



PASVALIO KRAŠTO
24-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalio Petro Vileišio gimnazija
2024 m. lapkričio 29 d.

Uždaviniai jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Šalia tiesaus tako auga 102 medžiai. Rima pastebėjo, kad, einant taku nuo pradžios iki galo, kas antras medis yra klevas (pirmasis medis nėra klevas), o kas trečias – arba klevas, arba liepa (pirmas medis nėra liepa). Likusieji medžiai yra beržai. Kiek auga beržų?
2. Dviejų teigiamų sveikųjų skaičių m ir n , kurių bendras didžiausias daliklis lygus vienetui, suma lygi 90. Kokią pačią didžiausią reikšmę gali įgyti tokių skaičių m ir n sandauga?
3. Autobusu važiavo jauni ir pagyvenę žmonės; 60 procentų pagyvenusių žmonių stovėjo, o 60 procentų jaunų žmonių sėdėjo. Vienoje stotelėje išlipo tik vienas keleivis – moksleivis Tomas ir toje stotelėje neįlipo nė vienas keleivis. Išlipusio Tomo vietoje atsėdėjo senjoras Petras. Po to paaiškėjo, kad bendras sėdinčių pagyvenusių žmonių ir stovinčių jaunų žmonių skaičius sudarė 76 procentus bendro stovinčių pagyvenusių žmonių ir sėdinčių jaunų žmonių skaičiaus. Kiek žmonių iš pradžių važiavo autobusu?
4. Sudauginę tris skirtingus natūraliuosius skaičius gauname 320. Kokiam pačiam mažiausiam pirminiam skaičiui gali būti lygi tokių trijų skaičių suma?
5. Skaičius 2024 pasižymi savybėmis: jis keturženklis, jo visi skaitmenys lyginiai, jis dalijasi iš 8, jo skaitmenų suma lygi 8. Kiek yra natūraliųjų skaičių, pasižyminčių šiomis savybėmis?
6. Koks yra paskutinis skaičiaus $2024^{2025^{2026}} + 2027^{2026^{2025}}$ skaitmuo?
7. Įrodykite, kad esant bet kuriems realiesiems skaičiams a ir b lygtis
$$(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$$
turi bent vieną sprendinį.
8. Teigiamieji skaičiai a, b ir c tenkina sąlygą $a + b + c = 1$. Įrodykite, kad $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.
9. Stačiakampio $ABCD$ kraštinė CD yra du kartus trumpesnė už įstrižainę, kraštinėje BC yra toks taškas M , kad $AM = MC$. Raskite kampą BAM .
10. Stačiojo lygiašonio trikampio ABC , $\angle C = 90^\circ$, pusiauokampinės BD ilgis lygus 10, iš jo viršūnės A nubrėžtas statmuo į tiesę BD kerta ją taške E . Raskite atkarpos AE ilgį.



PASVALIO KRAŠTO
24-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalio Petro Vileišio gimnazija
2024 m. lapkričio 29 d.

Uždaviniai vyresniųjų klasių mokiniams

1. Natūraliųjų skaičių sekoje x_1, x_2, x_3, \dots kiekvienas narys x_n , pradedant nuo x_3 , skaičiuojamas pagal formulę $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Kokia yra didžiausia galima x_1 reikšmė, jei $x_7 = 2024$?
2. Rasa sugalvojo tris sveikuosius (nebūtinai skirtingus) skaičius. Kiekvieną iš jų ji atėmė iš likusių dviejų skaičių sandaugos. Du iš trijų gautųjų skirtumų lygūs 2 ir 3. Raskite visas galimas trijų Rasos sugalvotų skaičių sumos reikšmes.
3. Autobusu važiavo jauni ir pagyvenę žmonės; 60 procentų pagyvenusių žmonių stovėjo, o 60 procentų jaunų žmonių sėdėjo. Vienoje stotelėje išlipo tik vienas keleivis – moksleivis Tomas ir toje stotelėje neįlipo nė vienas keleivis. Išlipusio Tomo vietoje atsisėdo senjoras Petras. Po to paaiškėjo, kad bendras sėdinčių pagyvenusių žmonių ir stovinčių jaunų žmonių skaičius sudarė 76 procentus bendro stovinčių pagyvenusių žmonių ir sėdinčių jaunų žmonių skaičiaus. Kiek žmonių iš pradžių važiavo autobusu?
4. Lentoje užrašyta 1000 natūraliųjų skaičių 1, 2, 3, ..., 1000. Du žaidėjai paeiliui gali nutrinti bet kurį vieną skaičių. Žaidimas baigiasi, kai lentoje lieka nenutrinti 2 skaičiai. Jei jų suma dalijasi iš 3, laimi žaidimą pradėjęs žaidėjas, o jei jų suma nesidalija iš 3 – laimi antrasis žaidėjas. Kuris iš žaidėjų turi pergalės strategiją? Nurodykite tą strategiją.
5. Aštuonios rankinio komandos dalyvauja turnyre, kuriame kiekviena komanda sužaidžia po vienas rungtynes su visomis kitomis. Keturios daugiausiai taškų surinkusios komandos patenka į finalinį turnyrą. Kiek mažiausiai taškų turi surinkti komanda, kad garantuotai patektų į finalinį turnyrą? Rankinio turnyre už pergalę skiriami du taškai, už pralaimėjimą – nulis taškų, o lygiųjų atveju komandos gauna po tašką.
6. Keliais būdais iš skaičių 1, 2, 3, ..., 101 galima išrinkti 4 skaičius, sudarančius didėjančią aritmetinę progresiją.
Priminimas. Skaičiai a, b, c, d sudaro didėjančią aritmetinę progresiją, jeigu $b - a = c - b = d - c > 0$.
7. Raskite du gretimus natūraliuosius skaičius, kurių sandauga 1000 mažesnė už kurių nors kitų dviejų gretimų natūraliųjų skaičių sandaugą.
8. Įrodykite, kad teigiamiems skaičiams a, b ir c , tenkinantiems sąlygą $ab + bc + ca = 1$, galioja nelygybė
$$\left(\sqrt{bc} + \frac{1}{2a + \sqrt{bc}}\right) \left(\sqrt{ca} + \frac{1}{2b + \sqrt{ca}}\right) \left(\sqrt{ab} + \frac{1}{2c + \sqrt{ab}}\right) \geq 8abc.$$
9. Lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus 32, kampas A yra smailusis, iš viršūnės A nubrėžtos aukštinės AM ir tiesės BC ir AH ir tiesės CD , $MH : AC = 3 : 4$. Raskite trikampio MAH plotą.
10. Stačiojo lygiašonio trikampio ABC , $\angle C = 90^\circ$, pusiaukampinės BD ilgis lygus 10, iš jo viršūnės A nubrėžtas statmuo į tiesę BD kerta ją taške E . Raskite atkarpos AE ilgį.