VI. KOORDINAČIŲ METODAS PLOKŠTUMOJE

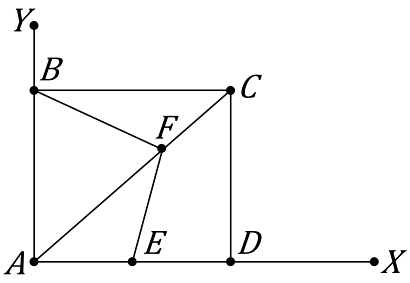
(2023-2025)

Teorinę medžiagą parengė ir šeštąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

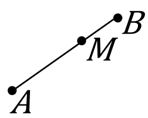
Geometrinių uždavinių sprendimą dažnai palengvina tinkamas koordinatinių (arba analizinių) metodų taikymas. Sprendžiant uždavinius šiuo metodu, svarbu tinkamai parinkti koordinačių sistemą, nes nuo jos parinkimo priklauso uždavinio sprendimo racionalumas. Pastebėkime, kad koordinačių metodu iš esmės galima išspręsti bet kurį geometrijos uždavinį. Nors dažnai koordinatinis metodas susijęs su daug skaičiavimų, bet, kai sunku surasti grynai geometrinį sprendimo metodą, koordinačių taikymas dažnai būna vienintelis uždavinio sprendimo būdas. Pateiksime pavyzdžių.

1 pavyzdys. Taškas E yra kvadrato $ABCD$ kraštinės AD vidurys, taškas F yra su tašku A nesutampantis įstrižainės AC taškas, toks, kad tiesės EF ir FB yra statmenos. Rasime santykį $AF : FC$.

Sprendimas. Stačiakampės Dekarto koordinačių sistemos pradžios tašką parenkame taške A, tiesės AD ir AB yra atitinkamai Ox ir Oy ašys (1 pav.). Kadangi uždavinio sąlygoje nėra duoti jokių atkarpų ilgiai, tai pasirinkime kvadrato kraštinės ilgį lygų vienetui, tuomet kvadrato viršūnių koordinatės yra $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$, $D(1,0)$. Kadangi taškas E yra atkarpos AD vidurys, tai $E\left(\frac{1}{2},0\right)$. Tiesės AC lygtis $y=x$, todėl taško F koordinatės $F(m,m)$, čia $m \in (0,\sqrt{2}\ )$. Rasime vektorių $\overrightarrow{EF}$ ir $\overrightarrow{FB}$ koordinates, iš vektoriaus galo koordinačių atimdami jo pradžios koordinates: $\overrightarrow{EF}=\left(m-\frac{1}{2},\ m\right), \overrightarrow{FB}\ =(-m,\ 1-m)$. Pagal sąlygą vektoriai $\overrightarrow{EF}$ ir $\overrightarrow{FB}$ yra statmenieji, todėl jų skaliarinė sandauga lygi nuliui: $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FB}=\left(m-\frac{1}{2}\right)(-m)+m(1-m)=0$. Iš čia $m(1-m-m+\frac{1}{2})=0$. Kadangi taškai A ir ir F yra skirtingi, tai $m\neq 0$, taigi $\frac{3}{2}-2m=0$, $m=\frac{3}{4}$. Iš čia seka, kad $F(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$, todėl $AF=\frac{3}{4}AC$, taigi $AF : FC = 3 : 1$.



1 pav.

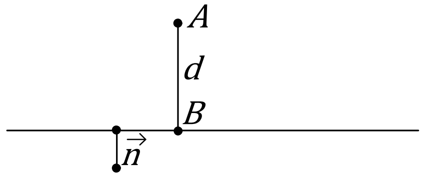


2 pav.

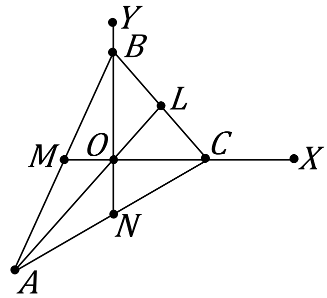
Sakykime, kad $A(x_1,y_1)$ ir $B(x_2,y_2)$ yra du skirtingi plokštumos taškai. Taškas $M(x,y)$ yra tiesėje AB tada ir tik tada, kai vektoriai $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{AB}$ yra kolinearieji (2 pav.), o tai reiškia, kad jų koordinatės yra proporcingos. Kadangi $\overrightarrow{AM}=(x-x_1,\ y-y_1)$, $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$, tai šių vektorių kolinearumo sąlyga $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Taigi tiesės AB taško M koordinatėms yra teisinga ši lygybė. Atvirkščiai, jei taško M koordinatėms (x,y) teisinga ši lygybė, tai vektoriai $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{AB}$ yra kolinearieji, taigi taškas M yra tiesėje AB. Taigi gautoji lygtis yra per du taškus einančios tiesės lygtis. Pertvarkome ją $x(y_2-y_1)-y(x_2-x_1)-x_1(y_2-y_1)+y_1(x_2-x_1)=0$ ir pažymime $A=y_2-y_1$, $B=x_1-x_2$, $C=-Ax_1-By_1$, tuomet gauname tokią tiesės lygtį: $Ax+By+C=0$.

Nagrinėkime vektorių $\vec{N}$, kurio koordinatės (A, B). Kadangi yra teisinga lygybė $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = (y_2 - y_1)(x_2 - x_1) + (x_1 - x_2)(y_2 - y_1) = 0$, tai vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\vec{N}$ yra statmenieji, taigi tiesės lygtyje koefivientai A ir B yra tiesei statmenojo vektoriaus koordinatės. Todėl dvi tiesės $a: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ir $b: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ yra statmenos, kai joms statmenųjų vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, o tiesės a ir b yra lygiagrečios, kai jų statmenieji vektoriai yra kolinearieji: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Iš čia išplaukia, kad tiesės b, einančios per tašką $A(x_0, y_0)$ statmenai tiesei $a: Ax + By + C = 0$, lygtis yra $b: -B(x - x_0) + A(y - y_0) = 0$, o tiesės c, einančios per tašką A ir lygiagrečios su tiese a, lygtis yra $c: A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Sakykime, kad taškas $A(x_0, y_0)$ nėra tiesėje $a: Ax + By + C = 0$, statmuo iš taško A tiesei a kerta tiesę a taške B (3 pav.). Atkarpos AB ilgis yra lygus atstumui d nuo taško A iki tiesės a. Jei $B(x_1, y_1)$ – taško B koordinatės, tai $\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0)$. Nagrinėkime vienetinį vektorių (vektorių, kurio ilgis lygus vienetui) $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$, kuris statmenas tiesei a. Šis vektorius su vektoriumi $\overrightarrow{AB}$ sudaro kampą, lygų arba 0^0, arba 180^0, taigi jo kosinusas lygus ± 1. Tuomet skaliarinė sandauga $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}| \cdot (\pm 1) = \pm d$, taigi $|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}| = d$. Kita vertus $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = (x_1 - x_0) \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} + (y_1 - y_0) \cdot \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{-Ax_0 - By_0 + (Ax_1 + By_1)}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{(-Ax_0 - By_0 - C)}{\sqrt{A^2+B^2}}$, paskutinė lygybė seka iš to, kad taškas B yra tiesėje a, todėl jo koordinatės tenkina tiesės a lygtį. Iš gautųjų lygybių išplaukia atstumo nuo taško A iki tiesės a formulė $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.



3 pav.



4 pav.

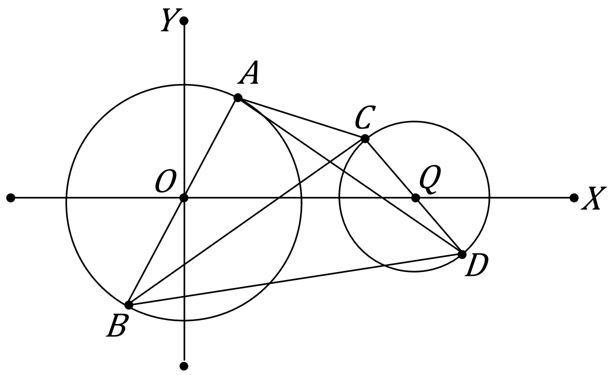
2 pavyzdys. Trikampio ABC pusiaukraštinės BN ir CM yra statmenos, jų ilgiai $BN = 8, CM = 12$. Rasime trikampio ABC plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad trikampio pusiaukraštinės susikerta taške O. Parenkame koordinačių sistemą taip, kad taškas O yra jos pradžia, Ox ir ir Oy ašys yra atitinkamai tiesėse ir CM ir BN (4 pav.). Kadangi pagal pusiaukraštinių savybę $CO : OM = BO : ON = 2 : 1$, tai $CO = 8$, $OM = 4$, $BO = \frac{16}{3}$, $ON = \frac{8}{3}$. Tuomet trikampio viršūnių koordinatės $B\left(0, \frac{16}{3}\right)$, $C(8, 0)$. Kraštinės BC vidurio taško L koordinatės yra lygios taškų B ir C koordinačių sumos pusei: $x_L = \frac{1}{2}(x_B + x_C)$, $y_L = \frac{1}{2}(y_B + y_C)$, taigi $L\left(4, \frac{8}{3}\right)$. Kadangi $LO : OA = 1 : 2$, tai $\overrightarrow{LA} = 3\overrightarrow{LO}$. Jei taško A koordinatės $A(x, y)$, tai iš šios lygybės gauname, kad $\left(x - 4,\ y - \frac{8}{3}\right) = 3\left(0 - 4,\ 0 - \frac{8}{3}\right)$, taigi $x - 4 = -12, y - \frac{8}{3} = -8$. Iš čia gauname viršūnės A koordinates $A\left(-8, -\frac{16}{3}\right)$. Tiesės BC lygtis $\frac{x-0}{8-0} = \frac{y - \frac{16}{3}}{0 - \frac{16}{3}}$, taigi $BC: 2x + 3y - 16 = 0$, o kraštinės BC ilgis $BC = \sqrt{(8-0)^2 + (0 - \frac{16}{3})^2} = \frac{8}{3}\sqrt{13}$. Trikampio ABC aukštinės iš viršūnės A ilgis h lygus taško A atstumui iki tiesės BC. Pagal gautąją atstumo nuo taško iki tiesės formulę randame, kad $h=\frac{\left|2\cdot(-8)+3\cdot\left(-\frac{16}{3}\right)-16\right|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{48}{\sqrt{13}}$. Todėl trikampio plotas $S=\frac{1}{2}BC\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\sqrt{13}\cdot\frac{48}{\sqrt{13}}=64$.

Sakykime, kad plokštumoje duotas apskritimas, kurio centras $O(x_0,y_0)$, o spindulio ilgis lygus R. Taškas $M(x,y)$ yra šio apskritimo taškas, tada ir tik tada, kai jo atstumas iki taško O lygus spindulio ilgiui R: $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R$. Šią lygybę perrašome taip $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ – tai yra apskritimo lygtis.

3 pavyzdys. Plokštumoje duoti du apskritimai. Įrodysime, kad atstumų kvadratų nuo vieno apskritimo skersmens galų iki kito apskritimo skersmens galų suma vienoda visiems tų apskritimų skersmenims.

Sprendimas. Sakykime, kad vieno apskritimo centras yra taškas O, jo spindulio ilgis lygus R, kito apskritimo centras yra taškas Q, spindulio ilgis r, o atstumas tarp jų centrų lygus $OQ=m$. Parenkame koordinačių sistemą taip, kad jos pradžios taškas būtų taškas O, o taškas Q būtų Ox ašyje (5 pav.). Tuomet $O(0,0)$, $Q(m,0)$, pirmojo apskritimo lygtis $x^2+y^2=R^2$, antrojo $(x-m)^2+y^2=r^2$. Jei taškas $A(a,b)$ yra pirmojo apskritimo taškas, tai kitas skersmens galas $B(-a,-b)$. Jei CD yra kuris nors kito apskritimo skersmuo, o $C(c,d), D(x,y)$, tai iš to, kad taškas Q yra atkarpos CD vidurys, turime lygybes $m=\frac{c+x}{2}$, $0=\frac{d+y}{2}$, iš kurių randame $x=2m-c$, $y=-d$, taigi $D(2m-c,-d)$. Ieškomoji kvadratų suma $AC^2+AD^2+BC^2+BD^2=(a-c)^2+(b-d)^2+(a-2m+c)^2+(b+d)^2+(-a-c)^2+(-b-d)^2+(-a-2m+c)^2+(-b+d)^2=4a^2+4b^2+4c^2+4d^2+8m^2-8mc$. Kadangi taškas A yra pirmame apskkritime, tai $a^2+b^2=R^2$, o kadangi taškas C yra kitame apskritime, tai $(c-m)^2+d^2=r^2$, taigi $c^2+d^2=r^2-m^2+2cm$. Pasinaudoję šiomis lygybėmis gauname, kad $AC^2+AD^2+BC^2+BD^2=4(R^2+r^2-m^2)$, o tai ir reiškia, kad ieškomoji kvadratų suma nepriklauso nuo skersmenų AB ir CD parinkimo.

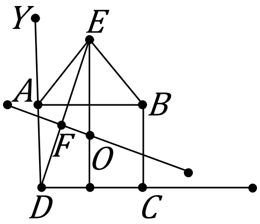


5 pav.

4 pavyzdys. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 1, trikampis AEB yra lygiakraštis, taškas E yra kvadrato išorėje. Rasime apie trikampį DEC apibrėžto apskritimo spindulį.

Sprendimas. Stačiakampės koordinačių sistemos pradžios tašką parinkime taške D ir sakykime, kad kvadrato viršūnės C ir A yra atitinkamai Ox ir Oy ašyse (6 pav.). Tuomet $D(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$. Kadangi lygiakraščio trikampio, kurio kraštinės ilgis lygus 1, aukštinės ilgis lygus $\frac{\sqrt{3}}{2}$, tai taško E koordinatės $E\left(\frac{1}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Apie trikampį apibrėžto apskritimo centras yra trikampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas, todėl reikia parašyti kraštinių DC ir DE vidurio statmenų lygtis. Akivaizdu, kad kraštinės CD vidurio statmens lygtis $x=\frac{1}{2}$. Parašome kraštinės ED lygtį: $\frac{x-0}{\frac{1}{2}-0}=\frac{y-0}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$, taigi ED: $\left(2+\sqrt{3}\right)x-y=0$. Atkarpos ED vidurio taškas $F(\frac{1}{4},\frac{1}{2}+$

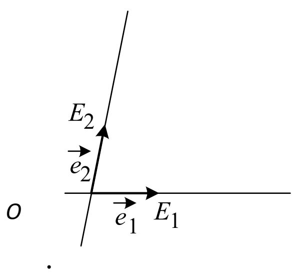
$\frac{\sqrt{3}}{4}$), todėl atkarpos ED vidurio statmens lygtis $1\left(x-\frac{1}{4}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)\left(y-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=0$, t. y. $x+\left(2+\sqrt{3}\right)y-2-\sqrt{3}=0$. Iš sistemos $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ x+\left(2+\sqrt{3}\right)y-2-\sqrt{3}=0 \end{cases}$ randame apie trikampį apibrėžto apskritimo centro koordinates $O\left(\frac{1}{2}, \frac{3+2\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})}\right)$. Tuomet ieškomasis spindulys lygus atkarpos OD ilgiui: $OD^2=(\frac{1}{2}-0)^2+(\frac{3+2\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})}-0)^2=\frac{1}{4}+\frac{21+12\sqrt{3}}{4(7+4\sqrt{3})}=\frac{1}{4}+\frac{3(7+4\sqrt{3})}{4(7+4\sqrt{3})}=1$. Taigi ieškomojo apskritimo spindulys lygus 1.



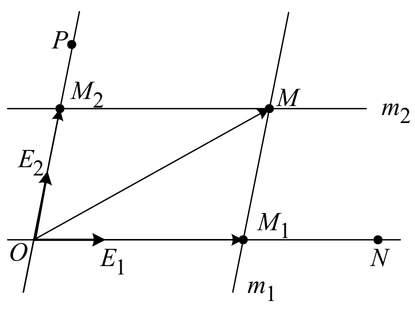
6 pav.

Iki šiol nagrinėjome taip vadinamas stačiakampes Dekarto koordinačių sistemas, taip pavadintas žymaus prancūzų matematiko ir filosofo Rene Dekarto (Rene Descartes, 1596 – 1650) garbei. Bet plokštumos koordinačių sistemos gali būti apibrėžiamos įvairiais būdais. Nustatyti plokštumos koordinačių sistemą – tai nurodyti tokią taisyklę, kuria bet kuriam plokštumos taškui M vienareikšmiškai priskiriama realiųjų skaičių pora (x,y) – taško M koordinatės. Panagrinėsime vieną iš tokių plokštumos koordinačių sistemų – afiniąją koordinačių sistemą, kurios atskiras atvejis yra stačiakampė Dekarto koordinačių sistema.

Plokštumos *afiniąja koordinačių sistema* arba *afiniuoju reperiu* vadiname plokštumos taškų, nepriklausančių vienai tiesei, trejetą (O,E_1,E_2). Taškas O vadinamas *koordinačių sistemos pradžios tašku*, tiesės OE_1 ir OE_2 vadinamos *koordinačių ašimis* (atitinkamai *abscisių* ir *ordinačių* ašimis) (7 pav.) Vektoriai $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{OE_1}$ ir $\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{OE_2}$ vadinami šios koordinačių sistemos *baziniais (arba vienetiniais) vektoriais*. Išsiaiškinsime, kaip šioje koordinačių sistemoje nustatomos plokštumos taško M koordinatės. Nubrėžiame vektorių $\overrightarrow{OM}$, iš taško M brėžiame tieses m_1 ir m_2, lygiagrečias atitinkamai su koordinačių ašimis OE_2 ir OE_1 (8 pav.). Sakykime, kad tiesės OE_1 ir m_1 kertasi taškeM_1, o tiesės OE_2 ir m_2 – taške M_2. Kadangi taškai $O, E_1,$ ir M_1 yra vienoje tiesėje, tai vektoriai $\overrightarrow{OE_1}$ ir $\overrightarrow{OM_1}$ yra kolinearieji, todėl egzistuoja skaičius x, kad $\overrightarrow{OM_1}=x\overrightarrow{e_1}$. Analogiškai vektoriai $\overrightarrow{OE_2}$ ir $\overrightarrow{OM_2}$ yra kolinearieji, todėl egzistuoja skaičius y, kad $\overrightarrow{OM_2}=y\overrightarrow{e_2}$. Pagal vektorių sudėties lygiagretainio taisyklę $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$, taigi $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$. Skaičiai (x,y) yra taško M



7 pav.



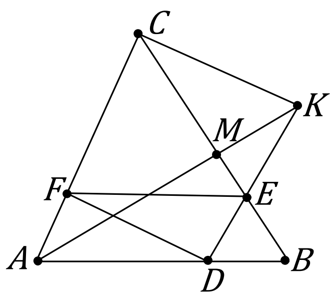
8 pav.

koordinatės koordinačių sistemoje (O, E_1, E_2), žymima $M(x, y)$. Akivaizdu, kad $O(0, 0)$, $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$. Jei taškas N yra abscisių ašyje, tai $N(x, 0)$, o jei taškas P yra ordinačių ašyje, tai $P(0, y)$, abscisių ašies OE_1 lygtis yra $y = 0$, o ordinačių ašies OE_2 lygtis $x = 0$.

Pastebėkime, kad tiesės per du taškus lygtis ir afiniosiose koordinatėse užrašoma tokiu pačiu pavidalu, kaip ir dekartinėse koordinatėse, lygiagretumo sąlyga irgi yra tokia pati. Bet statmenumo sąlygos, atstumo tarp dviejų taškų ir atstumo nuo taško iki tiesės formulės afiniosiose koordinatėse yra gerokai sudėtingesnės. Todėl afiniosios koordinačių sistemos tinka taikyti tais atvejais, kai nereikia skaičiuoti atstumų ir kampų didumų.

5 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinėse AB, BC, AC atitinkamai pažymėti taškai D, E, F taip, kad keturkampis $ADEF$ yra lygiagretainis. Taškas M yra kraštinės BC vidurio taškas, tiesės AM ir DE susikerta taške K. Įrodysime, kad keturkampis $CFDK$ yra lygiagretainis.

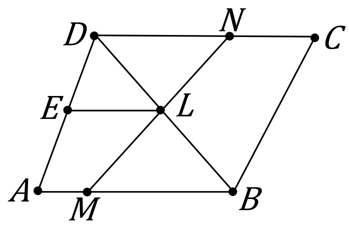
Sprendimas. Sakykime, kad (A, B, C) – afinioji koordinačių sistema, tuomet $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ (9 pav.). Kadangi taškas M yra atkarpos BC vidurys, tai jo koordinatės $x = \frac{1}{2}(1 + 0)$, $y = \frac{1}{2}(0 + 1)$, taigi $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Kadangi taškas D yra abscisių ašyje, tai $D(d, 0)$, o kadangi taškas F yra ordinačių ašyje, tai $F(0, f)$. Kadangi keturkampis $ADEF$ yra lygiagretainis, tai $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$, todėl $E(d, f)$. Tiesės BC lygtis $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1}{0-1}$, taigi $CB{:}\, x + y - 1 = 0$. Kadangi taškas E yra tiesėje BC, tai jo koordinatės tenkina tiesės BC lygtį, taigi teisinga lygybė $d + f = 1$. Tiesės AM lygtis $\frac{x-0}{\frac{1}{2}-0} = \frac{y-0}{\frac{1}{2}-0}$, taigi $AM{:}\, y = x$. Tiesė DE yra lygiagreti su ordinačių ašimi, todėl jos lygtis $DE{:}\, x = d$. Taško K koordinates rasime iš sistemos $\begin{cases} y = x, \\ x = d \end{cases}$ todėl $K(d, d)$. Kadangi keturkampio $CKDF$ kraštinės CF ir KD yra lygiagrečios, tai beliko įrodyti, kad ir $CK \parallel FD$. Tuo tikslu parašome šių tiesių lygtis. $CK{:}\, \frac{x-0}{d-0} = \frac{y-1}{d-1}$, taigi $CK{:}\, (d-1)x - dy + d = 0$; $FD{:}\, \frac{x-0}{d-0} = \frac{y-f}{0-f}$, $FD{:}\, fx + dy - df = 0$, arba įrašius $f = 1 - d$ turime $FD{:}\, (1-d)x + dy - d(1-f) = 0$. Tiesių CK ir FD lygčių koefivientai prie kintamųjų x ir y yra proporcingi, nes $\frac{d-1}{1-d} = \frac{-d}{d}$, todėl šios tiesės yra lygiagrečios, taigi keturkampis $CKDF$ yra lygiagretainis.



9 pav.

6 pavyzdys. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse AB ir CD duoti taškai M ir N, kad $AM : MB = 1 : 4$, $CN : ND = 2 : 3$. Tiesė MN kerta įstrižainę BD taške L. Rasime santykį $BL : LD$.

Sprendimas. Sakykime, kad trejetas (A, B, D) yra plokštumos afinioji koordinačių sistema (10 pav.), tuomet $A(0,0), B(1,0), D(0,1), C(1,1)$. Kadangi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, tai $M\left(\frac{1}{5}, 0\right)$. Kadangi $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD} + \frac{3}{5}\overrightarrow{DC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, tai $N\left(\frac{3}{5}, 1\right)$. Tiesės BD lygtis $\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{1-0}$, taigi $BD{:}\, x + y - 1 = 0$. Tiesės MN lygtis $\frac{x-\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}-\frac{1}{5}} = \frac{y-0}{1-0}$, t. y. $MN{:}\, 5x - 2y - 1 = 0$. Iš sistemos $\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 5x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$ randame taško L koordinates $L(\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$. Nubrėžiame tiesę $LE \parallel AB$, $E \in AD$, tuomet pagal Talio teoremą $BL : LD = AE : ED$. Kadangi $E\left(0, \frac{4}{7}\right)$, tai $AE : EB = 4 : 3$. Taigi $BL : LD = 4 : 3$.



10 pav.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 8, taškas O yra jo įstrižainių sankirtos taškas. Kvadrato $BEFG$ kraštinės ilgis lygus 3, viršūnė E yra kraštinėje BC, o viršūnės F ir G yra kvadrato $ABCD$ išorėje, Raskite trikampio OCF plotą.

2. Stačiojo trikampio ABC statinių ilgiai $CA = 6,\ CB = 8$, atkarpa CH yra jo aukštinė, taškas D yra šios aukštinės vidurio taškas, tiesė AD kerta statinį CB taške E. Raskite atkarpų CE ir EB ilgius.

3. Apskritimo ir rombo centras yra tas pats taškas. Įrodykite, kad atstumų nuo bet kurio apskritimo taško iki rombo viršūnių kvadratų suma yra vienoda visiems apskritimo taškams.

4. Įrodykite, kad atstumų nuo kvadrato viršūnių iki tiesės, einančios per kvadrato centrą kvadratų suma nepriklauso nuo tiesės parinkimo.

5. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 4, taškas K yra kraštinės AB vidurio taškas, taškas L yra atkarpos AK vidurio taškas, atkarposs DK ir CL kertasi taške M. Raskite keturkampio $ADML$ plotą.

6. Tiesė eina per trikampio ABC viršūnę A ir pusiaukraštinės BD vidurio tašką, ji kerta kraštinę BC taške N. Raskite santykį $BN : NC$.

7. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse BC ir CD yra taškai K ir L tokie, kad $BK : KC = 2 : 3,\ CL : LD = 5 : 3$. Atkarpos DK ir BL kertasi taške M. Raskite, kokiu santykiu taškas M dalija atkarpas DK ir BL.

8. Duoti du lygiagretainiai $ABCD$ ir $AMNP$ tokie, kad taškas M yra kraštinėje AB, o taškas P – kraštinėje AD. Įrodykite, kad tiesės MD, BP ir NC kertasi viename taške.

9. Taškas P yra trikampio ABC pusiaukraštinėje CD, tiesės AP ir BC susikerta taške K, o tiesės BP ir AC susikerta taške M. Įrodykite, kad tiesės MK ir AB yra lygiagrečios.

10. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse DC ir CB yra taškai M ir N. Tiesė, einanti per atkarpų DM ir AB vidurio taškus ir tiesė, einanti per atkarpų AD ir BN vidurio taškus, kertasi taške S. Įrodykite, kad tiesė AS eina per atkarpos MN vidurio tašką.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2024 m. gruodžio 10 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUN ŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA