PASVALIO KRAŠTO 24-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO TAUREI LAIMĖTI

Pasvalio Petro Vileišio gimnazija
2024 m. lapkričio 29 d.

Uždavinių sprendimai jaunesniųjų klasių mokiniams

1. Šalia tiesaus tako auga 102 medžiai. Rima pastebėjo, kad, einant taku nuo pradžios iki galo, kas antras medis yra klevas (pirmasis medis nėra klevas), o kas trečias – arba klevas, arba liepa (pirmas medis nėra liepa). Likusieji medžiai yra beržai. Kiek auga beržų?

Sprendimas. Sunumeruokime visus medžius nuo 1 iki 102 ir suskirstykime juos į grupes po 6 medžius kiekvienoje; tokių grupių bus $102:6=17$. Kiekvienoje grupėje antras, ketvirtas ir šeštas medis yra klevas, o trečias ir šeštas yra arba klevas, arba liepa; taigi trečias medis yra liepa. Tuomet pirmas ir penktas medis yra beržas. Vadinasi, kiekvienoje grupėje yra po du beržus, todėl iš viso yra 34 beržai.

Ats.: 34.

2. Dviejų teigiamų sveikųjų skaičių *m* ir *n*, kurių bendras didžiausias daliklis lygus vienetui, suma lygi 90. Kokią pačią didžiausią reikšmę gali įgyti tokių skaičių *m* ir *n* sandauga?

Sprendimas. Tokių skaičių *m* ir *n* sandaugą mn pertvarkykime taip:

$$mn=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2=45^2-\left(\frac{m-(90-m)}{2}\right)^2=2025-(m-45)^2\to max.$$

Taigi sandauga *mn* įgyja maksimumą, kai reikšmė $(m-45)^2$įgyja minimumą, tik čia reikia atsižvelgti į tai, kad skaičiai *m* ir *n* bendrų daliklių neturi turėti:
Jeigu *m* = 45, tai tada ir *n* = 45 ir skaičiai *m* ir *n* tikrai turi bendrų daliklių;
Jeigu *m* = 46, tai *n* = 44 ir skaičiai *m* ir *n* tikrai turi bendrų daliklių, nes jie abu yra lyginiai;
Jeigu *m* = 47, tai *n* = 43 ir skaičiai *m* ir *n* bendrų daliklių neturi, taigi jie yra ieškomieji skaičiai ir todėl didžiausia sandaugos reikšmė yra 2025 – (47– 45) (47– 45) = 2021.

Ats.: 2021.

3. Autobusu važiavo jauni ir pagyvenę žmonės; 60 procentų pagyvenusių žmonių stovėjo, o 60 procentų jaunų žmonių sėdėjo. Vienoje stotelėje išlipo tik vienas keleivis – moksleivis Tomas ir toje stotelėje neįlipo nė vienas keleivis. Išlipusio Tomo vietoje atsisėdo senjoras Petras. Po to paaiškėjo, kad bendras sėdinčių pagyvenusių žmonių ir stovinčių jaunų žmonių skaičius sudarė 76 procentus bendro stovinčių pagyvenusių žmonių ir sėdinčių jaunų žmonių skaičiaus. Kiek žmonių iš pradžių važiavo autobusu?

Sprendimas. Sakykime, kad iš pradžių važiavo x jaunų ir y pagyvenusių žmonių, tuomet sėdėjo $0{,}6x$ jaunų žmonių ir $0{,}4y$ pagyvenusių žmonių, o stovėjo $0{,}4x$ jaunų žmonių ir $0{,}6y$ pagyvenusių. Kai išlipo Tomas, liko $x-1$ jaunas žmogus, iš kurių $0{,}6x-1$ sėdėjo, o $0{,}4x$ stovėjo. Pagyvenusių žmonių liko *y*; iš jų $0{,}4y+1$ sėdėjo, o $0{,}6y-1$ stovėjo. Pagal sąlygą,

$$(0{,}4y+1)+0{,}4x=0{,}76\big((0{,}6y-1)+(0{,}6x-1)\big).$$

Iš čia $0{,}056(x+y)=2{,}52$; taigi $x+y=45$.

Ats.: 45 žmonės.

4. Sudauginę tris skirtingus natūraliuosius skaičius gauname 320. Kokiam pačiam mažiausiam pirminiam skaičiui gali būti lygi tokių trijų skaičių suma?

Sprendimas. Suprantama, kad tų visų trijų skaičių suma yra didesnė už 2, todėl tas pirminis skaičius, kuriam ji turi būti lygi, yra nelyginis skaičius. Kadangi tie visi trys skaičiai negali būti nelyginiai, nes jų sandauga yra 320, tai tarp tų trijų skaičių du turi būti lyginiai ir vienas nelyginis. Skaičius 320 = $2^6 \cdot 5$ turi du nelyginius daliklius 1 ir 5. Išnagrinėkime tuos abu atvejus.

Jei $c = 1$, gauname tokius atvejus:

$a = 2,\ b = 160,\ a + b + c = 163$, ir tas skaičius yra pirminis;

$a = 4,\ b = 80,\ a + b + c = 85$, o tas skaičius nėra pirminis;

$a = 8,\ b = 40,\ a + b + c = 49$, o tas skaičius nėra pirminis;

$a = 16,\ b = 20,\ a + b + c = 37$, o tas skaičius yra pirminis ir mažesnis negu 163;

$a = 32,\ b = 10,\ a + b + c = 43 > 37$;

$a = 64 > 37 \Rightarrow a + b + c > 37.$

Jei $c = 5$, tai turime tokius atvejus (dėl simetrijos tariame, kad $a < b$):

$a = 2,\ b = 32,\ a + b + c = 39$, o tas skaičius nėra pirminis;

$a = 4,\ b = 16,\ a + b + c = 25$, o tas skaičius nėra pirminis.

Ats.: 37.

5. Skaičius 2024 pasižymi savybėmis: jis keturženklis, jo visi skaitmenys lyginiai, jis dalijasi iš 8, jo skaitmenų suma lygi 8. Kiek yra natūraliųjų skaičių, pasižyminčių šiomis savybėmis?

Sprendimas. Tarkime, kad skaičius $n = \overline{ABCD}$ pasižymi nurodytomis savybėmis. Jis gali turėti tris, du, vieną arba neturėti nė vieno skaitmens, lygaus 0. Tada jo keturi skaitmenys atitinkamai yra lygūs: 1) $8, 0, 0, 0$; 2) $6, 2, 0, 0$ arba $4, 4, 0, 0$; 3) $4, 2, 2, 0$; 4) $2, 2, 2, 2$. Galima perrinkti likusius atvejus. Tačiau taip pat galima pastebėti, kad skaičius $\overline{ABCD} = \overline{AB} \cdot 100 + 10C + D$ dalijasi iš 8, kaip ir skaičius $\overline{AB} \cdot 100 = \overline{AB} \cdot 4 \cdot 25$ (čia skaičius $\overline{AB}$ lyginis). Todėl iš 8 dalijasi $10C + D$. Tuo remdamiesi, galime atmesti dalį atvejų. Gali tikti tik:

1) $C = 0, D = 0$ arba 8; tada $n = 8000, 6200, 4400, 2600$;

2) $C = 2, D = 4$; tada $n = 2024$;

3) $C = 4, D = 0$ arba 8; tada $n = 4040, 2240$;

4) $C = 6, D = 4$; netinka dėl skaičiaus n skaitmenų sumos;

5) $C = 8, D = 0$ arba 8; netinka dėl skaičiaus n skaitmenų sumos.

Gavome 7 skaičius, tenkinančius uždavinio sąlygą.

Ats.: 7.

6. Koks yra paskutinis skaičiaus $2024^{2025^{2026}} + 2027^{2026^{2025}}$ skaitmuo?

Sprendimas. Sekoje 2024^1, 2024^2, 2024^3, ... kiekvienas narys gaunamas iš praeito, padauginant iš 2024. Todėl paskutinis skaitmuo šioje sekoje kartojasi taip: 4, 6, 4, 6, ... T. y., laipsnis 2024^a, kurio rodiklis a yra nelyginis, visada baigiasi skaitmeniu 4. Skaičiaus 2025 laipsnis 2025^{2026} yra nelyginis skaičius, todėl skaičius $2024^{2025^{2026}}$ baigiasi skaitmeniu 4.

Sekoje $2027^1, 2027^2, 2027^3$, ... kiekvienas narys gaunamas iš praeito, padauginant iš 2027. Todėl paskutinis skaitmuo šioje sekoje kartojasi taip: 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, ... T. y. kas ketvirtas paskutinis skaitmuo lygus 1. Šiuo skaitmeniu baigiasi visi laipsniai 2027^a, kurių rodiklis yra skaičiaus 4 kartotinis. Skaičius 2026 lyginis, todėl 2026^{2025} yra skaičiaus 2^{2025} ir tuo labiau skaičiaus 4 kartotinis. Vadinasi, skaičius $2027^{2026^{2025}}$ baigiasi skaitmeniu 1, o suma $2024^{2025^{2026}} + 2027^{2026^{2025}}$ – skaitmeniu $4 + 1 = 5$.

Ats.: 5.

7. Įrodykite, kad esant bet kuriems realiesiems skaičiams a ir b lygtis
$$(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$$
turi bent vieną sprendinį.

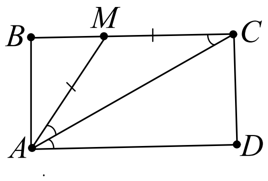
Įrodymas. Jeigu $a = b$, tai bet kuris realusis skaičius x yra šios lygties sprendinys. Jeigu $a \neq b$, tai
$$\frac{1}{4}D = (a^3 - b^3)^2 - (a^2 - b^2)(a^4 - b^4) = a^2b^4 - 2a^3b^3 + a^4b^2 = (ab)^2(a - b)^2 \geq 0,$$
todėl lygtis tikrai turi nors vieną sprendinį.

8. Teigiamieji skaičiai a, b ir c tenkina sąlygą $a + b + c = 1$. Įrodykite, kad $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

Sprendimas. Padaliję abi lygybės $a + b + c = 1$ iš a gauname, kad $\frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$. Analogiškai padaliję iš b ir c, gauname lygybes $\frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$, $\frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$. Sudėję šias tris lygybes ir sugrupavę, gauname, kad $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)$. Kadangi dviejų atvirkštinių skaičių suma yra ne mažesnė nei du, tai $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$, $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$, ir iš čia išplaukia įrodomoji nelygybė.

9. Stačiakampio $ABCD$ kraštinė CD yra du kartus trumpesnė už įstrižainę, kraštinėje BC yra toks taškas M, kad $AM = MC$. Raskite kampą BAM.

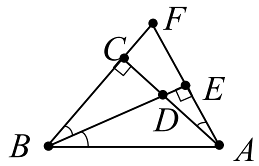
Sprendimas. Kadangi stačiojo trikampio ACD įžambinė AC yra du kartus ilgesnė už statinį CD, tai $\angle CAD = 30^0$. Kadangi $AD \parallel BC$, tai gauname $\angle ACB = \angle ACM = \angle CAD = 30^0$. Kadangi $AM = MC$, tai $\angle MAC = \angle ACM = 30^0$. Taigi $\angle BAM = \angle BAD - \angle MAC - \angle CAD = 90^0 - 30^0 - 30^0 = 30^0$.
Ats.: 30^0.

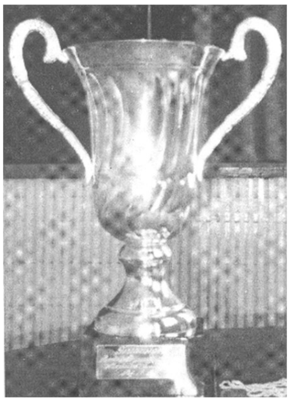


10. Stačiojo lygiašonio trikampio ABC, $\angle C = 90^0$, pusiaukampinės BD ilgis lygus 10, iš jo viršūnės A nubrėžtas statmuo į tiesę BD kerta ją taške E. Raskite atkarpos AE ilgį.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesės BC ir AE susikerta taške F. Stačiųjų trikampių ABE ir FBE statinis BE yra ta pati atkarpa, o smailieji kampai ABE ir FBE yra lygūs, todėl $\Delta ABE = \Delta FBE$. Iš čia išplaukia, kad $AE = EF$. Kadangi $\angle CBD = \angle CAE$, tai statieji trikampiai BCD ir ACF yra lygūs, nes lygūs jų statiniai BC ir AC. Vadinasi, $BD = AF = 2AE$. Todėl $AE = \frac{1}{2}BD = 5$.

Ats.: 5.





PASVALIO KRAŠTO
24-OJI KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
PROFESORIAUS BRONIAUS GRIGELIONIO
TAUREI LAIMĖTI

Pasvalio Petro Vileišio gimnazija
2024 m. lapkričio 29 d.

Uždavinių sprendimai
vyresniųjų klasių mokiniams

1. Natūraliųjų skaičių sekoje x_1, x_2, x_3, ... kiekvienas narys x_n, pradedant nuo x_3, skaičiuojamas pagal formulę $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Kokia yra didžiausia galima x_1 reikšmė, jei $x_7 = 2024$?

Sprendimas. Duotąją formulę pritaikykime kelis kartus:

$$x_7 = x_6 + x_5 = 2x_5 + x_4 = 3x_4 + 2x_3 = 5x_3 + 3x_2 = 8x_2 + 5x_1.$$

Jei $x_2 = 1$ arba 2, tai $5x_1 = 2024 - 8x_2$ nesidalija iš 5. Taigi $x_2 \geq 3$ ir $5x_1 \leq 2024 - 24 = 2000$. Vadinasi, $x_1 \leq 400$.

Kita vertus, galima situacija, kai $x_1 = 400$, $x_2 = 3$. Tada $x_7 = 8x_2 + 5x_1 = 2024$.

Ats.: 400.

2. Rasa sugalvojo tris sveikuosius (nebūtinai skirtingus) skaičius. Kiekvieną iš jų ji atėmė iš likusių dviejų skaičių sandaugos. Du iš trijų gautųjų skirtumų lygūs 2 ir 3. Raskite visas galimas trijų Rasos sugalvotų skaičių sumos reikšmes.

Sprendimas. Rasa sugalvojo skaičius x, y, z, kuriems $x + 2 = yz$ ir $y + 3 = zx$. Sudėkime šias dvi lygybes: $x + y + 5 = z(x + y)$. Tada $(x + y)(z - 1) = 5$ ir todėl $z - 1 = 1$, -1, 5 arba -5. Atitinkamai $z = 2$, 0, 6 arba -4, o $x + y = 5$, -5, 1 arba -1. Gauname ir keturias galimas sumos $x + y + z$ reikšmes, tačiau ne visos jos tinka. Su kiekviena gauta z reikšme nesunkiai galime išspręsti lygčių $x + 2 = yz$ ir $y + 3 = zx$ sistemą x ir y atžvilgiu, bet ne visais atvejais gausime sveikąsias x ir y reikšmes.

Užuot sprendę keturias lygčių sistemas, galime pradines lygybes atimti vieną iš kitos: $x - y - 1 = z(y - x)$. Tada $(y - x)(z + 1) = -1$ ir todėl $z + 1 = 1$ arba -1. Atitinkamai $z = 0$ arba $z = -2$.

Taigi vienintelė galima z reikšmė yra $z = 0$. Tada $x = -2$, $y = -3$ (šie skaičiai tenkina uždavinio sąlygą) ir $x + y + z = -5$.

Ats.: -5.

3. Autobusu važiavo jauni ir pagyvenę žmonės; 60 procentų pagyvenusių žmonių stovėjo, o 60 procentų jaunų žmonių sėdėjo. Vienoje stotelėje išlipo tik vienas keleivis – moksleivis Tomas ir toje stotelėje neįlipo nė vienas keleivis. Išlipusio Tomo vietoje atsisėdo senjoras Petras. Po to paaiškėjo, kad bendras sėdinčių pagyvenusių žmonių ir stovinčių jaunų žmonių skaičius sudarė 76 procentus bendro stovinčių pagyvenusių žmonių ir sėdinčių jaunų žmonių skaičiaus. Kiek žmonių iš pradžių važiavo autobusu?

Sprendimas. Sakykime, kad iš pradžių važiavo x jaunų ir y pagyvenusių žmonių, tuomet sėdėjo $0{,}6x$ jaunų žmonių ir $0{,}4y$ pagyvenusių žmonių, o stovėjo $0{,}4x$ jaunų žmonių ir $0{,}6y$ pagyvenusių. Kai išlipo Tomas, liko $x - 1$ jaunas žmogus, iš kurių $0{,}6x - 1$ sėdėjo, o $0{,}4x$ stovėjo. Pagyvenusių žmonių liko y; iš jų $0{,}4y + 1$ sėdėjo, o $0{,}6y - 1$ stovėjo. Pagal sąlygą,

$$(0{,}4y + 1) + 0{,}4x = 0{,}76\big((0{,}6y - 1) + (0{,}6x - 1)\big).$$

Iš čia $0{,}056(x + y) = 2{,}52$; taigi $x + y = 45$.

Ats.: 45 žmonės.

4. Lentoje užrašyta 1000 natūraliųjų skaičių 1, 2, 3, ..., 1000. Du žaidėjai paeiliui gali nutrinti bet kurį vieną skaičių. Žaidimas baigiasi, kai lentoje lieka nenutrinti 2 skaičiai. Jei jų suma dalijasi iš 3, laimi žaidimą pradėjęs žaidėjas, o jei jų suma nesidalija iš 3 – laimi antrasis žaidėjas. Kuris iš žaidėjų turi pergalės strategiją? Nurodykite tą strategiją.

Sprendimas. Laimi antrasis žaidėjas. Pradžioje jis turi nutrinti visus iš trijų besidalijančius skaičius. Tam prireiks daugiausia 333 ėjimų, nes skaičių, kurie dalijasi iš 3, yra 333, o kai kuriuos gali išbraukti ir pirmasis žaidėjas. Kai nelieka skaičių, kurie dalijasi iš 3, antrasis gali trinti bet kuriuos skaičius, kol prieš eilinį antrojo žaidėjo ėjimą lentoje lieka trys skaičiai. Iš jų bent du dalijant iš 3 gaunama ta pati liekana. Juos antrasis žaidėjas ir turi palikti, nes jų suma nesidalija iš 3.
Ats.: Antrasis žaidėjas turi laimėtiną strategiją.

5. Aštuonios rankinio komandos dalyvauja turnyre, kuriame kiekviena komanda sužaidžia po vienas rungtynes su visomis kitomis. Keturios daugiausiai taškų surinkusios komandos patenka į finalinį turnyrą. Kiek mažiausiai taškų turi surinkti komanda, kad garantuotai patektų į finalinį turnyrą? Rankinio turnyre už pergalę skiriami du taškai, už pralaimėjimą – nulis taškų, o lygiųjų atveju komandos gauna po tašką.

Sprendimas. Kiekviena komanda sužaidžia po 7 rungtynes, todėl iš viso sužaidžia $\frac{8\cdot 7}{2} = 28$ rungtynes. Kadangi per kiekvienas rungtynes surenkami 2 taškai, tai iš viso susidaro 56 taškai. Vadinasi, gali atsirasti 5 komandos, kurios surinks po 9 taškus, užims pirmas penkias vietas ir todėl viena nepaklius į finalinį turnyrą. Parodysim, kad 10 taškų irgi neužtenka. Jeigu 5 komandos tarpusavyje sužaistų lygiosiomis, o prieš kitas tris laimėtų, tai kiekviena surinktų po 4 taškus už ketverias lygiąsias, ir po 6 taškus už tris pergales. Tada šios penkios komandos surinktų po $4 + 6 = 10$ taškų ir to gali neužtekti siekiant patekti į finalinį turnyrą. Įrodysime, kad 11 taškų tikrai pakaktų. Jei bent 5 komandos surinktų po 11 taškų, tai iš viso jos surinktų 55 taškus. Bet tada likusioms trims komandoms liktų 1 taškas, o tai būti negali, nes tos trys komandos tarpusavyje sužaidžia 3 rungtynes; taigi kartu surenka 6 taškus.
Ats.: 11.

6. Keliais būdais iš skaičių 1, 2, 3, ..., 101 galima išrinkti 4 skaičius, sudarančius didėjančią aritmetinę progresiją?

Priminimas. Skaičiai *a*, *b*, *c*, *d* sudaro didėjančią aritmetinę progresiją, jeigu $b - a = c - b = d - c > 0$.

Sprendimas. Didžiausias galimas progresijos skirtumas yra $\frac{101-1}{3}$, o sveikiesiems skaičiams tas skirtumas turi būti teigiamas, todėl didžiausia galima jo reikšmė yra 33.

Atlikime reikiamus apskaičiavimus. Progresijų su skirtumu 1 yra $101-1\cdot 3 = 98$, su skirtumu 2 tokių progresijų yra $101 - 2\cdot 3 = 95$, su skirtumu 3 jų yra $101 - 3\cdot 3 = 92$, ..., o su skirtumu $33 - 101-33\cdot 3 = 2$. Taigi tokių progresijų iš viso yra $2 + 5 + \ldots + 98 = \frac{1}{2}\cdot 100\cdot 33 = 1650$.
Ats.: 1650.

7. Raskite du gretimus natūraliuosius skaičius, kurių sandauga 1000 mažesnė už kurių nors kitų dviejų gretimų natūraliųjų skaičių sandaugą.

Sprendimas. Pažymėkime didesnę gretimų natūraliųjų skaičių porą simboliais $n, n + 1$, o mažesnę porą – simboliais $m, m + 1$. Tada tenkinama lygybė $n^2 + n - m^2 - m = 1000$, iš kurios išplaukia, jog $(n - m)(n + m + 1) = 2^3 \cdot 5^3$.
Taigi dviejų skirtingo lyginumo skaičių sandauga yra lygi 1000, o daugiklis $n - m$ yra mažesnis už daugiklį $n + m + 1$. Išrašykime visus 1000 išskaidymo skirtingo lyginumo skaičiais variantus:

$$1000 = 1\cdot 1000 = 5\cdot 200 = 8\cdot 125 = 25\cdot 40.$$

Belieka išspręsti keturias lygčių sistemas:

1) $\begin{cases} n - m = 1 \\ n + m + 1 = 1000 \end{cases} \Rightarrow 2n + 1 = 1001 \Rightarrow n = 500,\ m = 499;$

2) $\begin{cases} n - m = 5 \\ n + m + 1 = 200 \end{cases} \Rightarrow 2n + 1 = 205 \Rightarrow n = 102,\ m = 97;$

3) $\begin{cases} n-m=8 \\ n+m+1=125 \end{cases} \Rightarrow 2n+1=133 \Rightarrow n=66,\ m=58;$

4) $\begin{cases} n-m=25 \\ n+m+1=40 \end{cases} \Rightarrow 2n+1=65 \Rightarrow n=32,\ m=7.$

Ats.: (499,500), (97, 98), (58, 59) ir (7, 8).

8. Įrodykite, kad teigiamiems skaičiams a, b ir c, tenkinantiems sąlygą $ab+bc+ca=1$, galioja nelygybė$\left(\sqrt{bc}+\frac{1}{2a+\sqrt{bc}}\right)\ \left(\sqrt{ca}+\frac{1}{2b+\sqrt{ca}}\right)\ \left(\sqrt{ab}+\frac{1}{2c+\sqrt{ab}}\right) \geq 8abc.$

Įrodymas. Iš uždavinio sąlygos išplaukia, kad

$$\frac{1}{2a+\sqrt{bc}}=\frac{ab+bc+ca}{2a+\sqrt{bc}}=\frac{bc+a(b+c)}{2a+\sqrt{bc}}\geq\frac{bc+2a\sqrt{bc}}{2a+\sqrt{bc}}=\sqrt{bc},$$

todėl

$$\sqrt{bc}+\frac{1}{2a+\sqrt{bc}}\geq 2\sqrt{bc}.$$

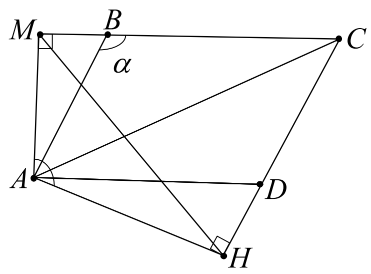
Analogiškai

$$\sqrt{ca}+\frac{1}{2b+\sqrt{ca}}\geq 2\sqrt{ca} \text{ ir } \sqrt{ab}+\frac{1}{2c+\sqrt{ab}}\geq 2\sqrt{ab}.$$

Sudauginę visas tris nelygybes gauname įrodomąją nelygybę.

9. Lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus 32, kampas A yra smailusis, iš viršūnės A nubrėžtos aukštinės AM į tiesę BC ir AH į tiesę CD, $MH : AC = 3 : 4$. Raskite trikampio MAH plotą.

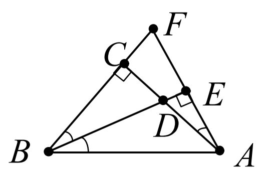
Sprendimas. Sakykime, kad $\angle ABC=\alpha$, tuomet $\angle MCH=\angle BCD=180^0-\alpha$. Kadangi keturkampio $AMCH$ du kampai statieji, tai $\angle MAH=360^0-2\cdot 90^0-(180^0-\alpha)=\alpha=\angle ABC$. Kadangi $AM\cdot BC=AH\cdot CD$, tai $\frac{AM}{AH}=\frac{CD}{BC}=\frac{AB}{BC}$. Iš sąlygų $\angle MAH=\angle ABC$ ir $\frac{AM}{AH}=\frac{AB}{BC}$ išplaukia, kad trikampiai MAH ir ABC yra panašieji, jų panašumo koeficientas $k=MH:AC=\frac{3}{4}$. Kadangi panašiųjų trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui, tai $S_{\Delta MAH}:S_{\Delta ABC}=(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$. Taigi $S_{\Delta MAH}=\frac{9}{16}\cdot S_{\Delta ABC}=\frac{9}{16}\cdot\frac{32}{2}=9.$



Ats.: 9

10. Stačiojo lygiašonio trikampio ABC, $\angle C=90^0$, pusiaukampinės BD ilgis lygus 10, iš jo viršūnės A nubrėžtas statmuo į tiesę BD kerta ją taške E. Raskite atkarpos AE ilgį.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesės BC ir AE susikerta taške F. Stačiųjų trikampių ABE ir FBE statinis BE yra ta pati atkarpa, o smailieji kampai ABE ir FBE yra lygūs, todėl $\Delta ABE=\Delta FBE$. Iš čia išplaukia, kad $AE=EF$. Kadangi $\angle CBD=\angle CAE$, tai statieji trikampiai BCD ir ACF yra lygūs, nes lygūs jų statiniai BC ir AC. Vadinasi, $BD=AF=2AE$. Todėl $AE=\frac{1}{2}BD=5$.



Ats.: 5.