

Atranka į Baltijos kelio konkursą

2024-09-22

1. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kad

$$f(x - xy) = xf(y) + (y - 1)^2 f(x)$$

visiems $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Mokykloje yra n mokinių, o mokyklos bibliotekoje n knygų. Kai kurie mokiniai jau yra perskaitę kai kurias knygas (nebūtinai visi tas pačias). Buvo nuspręsta nenulinį skaičių knygų perkelti į lentynas vestibulyje. Įrodykite, kad galima taip pasirinkti nenulinį skaičių knygų, kad vienas iš šių teiginių būtų teisingas:

- (1) Kiekvienas mokyklos mokinys yra perskaitęs po lyginį vestibulyje esančių knygų skaičių.
- (2) Kiekvienas mokyklos mokinys yra perskaitęs po nelyginį vestibulyje esančių knygų skaičių.

3. Kvadrato $ABCD$ kraštinėse AB ir BC atitinkamai taip pažymėti taškai K ir L , kad $BK = CL$. P - atkarpų CK ir AL susikirtimo taškas, o R - DP ir KL susikirtimo taškas. Taškai M ir N yra atitinkamai kraštinių KD ir LD vidurio taškai. Įrodykite, kad $\angle MRN = \angle MDN$.

4. Ratu surašyti k ($k > 1$) natūralieji skaičiai. Yra žinoma, kad egzistuoja toks natūralusis skaičius m , kad $1 < m < k$, $dbd(k, m) = 1$ ir rate paėmus bet kuriuos m iš eilės einančius skaičius, jų suma yra natūralusis skaičiaus m laipsnis.

- (1) Įrodykite, kad rate egzistuoja m vienodų skaičių.
- (2) Papildomai duota, kad $k = mn - 1$, kur $m, n \geq 3$ - nelyginiai natūralieji skaičiai. Įrodykite, kad rate egzistuoja $m + 1$ vienodų skaičių.