DVIDEŠIMT TREČIOJI RUDENINĖ RASEINIŲ KRAŠTO OLIMPIADA
PROFESORIAUS JONO KUBILIAUS TAUREI LAIMĖTI

Raseiniai, 2024 m. lapkričio 22 d.

Sprendimai

Komandinė olimpiada

1. Yra penki pirminiai skaičiai, mažesni nei 13: 2, 3, 5, 7 ir 11. Kadangi

$$371^4 - 41^4 = (371^2)^2 - (41^2)^2 = (371^2 - 41^2)(371^2 + 41^2) =$$
$$= (371 - 41)(371 + 41)(371^2 + 41^2) = 330 \cdot 412 \cdot (371^2 + 41^2),$$

o 300 dalijasi iš 2, 3, 5 ir 11, tai šie keturi pirminiai skaičiai išrėžti lentoje. Liko patikrinti dalumą iš skaičiaus 7. Iš jo dalijasi skaičius 371, taigi ir skaičius 371^4. Kita vertus, iš 7 nesidalija 41, taigi ir 41^4. Vadinasi, $371^4 - 41^4$ nesidalija iš 7.
Matome, kad tarp skaičiaus $371^4 - 41^4$ daliklių yra 4 iš 5 nagrinėjamų pirminių skaičių.
Atsakymas. (D) 4.

2. Prieš pasirodant devintajai komandai, visų 8 komandų narių skaičių suma buvo $6 \cdot 8 = 48$. Juk padalyta iš komandų skaičiaus 8, ji turi būti lygi vidurkiui 6. Analogiškai visų 9 komandų narių skaičių suma lygi $7 \cdot 9 = 63$. Pasirodžius devintajai komandai, ši suma padidėjo $63 - 48 = 15$. Vadinasi, devintąją komandą sudaro 15 narių.
Atsakymas. (C) 15.

3. Didžiausią iš trijų skirtingų skaitmenų pažymėkime A, o kitus du skaitmenis pažymėkime B ir C. Tada du didžiausieji triženkliai skaičiai, kurių suma S lygi 1233, yra $\overline{ABC}$ ir $\overline{ACB}$. Jei čia $A \geq 7$, tai turime $S > 700 + 700 > 1233$. Jei $A \leq 5$, tai $S < 600 + 600 < 1233$. Vadinasi, $A = 6$ ir

$$1233 = \overline{ABC} + \overline{ACB} = (600 + 10B + C) + (600 + 10C + B) = 1200 + 11(B + C).$$

Tada $11(B + C) = 1233 - 1200 = 33$ ir $B + C = 3$. Taigi $A + B + C = 6 + 3 = 9$.
Atsakymas. (B) 9.

4. Turime nagrinėti skaičius $\overline{ABCCC} = \overline{AB} \cdot 1000 + C \cdot 111$. Kurie iš jų dalijasi iš 4, bet ne iš 8? Dėmuo $\overline{AB} \cdot 1000$ visada dalijasi iš 4, todėl iš 4 turi dalytis ir antrasis dėmuo $C \cdot 111$. Taip bus, kai $C = 0$, 4 arba 8. Atvejai $C = 0$ arba $C = 8$ netinka: abu sumos $\overline{AB} \cdot 1000 + C \cdot 111$ dėmenys tada dalijasi iš 8. Kai $C = 4$, abu šios sumos dėmenys, taigi ir visa suma $\overline{ABCCC}$ dalijasi iš 4, o iš 8 dalijasi tik pirmasis dėmuo, tad suma $\overline{ABCCC}$ iš 8 nesidalija. Vadinasi, tinka tie ir tik tie skaičiai $\overline{ABCCC}$, kuriems $C = 4$, skaitmuo B yra bet kuris iš 10 skaitmenų, o skaitmuo A – bet kuris iš 9 nenulinių skaitmenų. Tokių skaičių yra $10 \cdot 9 = 90$.
Atsakymas. (B) 90.

5. Kadangi

$$1^2 = (u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 = 2 + 2uv, \qquad 2uv = 1^2 - 2 = -1, \qquad uv = -0{,}5,$$

tai

$$2^2 = (u^2+v^2)^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = u^4 + v^4 + 2(-0{,}5)^2 = u^4 + v^4 + 0{,}5,$$
$$u^4 + v^4 = 2^2 - 0{,}5 = 3{,}5.$$

Atsakymas. (E) 3,5.

6. Iš sąlygos aišku, kad Protazą aplenkė daugiau bėgikų nei Gervazą. Tarkime, kad rezultatų lentelėje, imant nuo viršaus, surašyta x bėgikų, tada eina Gervazas, tada 10 bėgikų, tada Protazas, o tada likę y bėgikų. Gervazo eilutė lentelę skelia perpus, todėl $x = 10 + 1 + y = y + 11$. Tada $y = x - 11$, o bėgikų iš viso yra $x + 1 + x = 2x + 1$. Lentelėje aukščiau už Protazą yra $x + 1 + 10 = x + 11$ bėgikų, ir jų yra tris kartus daugiau nei bėgikų, esančių žemiau už Protazą:

$$x + 11 = 3y = 3(x - 11) = 3x - 33, \qquad 2x = 44, \qquad 2x + 1 = 45.$$

Vadinasi, Raseinius apibėgo 45 bėgikai.
Atsakymas. (E) Kitas atsakymas.

7. Kiekvieno Giriaus keturženklio skaičiaus skaitmenų suma $1 + 3 + 5 + 9 = 18$ dalijasi iš 9. Todėl visi trys keturženkliai skaičiai bei jų suma dalijasi iš 9. Skaičiaus (A) 17535 skaitmenų suma 21, taigi ir pats šis skaičius iš 9 nesidalija. Vadinasi, tai ir turi būti Gervazo spėta klaidinga reikšmė. Kitos keturios reikšmės atsakymuose yra įmanomos. Nors to pagrįsti čia nebūtina, išvardysime atitinkamas lygybes:

$$1935 + 1359 + 3195 = 6489, \qquad 9513 + 9351 + 3951 = 22815,$$
$$1935 + 1593 + 3951 = 7479, \qquad 1359 + 9531 + 3915 = 14805.$$

Atsakymas. (A) 17535.

8. Pradinio susapnuotojo trikampio statinių ilgius (cm) pažymėkime x ir y. Turime rasti stačiojo trikampio plotą $S = \frac{xy}{2}$ (cm^2). Remiantis Pitagoro teorema,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13^2, \\ (x+3)^2 + (y+3)^2 = (13+4)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 169, \\ x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 = 289. \end{cases}$$

Tada $6x + 6y = 289 - (x^2 + y^2) - 9 - 9 = 289 - 169 - 18 = 102$ ir $x + y = 102 : 6 = 17$.
Toliau įmanoma rasti x ir y reikšmes (jos lygios 5 ir 12 arba 12 ir 5), tačiau tai nebūtina:

$$(x+y)^2 = 17^2, \qquad x^2 + 2xy + y^2 = 289, \qquad 2xy = 289 - (x^2 + y^2) = 289 - 169 = 120.$$

Vadinasi, $S = \frac{xy}{2} = 2xy : 4 = 120 : 4 = 30$.
Atsakymas. (C) 30.

9. Mažiausioje monetų krūvelėje, atitekusioje Valdonei, galėjo būti 50 monetų. Pavyzdžiui, ant stalo galėjo būti 8 krūvelės po 75 monetas ir 8 krūvelės po 50 monetų. Tada monetų iš viso buvo 1000, ir jas iš tiesų galima apjungti nurodytu būdu: arba suskirstant krūveles į 8 poras po $75 + 50 = 125$ monetas, arba į keturis trejetus po $75 + 75 + 50 = 200$ monetų ir likusių krūvelių ketvertą, kuriame taip pat būtų $50 + 50 + 50 + 50 = 200$ monetų.

Kita vertus, daugiau nei 50 monetų mažiausioje krūvelėje negalėjo būti. Tarkime priešingai, t. y. kad visose krūvelėse buvo daugiau nei po 50 monetų. Tada kiekviena iš penkių „superkrūvelių“ po 200 monetų gaunama, apjungus daugiausiai 3 krūveles, o ant stalo buvo daugiausiai $5 \cdot 3 = 15$ krūvelių. Jei visos 8 „superkrūvelės“ po 125 monetas būtų gaunamos, apjungiant bent po dvi krūveles, tai krūvelių būtų bent $8 \cdot 2 = 16$. Todėl bent viena 125 monetų „superkrūvelė“ gaunama iš vienintelės krūvelės K_1, kurioje yra lygiai 125 monetos. Krūvelę K_1 apjungiant su kitomis, gaunama viena iš „superkrūvelių“ po 200 monetų. Jei tų kitų krūvelių būtų bent dvi, tai „superkrūvelėje“ monetų jau būtų per daug (daugiau nei $125 + 50 + 50$). Taigi K_1 apjungiama su vienintele krūvele K_2, kurioje yra lygiai 75 monetos. Savo ruožtu krūvelę K_2 apjungiant su kitomis, gaunama 125 monetų „superkrūvelė“. Tose kitose krūvelėse turi būti lygiai 50 monetų, taigi vienoje iš jų – ne daugiau nei 50. Gavome prieštarą.
Vadinasi, didžiausias galimas Valdonės laimikis lygus 50 monetų.
Atsakymas. (D) 50.

10. Nustatysime visus tinkamus lentelės užpildymus. Kadangi

$$2 \cdot 2 = (a_1 a_2 b_1 b_2) \cdot (b_1 b_2 c_1 c_2) = (a_1 b_1 c_1) \cdot (a_2 b_2 c_2) \cdot (b_1 b_2) = 1 \cdot 1 \cdot (b_1 b_2),$$

tai $b_1 b_2 = 4$. Analogiškai $b_2 b_3 = 4$. Taigi $4 \cdot 4 = (b_1 b_2) \cdot (b_2 b_3) = (b_1 b_2 b_3) \cdot b_2 = b_2$ ir $b_2 = 16$. To pakanka, kad pasirinktume teisingą atsakymą A, tačiau raskime ir likusias reikšmes:

$b_1 = \frac{4}{b_2} = \frac{1}{4}$, analogiškai nustatoma, kad $b_3 = a_2 = c_2 = \frac{1}{4}$;

$a_1 = \frac{2}{a_2 b_1 b_2} = 4$, analogiškai nustatoma, kad $a_3 = c_1 = c_3 = 2$.

Gavome vienintelį tinkamą lentelės užpildymą (žr. pav.).
Atsakymas. (A) 16.

a_1	a_2	a_3
b_1	b_2	b_3
c_1	c_2	c_3

2	$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{4}$	16	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	2

Individualioji olimpiada

1. Natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 2024 iš eilės skirstykime į šešetus:

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6), \qquad (7, 8, 9, 10, 11, 12), \qquad \ldots$$

Kadangi $2024 = 337 \cdot 6 + 2$, tai turime 337 tokius šešetus, kurių kiekviename du pirmieji skaičiai geltoni, o du paskutiniai skaičiai mėlyni. Dar turime du didžiausius skaičius 2023 ir 2024, kurie yra geltoni ir į jokį šešetą nepatenka. Kiekviename šešete iš penktojo skaičiaus atėmę pirmąjį arba iš šeštojo antrąjį, gausime 4. Visus tokius skirtumus sudėję ir dar atėmę geltonus skaičius 2023 ir 2024, gauname visų mėlynų ir visų geltonų skaičių sumų skirtumą $(4 + 4) \cdot 337 - 2023 - 2024 = -1351$.
Atsakymas. -1351.

2. Žr. komandinės olimpiados 6-ojo uždavinio sprendimą.

3. Žr. komandinės olimpiados 8-ojo uždavinio sprendimą.

4. Žr. komandinės olimpiados 9-ojo uždavinio sprendimą.

5. Žr. komandinės olimpiados 10-ojo uždavinio sprendimą.