Atranka į Baltijos kelio konkursą

Sprendimai
Greta Morkūnė

1. Raskite visas tokias funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad

$$f(x - xy) = xf(y) + (y - 1)^2 f(x)$$

visiems $x, y \in \mathbb{R}$.

Sprendimas. Žymėjimas $P(a, b)$ reiškia, kad įsistatome $x = a, y = b$.
$P(0, 1)$: gauname $f(0) = 0$.
$P(1, 1)$: gauname $f(1) = 0$.
$P(1, y)$: gauname $f(1 - y) = f(y)$ visiems realiesiems y.
$P(x, 1 - y)$: gauname $f(xy) = xf(1 - y) + y^2 f(x)$, vadinasi $f(xy) = xf(y) + y^2 f(x)$.
Bet tada $xf(y) + y^2 f(x) = f(xy) = f(yx) = yf(x) + x^2 f(y)$.
Vadinasi $xf(y) + y^2 f(x) = yf(x) + x^2 f(y)$. Įsistatę $y = 2$ į šią lygtį ir pasižymėję $c = f(2)/2$ gauname $f(x) = cx(x-1)$. Belieka įsistatyti atsakymą į pradinę lygtį, nesunkiai patikriname, kad lygtis teisinga su visais realiaisiais c.

Atsakymas: $f(x) = cx(x - 1)$, kai $c \in \mathbb{R}$.

2. Mokykloje yra n mokinių, o mokyklos bibliotekoje n knygų. Kai kurie mokiniai jau yra perskaitę kai kurias knygas (nebūtinai visi tas pačias). Buvo nuspręsta nenulinį skaičių knygų perkelti į lentynas vestibiulyje. Įrodykite, kad galima taip pasirinkti nenulinį skaičių knygų, kad vienas iš šių teiginių būtų teisingas:
   (1) Kiekvienas mokyklos mokinys yra perskaitęs po lyginį vestibiulyje esančių knygų skaičių.
   (2) Kiekvienas mokyklos mokinys yra perskaitęs po nelyginį vestibiulyje esančių knygų skaičių.

Sprendimas. Kadangi yra n knygų, iš viso yra $2^n - 1$ knygų pasirinkimų būdų. Pavadinkime mokinius $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Kiekvienai netuščiai knygų aibei K, pažymėkime $f(K) = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, kur k_i yra 0, jei m_i yra perskaitęs lyginį knygų skaičių iš K ir 1 - jei nelyginį. Tada yra 2^n galimos $f(K)$ reikšmės. Jei bent viena iš jų yra $(0, 0, \ldots, 0)$ arba $(1, 1, \ldots, 1)$ tada norima sąlyga įrodyta. Kitu atveju egzistuoja tokios dvi skirtingų knygų aibės D, E, kad $f(D) = f(E)$. Įrodysime, kad jei pasirinksime visas knygas, kurios yra D, bet ne E ir visas, kurios yra E, bet ne D (kitaip sakant, visas, kurios yra lygiai viename iš D ir E), tai ši knygų aibė mums tiks.

Paimkime bet kurį mokinį m_i. Tarkime, kad m_i yra perskaitęs d_i knygų iš D, e_i knygų iš E ir c_i knygų iš $D \bigcap E$. Bet tada $k_i = d_i + e_i - 2c_i \mod 2 = 0$, nes $d_i = e_i \mod 2$. Ši knygų aibė tikrai netuščia, nes D ir E nėra vienodos aibės. Įrodyta.

3. Kvadrato $ABCD$ kraštinėse AB ir BC atitinkamai taip pažymėti taškai K ir L, kad $BK = CL$. P - atkarpų CK ir AL susikirtimo taškas, o R - DP ir KL susikirtimo taškas. Taškai M ir N yra atitinkamai kraštinių KD ir LD vidurio taškai. Įrodykite, kad $\angle MRN = \angle MDN$.

Sprendimas. Visų pirma įrodysime, kad taškas P yra trikampio KLD aukštinių susikirtimo taškas. Pažymėkime KC ir LD susikirtimo tašką U, o KD ir AL susikirtimo tašką T. Įrodysime, kad KU ir LT yra trikampio KLD aukštinės. Tą nesunku pastebėti iš kampų:
Pažymėkime $\angle LDC = \alpha$, tada $\angle DLC = 90° - \alpha$ (nes trikampis LCD status). Pastebėkime, kad trikampiai LCD ir BKC lygūs (trys vienodos kraštinės). Vadinasi $\angle BCK = \alpha$, taigi $\angle LUC$ - status, taigi KU - trikampio KLD aukštinė.
Visiškai analogiškai, nagrinėjant trikampių ADK ir ABL lygumą, nesunku suprasti, kad LT - trikampio KLD aukštinė.
Vadinasi, taškas P yra trikampio KLD aukštinių susikirtimo taškas ir tiesė DR - taip pat trikampio KLD aukštinė.
Bet tada keturkampis $AKRD$ - įbrėžtinis, o jo centras yra M, vadinasi, $MD = MR$. Analogiškai, $ND = NR$.
Vadinasi, trikampiai MRN ir MDN yra lygūs (pagal tris kraštines) ir $\angle MRN = \angle MDN$. Įrodyta.

4. Ratu surašyti k ($k > 1$) natūralieji skaičiai. Yra žinoma, kad egzistuoja toks natūralusis skaičius m, kad $1 < m < k$, $dbd(k, m) = 1$ ir rate paėmus bet kuriuos m iš eilės einančius skaičius, jų suma yra natūralusis skaičiaus m laipsnis.
   (1) Įrodykite, kad rate egzistuoja m vienodų skaičių.
   (2) Papildomai duota, kad $k = mn - 1$, kur $m, n \geqslant 3$ - nelyginiai natūralieji skaičiai. Įrodykite, kad rate egzistuoja $m + 1$ vienodų skaičių.

   Sprendimas.

   (1) Visų pirma, jei visi skaičiai dalūs iš m, neprarasdami bendrumo galime visus skaičius padalinti iš m ir sąlyga visvien galios. Taip darykime tol, kol bus bent vienas skaičius rate, kuris nedalus iš m.
   Pavadinkime skaičius rate $a_1, a_2, ...a_k$.
   Žymėsime $s_i = a_i + a_{i+1} + ... + a_{i+m-1}$, kur $a_{k+1} = a_1, a_{k+2} = a_2$ ir t.t.
   Tarkime, mažiausias m laipsnis, gaunamas sudėjus m iš eilės einančių narių, yra m^a.
   Pastebėkime, kad $s_{i+1} - s_i = a_{i+1} + ... + a_{i+m} - (a_i + ... + a_{i+m-1}) = a_{i+m} - a_i$. Kadangi s_i dalijasi iš m^a su visais i, tai šis skirtumas taip pat privalo dalintis iš m^a su visais i, taigi $a_{i+m} - a_i$ dalinasi iš m^a su visais i.
   Kadangi $dbd(k, m) = 1$, tai $1, 1+m, 1+2m, ..., 1+(k-1)m$ turi skirtingas liekanas dalinant iš k, bet $a_1 \equiv a_{1+m} \equiv ... \equiv a_{1+(k-1)m} \mod m^a$, taigi gauname, kad visi ratu surašyti skaičiai turi tą pačią liekaną dalinant iš m^a.
   Neprarasdami bendrumo, tarkime, kad $s_1 = m^a$. Bet tada $a_1 + a_2 + ... + a_m \equiv ma_1 = 0 \mod m^a$. Taigi $a_1 \equiv 0 \mod m^{a-1}$.
   Jei $a > 1$, tada a_1 dalinasi iš m, taigi visi ratu surašyti skaičiai dalinasi iš m, prieštara. Vadinasi, $a = 1$ ir $s_1 = m$, kadangi visi skaičiai natūralieji, tai $a_1 = a_2 = ... = a_m = 1$. Gavome, kad parašyta bent m vienetų.

   (2) Iš pirmos dalies turime, kad yra bent m iš eilės parašytų vienetų. Nutrinkime vieną iš tų vienetų.
   Atkreipkime dėmesį, kad $dbd(k - 1, n) = 1$ (nes $dbd(nm - 2, m) = dbd(2, m) = 1$). Taip pat liekusiems $k - 1$ skaičių galioja ta pati sąlyga: bet kuriuos m iš eilės einančius skaičių suma yra natūralusis skaičiaus m laipsnis. Taigi iš pirmosios dalies turi egzistuoti bent m vienetų. Pridėjus nutrintąjį vienetą, gauname, kad egzistuoja bent $m + 1$ vienodų skaičių. Įrodyta.