prielaidą $\angle IPB = \angle B$ gauname, kad $\angle APB = 90^\circ + \angle B$. Tačiau taip pat yra lygus $180^\circ - \angle C = \angle A + \angle B$, kas rodo, jog $\angle A = 90^\circ$.



20. Tegu H yra trikampio ABC aukštinių sankirtos taškas. Pagal lygius kampus gauname, kad H yra trikampio DEF pusiaukampinių sankirtos taškas. Taip pat gauname, kad $CDHE$ ir $CQFP$ yra įbrėžtiniai keturkampiai, nes jų priešingų kampų suma lygi 180°. Pagal kampus besiremiančius į tą pat lanką gauname, kad $\angle ADE = \angle FCP = \angle FQP$.

Kadangi AD ir FQ yra lygiagrečios, taip pat lygiagrečios yra ED ir PQ. Taigi $\angle PQD = \angle EDC = \angle FDQ$ (pirma pora pagal lygiagrečias tieses, antra - pagal pusiaukampinės savybes).

Tegu M ir N yra taškai, kuriuose PQ kerta EF ir DF. Tada $ND = NQ$ (lygiašonio trikampio šoninės kraštinės).

Kadangi $\angle FQD = 90°$, tai N yra trikampio FQD apibrėžtinio apskritimo centras, todėl $FN = ND$. Panašiai, turime $FM = ME$.