XXIV LIETUVOS 5–6 KLASIŲ IR 7–8 KLASIŲ MOKINIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

Atsakymai, sprendimai

Aivaras Novikas

1–5 uždavinių atsakymai:

5–6 klasės

1.	2.	3.	4.	5.
B	D	C	4050	412

7–8 klasės

1.	2.	3.	4.	5.
D	C	E	64	412

Sprendimai

1 (5–6 kl.). Raudonų ir žalių rutulių skaičių dėžėje atitinkamai pažymėkime r ir z.

Įsitikinkime, kad $r + z \leqslant 17$. Galime tarti, kad $r + z \geqslant 12$. Tarp bet kurių 11 rutulių dėžėje yra daugiausiai $11 - 2 = 9$ raudoni, todėl $r \leqslant 9$. Analogiškai $z \leqslant 12 - 4 = 8$. Taigi $r + z \leqslant 9 + 8 = 17$.

Kita vertus, gali būti, kad dėžėje yra $r = 9$ raudoni ir $z = 8$ žali rutuliai. Tada tarp bet kurių 11 rutulių dėžėje yra mažiausiai $11 - r = 2$ žali, o tarp bet kurių 12 rutulių – mažiausiai $12 - z = 4$ raudoni.

Vadinasi, didžiausias galimas rutulių skaičius dėžėje lygus 17.

2 (5–6 kl.). Skaičius a yra tarp skaičių 100 ir 999, todėl skaičius $3a$ yra ne mažesnis už 300, bet mažesnis už 3000. Skaičiaus $3a$ visi skaitmenys lyginiai, todėl jis yra ne mažesnis už 400, bet ne didesnis už 2888. Be to, skaičius $3a$ dalijasi iš 3, todėl jo skaitmenų suma dalijasi iš 3. Vadinasi,

$$402 \leqslant 3a \leqslant 2886, \qquad 134 \leqslant a \leqslant 962.$$

Reikšmės $a = 134$ ir $a = 962$ tenkina uždavinio sąlygą, tad jos ir yra ieškomos mažiausia bei didžiausia a reikšmės. Jų skaitmenų suma lygi $1 + 3 + 4 + 9 + 6 + 2 = 25$.

3 (5–6 kl.). Iš viso sužaista $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ šachmatų partijų. Penkios iš jų baigėsi lygiosiomis, o kitos penkios – vieno iš žaidėjų laimėjimu. Visas savo partijas pralaimėjusį žaidėją pažymėkime A. Jis surinko 0 taškų ir užėmė paskutinę vietą. Žaidėjas A sužaidė 4 partijas, ir nė viena iš jų nesibaigė lygiosiomis. Likusią, penktąją tokią partiją žaidė kiti du žaidėjai. Šios partijos pralaimėtoją pažymėkime B, o laimėtoją – C. Likusius du žaidėjus pažymėkime D ir E. Tada B, C, D, E, žaisdami su A, gavo po tašką, o C dar gavo tašką, žaisdamas su B. Likusios penkios partijos ($B - D$, $B - E$, $C - D$, $C - E$ ir $D - E$) baigėsi lygiosiomis, kiekvienam iš dviejų žaidėjų gavus po pusę taško. Vadinasi, atitinkami žaidėjai iš viso surinko po tiek taškų:

$$x_A = 0, \quad x_B = 1 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2, \quad x_C = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3,$$

$$x_D = x_E = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2{,}5.$$

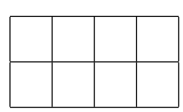
Priešpaskutinę vietą užėmė B, surinkęs $x_B = 2$ taškus.

4 (5–6 kl.). „Laiptelius“ sudaro dvi įstrižos langelių eilės po $2024 : 2 = 1012$ langelių. Skruzdėlės trajektoriją sudaro po dvi kiekvieno langelio kraštines (apatinė ir dešinioji langelio kraštinės, jei jis apatinėje įstrižoje eilėje, bei viršutinė ir kairioji kraštinės – jei viršutinėje) ir dar dvi kraštinės – apatinio langelio kairioji bei viršutinio langelio dešinioji. Gauname

$$1012 \cdot 2 + 1012 \cdot 2 + 2 = 4050$$

kraštinių, kurių bendras ilgis – „laiptelių“ perimetras bei skruzdėlės nueinamas atstumas – yra 4050 cm.

5 (5–6 kl.). Kvadratėlių viršūnės sudaro tris (horizontalias) eiles po 5 taškus:



Kad gautume trikampį, turime pasirinkti tris kvadratėlių viršūnes, nesančias vienoje tiesėje (taigi nesančias vienoje eilėje). Galimi du atvejai: arba dvi reikiamo trikampio viršūnės yra vienoje eilėje, o trečia – bet kurioje iš kitų dviejų, arba trikampio viršūnės yra trijose skirtingose eilėse. Pirmuoju atveju tinka visi viršūnių trejetai. Yra 3 galimybės pasirinkti eilę, kurioje bus dvi trikampio viršūnės; tada yra 10 galimybių pasirinkti dvi viršūnes toje eilėje; jas pasirinkus, yra 10 galimybių pasirinkti likusią trikampio viršūnę kitose dviejose eilėse. Gauname $3 \cdot 10 \cdot 10 = 300$ trikampių. Antruoju atveju yra $5^3 = 125$ viršūnių trejetai, tačiau kai kuriuos reikia atmesti: yra 5 viršūnių trejetai, esantys vertikaliose atkarpose, ir dar 8 viršūnių trejetai, kai trys viršūnės yra vienoje tiesėje (juos paveikslėlyje galima perrinkti tiesiogiai). Gauname dar $125-5-8 = 112$ trikampių. Vadinasi, iš viso yra $300 + 112 = 412$ tinkamų trikampių.

6 (5–6 kl.). Ats. 20.

Arnas nepasisveikino su ketvirtadaliu visų klasės mokinių. Todėl klasės mokinių skaičius dalijasi iš 4. Pažymėkime jį $4n$. Kadangi $4n < 30$, tai $n = 1, 2, \ldots, 7$. Arnas nepasisveikino su n mokinių ir, žinoma, su savimi, todėl jis pasisveikino su $4n - n - 1 = 3n - 1$ mokinių. Jurga pasisveikino su septintadaliu šių mokinių, todėl $3n - 1$ dalijasi iš 7. Tinka tik $n = 5$. Vadinasi, klasėje yra 20 mokinių.

7 (5–6 kl.) Ats. 37, 148, 333, 1332.

Išreikškime x per b^2:

$$ab \cdot bc = ab^2c = 24 \cdot 55{,}5 = 12 \cdot 111 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 37,$$

$$x = ac = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 37}{b^2}.$$

Jei skaičius x natūralusis, tai skaičius b^2 yra skaičiaus $2^2 \cdot 3^2 \cdot 37$ daliklis ir tuo pat metu – natūraliojo skaičiaus kvadratas. Tinka tik $b = 6$, 3, 2 arba 1. Atitinkamai $x = 37$, $2^2 \cdot 37 = 148$, $3^2 \cdot 37 = 333$ ir $2^2 \cdot 3^2 \cdot 37 = 1332$. Kiekvienu iš keturių atvejų egzistuoja ir tinkamos reikšmės $a = 24 : b$ bei $c = 55{,}5 : b$, kurioms $ab = 24$, $bc = 55{,}5$ ir $ac = \frac{24 \cdot 55{,}5}{b \cdot b} = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 37}{b^2} = x$.

1 (7–8 kl.). Žr. 5–6 kl. 2 uždavinį.

2 (7–8 kl.). Žr. 5–6 kl. 3 uždavinį.

3 (7–8 kl.). Figūrą sudarančiose lentos įstrižainėse yra po n langelių, taigi jos plotas lygus $2n$. Figūros kraštą sudaro kai kurios langelių kraštinės: po dvi kiekvieno langelio kraštines (apatinė ir dešinioji langelio kraštinės, jei

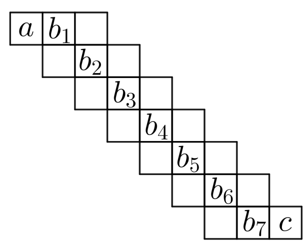
jis apatinėje įstrižainėje, bei viršutinė ir kairioji kraštinės – jei viršutinėje) ir dar dvi kraštinės (apatinio langelio kairioji bei viršutinio langelio dešinioji). Iš viso gauname

$$2n + 2n + 2 = 4n + 2$$

kraštines, tad toks ir yra figūros perimetras.

Kadangi $4n + 2 = \ldots 0$, tai $4n = \ldots 8$, o figūros plotas $2n = \ldots 8 : 2$ baigiasi skaitmeniu 4 arba 9 (pastarąjį skaitmenį taip pat galime atmesti, nes skaičius $2n$ lyginis). Tarp duotųjų penkių atsakymų tėra vienas tinkamas skaičius 7654 (baigiasi skaitmeniu 4). Jis išties galimas, kai $n = 3827$: tada figūros perimetras lygus $4n + 2 = 15310$.

4 (7–8 kl.). Pažymėkime įrašytuosius skaičius, kaip parodyta paveikslėlyje.



Čia skaičius a mažesnis ne tik už skaičių b_1, bet (toliau einant langeliais dešinėn ir žemyn) ir už bet kurį iš likusių įrašytųjų skaičių, todėl $a = 1$. Analogiškai $b_1 = 2$, $c = 21$ ir $b_7 = 20$. Skaičius b_2 didesnis už keturis skaičius, esančius aukščiau ir kairiau nei jis, bet mažesnis už likusius 16 skaičių, todėl $b_2 = 5$. Analogiškai $b_3 = 8$, $b_4 = 11$, $b_5 = 14$, $b_6 = 17$.

Liko išsiaiškinti, kokie skaičiai gali būti langeliuose, kurių nepažymėjome raidėmis. Dviejuose langeliuose tarp $b_1 = 2$ ir $b_2 = 5$ turi būti skaičiai 3 ir 4. Jie gali būti įrašyti bet kokia tvarka. Tarp skaičių b_2 ir b_3 bet kokia tvarka reikia įrašyti skaičius 6 ir 7. Analogišką išvadą gauname skaičių poroms (9, 10), (12, 13), (15, 16), (18, 19). Kiekviena iš 6 skaičių porų gali būti įrašyta dviem būdais, todėl gauname $2^6 = 64$ tinkamus langelių užpildymus.

5 (7–8 kl.). Žr. 5–6 kl. 5 uždavinį.

6 (7–8 kl.). Ats. 150, 156, 426.

Stačiakampio horizontalių ir vertikalių kraštinių ilgius atitinkamai pažymėkime a ir b. Tada stačiakampio viduje horizontalių ir vertikalių atkarpų atitinkamai yra po $b-1$ ir $a-1$, o jų ilgiai atitinkamai lygūs a ir b. Taigi

$$(b-1)a+145=2(a-1)b,$$

$$ab-a+145=2ab-2b,$$

$$145=ab+a-2b=a(b+1)-2b,$$

$$143=145-2=a(b+1)-2(b+1)=(a-2)(b+1).$$

Skaičius $143=11\cdot 13$ turi keturis teigiamus daliklius 1, 11, 13, 143. Skaičius $b+1$ lygus vienam iš jų. Be to, $b>0$, todėl $b+1\neq 1$. Vadinasi, $b+1=11$, 13 arba 143. Atitinkamai $a-2=13$, 11 arba 1. Stačiakampio plotas $a\cdot b$ atitinkamai lygus $15\cdot 10=150$, $13\cdot 12=156$ arba $3\cdot 142=426$. Tokie trys stačiakampiai tenkina uždavinio sąlygą.

7 (7–8 kl.). Ats. Taip, kiekvienas.

Skaičius a lygus 24 savo daliklių sumai. Jei skaičius a būtų nelyginis, tai ir visi jo dalikliai būtų nelyginiai, o 24 nelyginių skaičių suma a būtų lyginis skaičius. Gavome prieštarą, todėl skaičius a lyginis. Jis lygus 25 savo daliklių sumai. Jei visi šie dalikliai būtų nelyginiai, tai ir jų suma a būtų nelyginis skaičius. Taigi bent vienas iš 25 daliklių sumoje yra lyginis. Vieną tokį daliklį pažymėkime $2b$. Tada ir skaičius b yra skaičiaus a daliklis, o 25 daliklių sumoje vietoj $2b$ parašę $b+b$, gausime skaičiaus a užrašymą 26 teigiamų daliklių suma. Vadinasi, kiekvienas toks skaičius a lygus ne tik 24 ir 25, bet ir 26 savo daliklių sumai.