VII. ŽAIDIMAI IR TURNYRAI

(2023-2025)

Teorinę medžiagą parengė ir septintąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Romualdas Kašuba

1.Futbolo turnyro pogrupyje dalyvauja 4 komandos, kurios po vieną kartą sužaidžia su kiekviena kita pogrupio komanda. Už laimėtas rungtynes komanda gauna 3 taškus, už lygiosiomis pasibaigusias rungtynes – 1 tašką, o už pralaimėtas rungtynes komanda taškų negauna. Sakoma, kad komanda pasirodo fantastiškai, jeigu ji pagal surinktus taškus užima vieną iš dviejų pirmųjų vietų. Klausimas, kurį mes dabar nagrinėsime bus toks: su keliais mažiausiais taškais komanda gali pasirodyti fantastiškai?

Sprendimas. Išnagrinėsime iš eilės visas galimybes.

Jeigu komanda surenka 0 taškų, tai ji pralaimi visas trejas rungtynes „padovanodama“ visoms trims savo varžovėmis po 3 taškus ir lieka paskutinėje vietoje ir, aišku, fantastiškai pasirodyti negali.

Toliau, jeigu komanda surenka 1 tašką, tai ji, aišku, sužaidžia vienerias rungtynes lygiosiomis ir dvejas rungtynes pralaimi „padovanodama“ dviem komandoms po 3 taškus ir jos ją atlenks ir, aišku, kad komanda su 1 vienu tašku galutinėje rikiuotėje fantastiškai pasirodyti negali.

O surinkus 2 taškus komandai fantastiškai pasirodyti – arba, kitaip, užimti kurią nors iš dviejų pirmųjų vietų yra įmanoma. Taip nutinka tada, kai komanda, užėmusi pirmąją vietą laimi visas savo sužaistas rungtynes, o visos kitos komandos savas rungtynes baigia lygiosiomis. Tada turnyrinė lentelė atrodo taip:

	A	B	C	D	Taškai	Vieta
A	X	3	3	3	9	I
B	0	X	1	1	2	II
C	0	1	X	1	2	III
D	0	1	1	X	2	IV

Taigi tikrai matome, kad viena iš trijų komandų - B, C arba D, surinkusi tik 2 taškus, gali pasirodyti fantastiškai, tai yra, užimti vieną iš dviejų pirmųjų vietų.

2. Buvo sužaistas archainis futbolo turnyras, kuriame kiekviena komanda sužaidė po vienerias rungtynes su kiekviena kita dalyvavusia komanda ir kur už pergalę tebuvo skiriami du taškai, už rungtynes, pasibaigusias lygiosiomis – 1 taškas, o už pralaimėtas rungtynes komanda taškų iš viso negaudavo. Po to turnyro paaiškėjo, kad visos komandos surinko po skirtingą taškų skaičių. Kiek taškų gali surinkti turnyrą laimėjusi komanda?

(A) 8 (B) 8, 7 (C) 8, 6 (D) 8, 7, 6 (E) 8, 7, 6, 5

Sprendimas. Pirmiausiai įrodysime, kad turnyrą laimėjusi komanda 5 taškų surinkti negali, jeigu visos komandos surenka skirtingą taškų skaičių. Tikrai, tada antrą vietą užėmusi komanda surenka daugiausiai 4 taškus, užėmusi trečią vietą gauna daugiausiai 3 taškus, užėmusi ketvirtą vietą surenka mažiausiai 2 taškus ir užėmusi penktąją paskutinę vietą – daugiausiai 1 tašką. Taškus. Taigi tada visos dalyvavusios komandos surenka daugiausiai 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 taškų, tačiau taip negali būti, nes penkių komandų turnyre įvyksta 10 rungtynių ir todėl yra išžaidžiama 20 taškų.

O surinkti 6 taškus ir užimti pirmą vietą visoms komandoms renkant po skirtingą taškų skaičių yra įmanoma – tai įrodo tokia galima turnyrinė lentelė:

	A	B	C	D	E	Taškai	Vieta
A	X	1	1	2	2	6	
B	1	X	0	2	2	5	II
C	1	2	X	0	1	4	III
D	0	0	2	X	1	3	1V
E	0	0	1	1	X	2	V

Galima pirmajai komandai surinkti ir 7 arba 8 taškus (renkant visoms komandos po skirtingą taškų skaičių) – tai rodo žemiau pateikiamos dvi lentelės: viena

	A	B	C	D	E	Taškai	Vieta
A	X	1	2	2	2	7	I
B	1	X	1	2	2	6	II
C	0	1	X	1	2	4	III
D	0	0	1	X	1	2	IV
E	0	0	0	1	X	1	V

ir kita:

	A	B	C	D	E	Taškai
A	X	2	2	2	2	8
B	0	X	2	2	2	6
C	0	0	X	2	2	4
D	0	0	0	X	2	2
E	0	0	0	0	X	2

3. Vieno rato turnyre, kur kiekviena komanda sužaidžia po vienerias rungtynes su kiekviena kita komanda, ir kur už pergalę skiriami 2 taškai, už lygiąsias – 1 taškas ir už pralaimėjimą taškų iį viso neduodama, rungtyniavo 6 komandos. Ar galėjo ten nutikti taip, kad kokios nors trys komandos kartu surinko 4 taškais daugiau, negu trys likusios komandos?

Sprendimas. Taip, taip galėjo nutikti ir mes pateiksime tokios turnyrinės lentelės pavyzdį, kur pirmos trys komandos (A, B ir C) surenka 17, o likusios trys komandos (D, E ir F)– 13 taškų.

	A	B	C	D	E	F	Suma
A	X	2	2	2	2	2	10
B	0	X	2	2	1	1	6
C	0	0	X	0	0	1	1
D	0	0	2	X	2	2	6
E	0	1	2	0	X	2	5
F	0	1	1	0	0	X	2

4.Klasės lentoje buvo užrašytas reiškinys

*1*2*3*4*5*6*7*8.

Jonas ir Andrius žaidžia tokį žaidimą. Jie pakaitomis – pradeda Jonas – savo ėjimu pakeičia kokią nori žvaigždutę vienu kuriuo nors iš ženklų „+“ arba „-„ (pliusu arba minusu). Jonas stengiasi, kad gautasis skaičius nesidalintų iš 3, o Andrius, atvirkščiai, stengiasi, kad tas skaičius dalintųsi iš 3. Kuris iš jų laimės, jeigu abu žais geriausiu įmanomu būdu.

Sprendimas. Andrius laimės. Sujunkime tuos skaičius į poras tokiu būdu: (1;2), (4;5), (7; 8) ir (3; 6).

Tam, kad laimėtų Andrius turi laikytis tokios strategijos: jeigu Jonas savo ėjimu įrašo kokį nors ženklą „+“ arba „-„ prie kokio nors skaičiaus, tai Andrius savo atsakomuoju ėjimu įrašo tokį patį ženklą prie kito tos pačios poros skaičiaus. Kadangi kiekvienos poros skaičių suma dalosi iš 3, tai ir žaidimo pabaigoje atsiradęs skaičius taip pat dalinsis iš 3.

5. Tinklinio turnyre dalyvavo 6 komandos. Kiekviena komanda sužaidė po vienerias rungtynes su kiekviena kita komanda. Per kiekvienas rungtynes už iškovotą pergalę komanda gauna po vieną tašką, o už pralaimėtas – 0 taškų (lygiųjų tinklinyje nebūna). Turnyro pabaigoje paaiškėjo, kad komandos užėmusios pirmąsias dvi vietas kartu surinko 3 kartus daugiau taškų, negu trys komandos, užėmusios 4, 5 ir 6-tą vietas.

Nustatykite, kaip pasibaigė rungtynės tarp komandų, užėmusių 3-ią ir 5-tą vietas. (Jeigu kelios komandos surenka vienodą taškų skaičių, tai komandų vietos kiekvienos tokios grupės viduje nustatomos burtų keliu).

Sprendimas. Kadangi kiekvienose rungtynėse buvo „išžaidžiamas“ tik vienas taškas, o šešių komandų turnyre, kur kiekviena komanda po vieną kartą sužaidžia su kiekviena kita komanda, įvyksta 15 rungtynių, tai buvo paskirstyta 15 taškų. Akivaizdu, kad didžiausias taškų skaičius, kurį gali surinkti viena komanda, yra 5, o mažiausias – 0.

Tegu komandos, užėmusios 4-tą, 5-tą ir 6-tą vietą kartu surinko x taškų. Tada pagal sąlygą komandos užėmusios pirmąsias dvi vietas kartu surinko 3x taškų, todėl jeigu komanda, užėmusi trečią vietą, surinko y taškų, tai $3x + y + x = 15$, arba $4x + y = 15$. Kadangi visos galimos y reikšmės imamos iš skaičių 0, 1, 2, 3, 4, 5, tai įstatydami jas paeiliui į paskutinę lygybę, gauname, kad tik kai $y = 3$ jai tinka sveikoji reikšmė $x = 3$.

Vadinasi, komandos, užėmusios pirmąsias dvi vietas kartu surinko $3x = 3 \cdot 3 = 9$ taškus. Tai yra įmanoma tiktai tada, jeigu pirmąją vietą užėmusi komanda surenka 5, o užėmusi antrąją vietą - 4 taškus. Kitaip sakant, jeigu abi tos komandos laimi visas rungtynes su komandomis, užėmusiomis 3, 4, 5 ir 6-tą vietas. Vadinasi, komanda, užėmusi 3-ią vietas rungtynėse su komandomis, užėmusiomis pirmąsias dvi vietas surenka 0 taškų, o su trimis komandomis, užėmusiomis 4-tą, 5-tą ir 6-tą vietas surenka 3 taškus, tai yra ji laimi su visomis trimis tomis komandomis.

Atsakymas. Komanda, užėmusi 3-čią vietą, laimi prieš 5-tą vietą užėmusią komandą.

6. Aivaras per pratybas lentoje parašo visus sveikuosius skaičius nuo 1 iki 10. Jo studentai tada žaidžia tokį žaidimą. Pirmasis studentas ištrina bet kuriuos du lentoje esančius skaičius ir lentoje užrašo jų sumą sumažintą vienu vienetu. Tada kitas studentas ištrina bet kuriuos du skaičius, kurie yra tuo metu lentoje ir tada vietoje to užrašo jų sumą sumažintą vienu vienetu. Žaidimas tęsiasi tol, kol lentoje belieka vienintelis skaičius. Koks yra tas paskutinis lentoje likęs skaičius?

(A) Mažesnis kaip 11 (B) 11 (C) 46 (D) Tarp 11 ir 46 (E) Didesnis kaip 46.

Sprendimas. Po kiekvieno studento dalyvavimo lentoje liks vienu skaičiumi mažiau. Po to, kai 9 studentai sudalyvaus žaidime, lentoje liks vienintelis skaičius. Tas skaičius bus 9 mažesnis negu visų sveikų skaičių nuo 1 iki 10 suma, kadangi kiekvienas studentas atėmė po 1. Todėl lentoje liks skaičius 46.

Atsakymas. (C) arba 46.

7. Prie upės atėjo Tėvas, Motina ir du vaikai V1 ir V2. Jie nori persikelti į kitą upės pusę. Jie randa ten valtį, kuri gali paimti tik daugiausiai 2 vaikus arba vieną kurį iš tėvų. Kaip jiems persikelti (ir su kuo mažiausiai plaukimų) į kitą upės pusę?

Sprendimas. Aišku, kad visas manevravimas bus susijęs su abiem vaikais.

1 plaukimas (arba valties panaudojimas). Į kitą pusę keliasi abu vaikai.

2 plaukimas. Vienas vaikas pasilieka kitoje pusėje, o kitas vaikas grąžina valtį atgal į tą pusę, kur yra abu jo tėvai.

3 plaukimas. Motina persikelia į kitą pusę.

4 plaukimas. Vaikas iš kitos upės pusės grįžta atgal.

5 plaukimas. Iš kitos upės pusės grįžęs vaikas paėmęs kitą grįžta atgal.

6 plaukimas. Vienas vaikas pasilieka perkeltas, o kitas grįžta atgal.

7 plaukimas. Dabar jau ir tėvas persikelia į kitą upės pusę.

8 plaukimas. Kitas perkeltas vaikas grįžta atgal (kad paimtų kitą).

9 plaukimas. Abu vaikai persikelia į kitą upės pusę, kur jų jau nekantriai laukia abu tėvai.

8. Per nuotykingas atostogas penki vaikai A, B, C, D ir E sudalyvavo penkiose varžybose V, W, X, Y, Z. Kiekvienose varžybose įvertinimai 5, 4, 3, 2, 1 yra skiriami atitinkamai už užimtas 1-ą, 2-ą, 3-ą, 4-ą ir 5-ą vietas. Nėra jokių vienos vietos dalybų. Vaikas A surenka iš viso 24 taškus, vaikas C surenka tiek pat taškų per ketverias varžybas, vaikas D surenka 4 taškus per rungtynes V, o vaikas E gauna 5 taškus rungtyje W ir 3 taškus rungtyje X. Nuostabiu būdu jų bendroji taškų suma yra išsidėsčiusi abėcėlės eile ir kad čia egzistuoja lygiai 1 sprendimas. Nurodykite taškus, kuriuos kiekvienas vaikas gavo atskirose varžybose užpildydami šių varžybų lentelę.

	V	W	X	Y	Z	Bendroji suma
A						
B						
C						
D						
E						

Sprendimas. Vaikas A surenka 24 taškus, taigi jis laimi keturias varžybas ir penktose lieka antroje vietoje. Bendra visų varžybų „išžaistų“ taškų suma yra 5·(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 5 · 15 = 75, taigi B, C, D ir E pasidalina tarpusavyje 75 – 24 = 51 tašką. Vaikas E iš dviejų varžybų turi 8 taškus, todėl jis iš viso surenka mažiausiai 11 taškų. Tada B, C ir D surenka mažiausiai 14, 13 ir 12 taškų. Tačiau tada 14 + 13 + 12 + 11 = 50, iš kur mes matome, kad galutinės B, C, D ir E sumos turi būti B:15; C:13, B:12 ir E:11. Vaikas C negali būti laimėjęs jokios rungties, taigi jis negalėjo surinkti 13 taškų gaudamas 1 arba 2 taškus kiekvienoje iš 4 rungčių, taigi vaikas C gavo 4 rungtyse po 3 taškus ir vienoje rungtyje 1 tašką. Tos rungtys, kur vaikas C gavo 3 taškus yra V, W, Y ir Z, nes mes žinome, kad vaikas E gavo 3 taškus rungtyje X. Vaikas E turi iš dviejų rungčių turi 8 taškus, todėl jis uždirba po 1 tašką rungtyse V, Y ir Z. Vaikas D turi 4 taškus už rungtynes V ir iš viso 12 taškų, todėl jis gauna po 2 taškus iš kiekvienos iš rungčių W, X, Y ir Z. Mes dabar žinome kiekvieno vaiko gautus taškus atskirose rungtyse, išskyrus vaiką B, todėl mes galime padaryti išvadą, kad B gavo atitinkamai 2, 1, 4, 4, 4 taškus rungtyse V, W, X, Y ir Z, kas duoda vaikui B iš viso 15 taškų, kas jau anksčiau ir buvo pasakyta. Galutinė lentelė atrodo taip:

	V	W	X	Y	Z	Galutinė suma
A	5	4	5	5	5	24
B	2	1	4	4	4	15
C	3	3	1	3	3	13
D	4	2	2	2	2	12
E	1	5	3	1	1	11

9.Krūvelėje yra 64 degtukai. Du žaidėjai pakaitomis daro ėjimus. Vienu ėjimu iš krūvelės galima paimti bet kurį nelyginį už 16 mažesnį degtukų skaičių ir, be to, negalima kartoti jau padarytų ėjimų (tai yra jeigu kuris nors iš žaidėjų paėmė kokį nors degtukų skaičių, tai vėliau nei jis, nei jo priešininkas imti tokį patį degtukų skaičių jau nebegali). Laimi tas, kuris paima paskutinį degtuką. Kuris iš žaidėjų gali laimėti kad ir kaip bežaistų jo priešininkas: ar tas, kuris pradeda ar jo varžovas? Kaip tada reikėtų žaisti?

Sprendimas. Pagal žaidimo taisykles yra lygiai 8 leistini ėjimai, tai yra galima paimti arba 1, arba 3, arba 5, arba 7, arba 9, arba 11, arba 13, arba 15 degtukų. Pastebėkime, kad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11+ 13 = 64. Todėl, nepaisant to, kaip besiklostytų žaidimas, jis baigsis tada kai po vieną bus padaryti visi leistini ėjimai. Kadangi jų yra 8, tai paskutiniu eis antrasis varžovas. Jis ir laimės.

Atsakymas. Laimės tas, kuris eis antrasis.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. 4 komandų pogrupyje kiekviena komanda sužaidžia po vienerias rungtynes su kiekviena kita to pogrupio komanda. Už laimėtas rungtynes komanda gauna 3 taškus, už sužaistas lygiosiomis – po 1 tašką, o už pralaimėtas rungtynes taškų apskritai negauna. Laikoma, kad komanda pasirodo tragiškai, jeigu ji galutinėje rikiuotėje pagal surinktus taškus užima vieną iš dviejų paskutinių, tai yra, trečiąją arba ketvirtąją vietas. Su kiek daugiausiai taškų komanda gali pasirodyti tragiškai?

2. Tarpzoniniame šachmatų turnyre dalyvauja 5 šachmatininkai, kurie sužaidžia po vieną partiją su kiekvienu kitu varžovu, ir kuriame pusė sužaistų partijų baigėsi lygiosiomis ir kuriame už pergalę skiriamas 1 taškas, už partiją pabaigtą lygiosiomis – pusė taško, o už pralaimėtą partiją – 0 taškų. Vienas dalyvis pralaimėjo visas savo žaistas partijas. Kiek taškų surinko šachmatininkas, užėmęs turnyre priešpaskutinę vietą?

3. Vieno rato turnyre, kur kiekviena komanda sužaidžia po vienerias rungtynes su kiekviena kita komanda, kur žaidžiama be lygiųjų (pavyzdžiui, tinklinyje) ir kur už pergalę skiriami 2 taškai, o už pralaimėjimą taškų iš viso neduodama, dalyvauja 6 komandos. Ar gali ten nutikti taip, kad kurios nors trys komandos, pavyzdžiui, A, B ir C surenka 4 taškais daugiau už likusias tris komandas, pavyzdžiui, D, E ir F.

4. Klasės lentoje užrašyta išraiška *1*2*3*4*5*6*7*8. Jūratė ir Kastytis žaidžia tokį žaidimą – jie iš eilės – pradeda Jūratė – pakaitomis kiekvienas savo ėjimu pakeičia kokią nori žvaigždutę kokiu nori „+“ arba „-„ ženklu. Pradėjusi Jūratė stengiasi, kad skaičius, kuris atsiras, kai jie visas žvaigždutes pakeis pliusais arba minusais, nesidalintų iš 9, o Kastytis, atvirkščiai stengiasi, kad tas žaidimo pabaigoje atsirasiantis skaičius dalintųsi be liekanos iš 9. Kuris iš jų laimės, jeigu jie abudu žais geriausiu įmanomu būdu?

5. Tinklinio turnyre dalyvavo 8 komandos ir kiekviena komanda sužaidė po vienerias rungtynes su kiekviena kita komanda. Už pergalę kiekviena komanda gauna po 1 tašką, o už pralaimėjimą – 0 taškų (lygiųjų tinklinyje nebūna). Turnyrui pasibaigus paaiškėjo, kad trys komandos, užėmusios pirmąsias tris vietas, kartu su rinko 3 kartus daugiau taškų negu komandos užėmusios 5-tą, 6-tą, 7-tą ir 8-tą vietas kartu.

Nustatykite, kas laimėjo rungtynes tarp komandų užėmusių 4-tą ir 6-tą vietas. (Jeigu pasibaigus turnyrui kelios komandos surenka vienodą taškų skaičių, tai vietos tarp jų nustatomos burtų keliu).

6. Tenisininkas Kęstutis skaičiuoja visų savo laimėtų rungtynių procentą nuo visų sužaistų rungtynių. Prieš paskutinį turnyrą, kuriame jis laimėjo visas savo sužaistas rungtynes, tas procentas buvo 25, o po turnyro jis pasidarė lygus 75. Nustatykite, kiek kartų Kęstučio sužaistų per paskutinį turnyrą rungtynių skaičius buvo didesnis už jo visų iki to turnyro sužaistų (laimėtų ir pralaimėtų) rungtynių skaičių.

7. Penki berniukai – Andrius, Balys, Celestinas, Donatas ir Evaldas – pravedė stalo teniso turnyrą, žaisdami poromis vieni su kitais tokiu būdu, kad kiekviena pora, kokia tik galima iš jų sudaryti, prieš kiekvieną kitą galimą porą sužaidė po vieną kartą. Po turnyro paaiškėjo, kad Andrius laimėjo iš viso 10 žaidimų, o Balys – 8 žaidimus; Celestinas pralaimėjo 9 žaidimus, o Donatas – 7 (lygiųjų tenise nebūna). Kiek žaidimų laimėjo ir kiek žaidimų pralaimėjo Evaldas?

8. Dvi mokyklos žaidžia viena prieš kitą stalo teniso varžybas. Kiekvienai mokyklai atstovauja 5 mokiniai. Kiekvienas žaidimas yra dvejetų žaidimas ir kiekviena pora iš kiekvienos mokyklos turi sužaisti vieną kartą prieš kiekvieną galimą kitos mokyklos porą. Kiek žaidimų sužais kiekvienas mokinys?

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 50

9. Andrius, Balys, Celestinas ir Donatas suorganizavo šachmatų turnyrą, kuriame kiekvienas sužaidžia prieš kitą po vieną kartą. Tas, kuris laimi, gauna 3 taškus, už žaidimą pasibaigusį lygiosiomis, kiekvienam skiriama po ½ taško, o už pralaimėtą partiją taškų neduodama. Turnyrui pasibaigus Andrius turėjo 7 taškus, Balys – 4, o Celestinas su Donatu – po 3 taškus. Kuris iš teiginių yra garantuotai teisingas?

(A) Andrius laimėjo prieš Donatą; (B) Turnyre apskritai nebuvo lygiųjų; (C) Donatas laimėjo prieš Andrių; (D) Andrius su Donatu sužaidė lygiosiomis; (E) Nurodytasis taškų pasiskirstymas yra apskritai neįmanomas.

10. Žirgų lenktynėse hipodrome dalyvauja 5 žirgai A, B, C, D ir E. Kalbėdami apie jų išsidėstymo galimybes, patyrę ekspertai konstatavo, kad jie taip mažai pažįsta tuos žirgus, kad jiems bet kokios jų išsidėstymo atskirame bėgime galimybes atrodo vienodai galimos – tik su viena išimtimi – kad žirgas B neatbėgs anksčiau negu žirgas A. Kiek žirgų išsidėstymo atskirame bėgime galimybių esant šitam apribojimui esama, jeigu tarsime, kad kiekvienas žirgas bėgime užtrunka skirtingą laiką.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2025 m. sausio 25 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA