LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

1. TEKSTINIAI IR NE TIK... UŽDAVINIAI SU PARAMETRAIS

(2024–2026)

Teorinę medžiagą parengė ir pirmąją užduotį sudarė mokytojas-ekspertas
Kazimieras Pulmonas

Įprasta, kad daugiausia sprendžiame įvairiausius tekstinius uždavinius su konkrečiomis skaitinių duomenų reikšmėmis. Tačiau pasitaiko jų su parametrais. Parametrai tai paprastai raidiniai koeficientai, turintys pastovią reikšmę kiekvienu konkrečiu atveju uždavinyje. Sprendžiant, o ir išsprendus problemą ir suradus sprendinius, reikia savikritiškai įvertinti juos, tyrinėti, kritiškai mąstyti. Būtinas matematinis samprotavimas įvertinant surastų sprendinių reikšmę.

Kadangi daugeliu atvejų susiduriama ir su kvadratinių lygčių sprendimu, tenka pasitelkti sprendinių egzistavimo sąlygą ($D > 0$), Vijeto teoremą.

1 pavyzdys. Už prekių iškrovimą darbininkams sumokėta a Eur. Kadangi į darbą atėjo 3 darbininkais mažiau, tai kiekvienas atvykęs gavo 3 Eur daugiau negu buvo numatyta. Kiek darbininkų krovė prekes?

Sprendimas. Sakykime, kad krovė n darbininkų $(n \in N)$, o buvo pasamdyta $(n+3)$ darbininkai.

Kiekvienas darbininkas uždirbo $\frac{a}{n}$ Eur, o būtų uždirbę $\frac{a}{n+3}$ Eur.

Pagal sąlygą:

$$\frac{a}{n} - \frac{a}{n+3} = 3; \quad \frac{an+3a-an}{n^2+3n} = 3; \quad 3a = 3(n^2+3n).$$

Turime lygtį $n^2 + 3n - a = 0$. Kadangi $D = 3^2 - 4 \cdot (-a) = 9 + 4a > 0$, o $n_1 \cdot n_2 = -a$, tai lygtis turi du skirtingų ženklų sprendinius. Teigiamas sprendinys yra $\frac{-3+\sqrt{9+4a}}{2}$.

Ats.: Prekes krovė $\frac{-3+\sqrt{9+4a}}{2}$ darbininkų, $a = n^2 + 3n$, $n \in N$.

2 pavyzdys. Dviračiams pirkti sporto klubas paskyrė n Eur, tačiau paaiškėjo, kad kiekvienas dviratis kainuoja a Eur mažiau, todėl nupirkta b dviračių daugiau negu buvo numatyta. Kiek dviračių nupirkta?

Sprendimas. Tarkime, kad buvo planuota nupirkti x dviračių, o nupirkta $(x+b)$ dviračių.

Planuota vieno dviračio kaina $\frac{n}{x}$ Eur, o dviratis nupirktas už $\frac{n}{x+b}$ Eur.

Pagal sąlygą:

$$\frac{n}{x} - \frac{n}{x+b} = a, \quad \frac{nx+nb-nx}{x(x+b)} = a, \quad ax^2 + abx - nb = 0.$$

Kadangi $D = (ab)^2 - 4 \cdot a \cdot (-nb) = a^2b^2 + 4abn > 0$, o $x_1 \cdot x_2 = -nb < 0$, tai lygties sprendiniai (dviračių skaičius) yra skirtingų ženklų.

Todėl $x = \frac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4abn}}{2a}$. Vadinasi buvo planuota nupirkti $\frac{-ab+\sqrt{ab(ab+4n)}}{2a}$ dviračių, o nupirkta $\frac{-ab+\sqrt{ab(ab+4b)}}{2a} + b = \frac{ab+\sqrt{ab(ab+4n)}}{2a}$ dviračių.

Ats.: Nupirkta $\dfrac{ab+\sqrt{ab(ab+4n)}}{2a}$ dviračių; $a>0,\ \ b>0,\ \ n>0.$

3 pavyzdys. Atstumas tarp gyvenviečių *A* ir *B* lygus *s* km. Iš *A* į *B* tuo pačiu metu tuo pačiu keliu išvažiavo du turistai, kurie turėjo pasiekti gyvenvietę *B* tam tikru metu. Iš tikrųjų pirmas turistas atvyko į *B* *n* h anksčiau, o antras 3*n* h pavėlavo, nes kas valandą nuvažiuodavo vidutiniškai *r* km mažiau negu pirmas turistas. Nustatykite kiekvieno turisto vidutinį greitį.

Sprendimas. Tegul II turisto greitis $v\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, o I turisto greitis $(v+r)\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. Iš gyvenvietės *A* į *B* pirmas turistas judėjo $\dfrac{s}{v+r}$ h, o antras – $\dfrac{s}{v}$ h.

Pagal sąlygą:

$$\frac{s}{v}-\frac{s}{v+r}=4n,$$

$$\frac{sv+sr-sv}{v^2+rv}=4n.$$

Turime $4nv^2+4nrv-sr=0.$

$$D=(4nr)^2-4\cdot 4n\cdot(-sr)=16n^2r^2+16nsr=16nr(nr+s).$$

Kadangi $n>0,\ \ r>0,\ \ s>0,$ tai $D>0$ ir lygtis turi du sprendinius. Akivaizdu, kad jie skirtingų ženklų, nes $v_1\cdot v_2<-\dfrac{5r}{4n}.$

Todėl antro turisto vidutinis greitis

$$\frac{-4nr+\sqrt{16nr(nr+s)}}{2\cdot 4n}=\frac{\sqrt{nr(nr+s)}-nr}{2n}\ \left(\frac{\text{km}}{h}\right).$$

Pirmo turisto vidutinis greitis

$$\frac{\sqrt{nr(nr+s)}-nr}{2n}+r=\frac{\sqrt{nr(nr+s)}-nr+2nr}{2n}=\frac{\sqrt{nr(nr+s)}+nr}{2n}\left(\frac{\text{km}}{h}\right).$$

Ats.: $\dfrac{\sqrt{nr(nr+s)}-nr}{2n}\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}};\ \dfrac{\sqrt{nr(nr+s)}+nr}{2n}\,\dfrac{km}{h},\ n>0,\ \ r>0,\ \ s>0.$

4 pavyzdys. Apskritimu, kurio ilgis yra *s* metrų, tuo pačiu metu iš tos pačios vietos pajuda du kūnai. Judėdami ta pačia kryptimi jie prasilenkia kas 25 sekundes, o judėdami priešingomis kryptimis susitinka kas 5 sekundes. Koks yra kiekvieno kūno judėjimo greitis?

Sprendimas. Tarkime, kad vieno apskritimu judančio kūno greitis yra $x\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\ \ (x>0),$ o kito $y\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ $(y>0).$ Kūnams judant vienas priešais kitą jų priartėjimo greitis yra $(x+y)$ ir lygus $\dfrac{s}{5}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$, o judant ta pačia kryptimi priartėjimo (aplenkimo) greitis yra $(x-y)$ ir lygus $\dfrac{s}{25}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}},\ \ (x>y).$

Sudarome lygčių sistemą: $\begin{cases} x+y=\dfrac{s}{5}, \\ x-y=\dfrac{s}{25}. \end{cases}$

Turime $2x=\dfrac{s}{5}+\dfrac{s}{25}=\dfrac{6s}{25},\ \ x=\dfrac{3s}{25}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}},$ o $2y=\dfrac{s}{5}-\dfrac{s}{25}=\dfrac{4s}{25},\ \ y=\dfrac{2s}{25}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}.$

Ats.: $\frac{2s}{25}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\frac{3s}{25}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$,

5 pavyzdys. Nupirkta keletas kilogramų dviejų rūšių prekių: pirmos rūšies už 45 Eur ir antros rūšies už 20 Eur, be to, pirmos rūšies prekių 1 kg daugiau. 1 kg pirmos rūšies prekių kainuoja *a* Eur brangiau negu 1 kg antros rūšies prekių. Kiek kiekvienos rūšies prekių nupirkta? Raskite sprendinių skaičių, priklausomai nuo galimų *a* reikšmių.

Sprendimas. Sakykime, nupirkta *n* kg antros rūšies prekių, o pirmos rūšies $(n+1)$ kg.

Pirmos rūšies prekių kilogramo kaina yra $\frac{45}{n+1}$ Eur, o antros rūšies $\frac{20}{n}$ Eur.

Pagal sąlygą:

$$\frac{45}{n+1}-\frac{20}{n}=a \quad (a>0),$$

$$45n-20n-20=an^2+an,$$

$$an^2+(a-25)n+20=0.$$

$$D=(a-25)^2-4\cdot a\cdot 20=a^2-50a+625-80a=a^2-130a+625.$$

Reiškinio $a^2-130a+625>0$ reikšmės yra teigiamos, kai $a\in(0;5)$, o tai reiškia, kad lygtis turi du sprendinius.

Išsamiau patyrinėkime lygtį $an^2+(a-25)n+20=0$:

$$n^2+\frac{a-25}{a}n+\frac{20}{n}=0,\ a\in(0;5).$$

Kadangi $n_1\cdot n_2=\frac{20}{a}>0$, o $n_1+n_2=\frac{25-a}{a}>0$, tai abu sprendiniai yra teigiami.

Vadinasi, II rūšies prekių nupirkta $\frac{25-a\pm\sqrt{a^2-130a+625}}{2a}$ kg, o I rūšies prekių

$$\left(\frac{25-a\pm\sqrt{a^2+130a+625}}{2a}+1\right)\text{ kg}=\frac{25+a\pm\sqrt{a^2+130a+625}}{2a}\text{ kg.}$$

Kai $a=5$, tai kvadratinė lygtis $an^2+(a-25)n+20=0$ tampa $5n^2-20n+20=0$ ir $n^2-4n+4=0$, $(n-2)^2=0$, $n=2$ (lygtis turi vieną sprendinį).

II rūšies prekių nupirkta 2 kg, o I rūšies prekių $2+1+3$ (kg).

Kai $a>5$, tai $D<0$ ir kvadratinė lygtis sprendinių neturi.

Ats.: Kai $a\in(0;5)$, tai du sprendiniai: II rūšies prekių $\frac{25-a\pm\sqrt{a^2+130a+625}}{2a}$ kg, o I rūšies prekių $\frac{25+a\pm\sqrt{a^2+130a+625}}{2a}$ kg;

kai $a=5$, tai vienas sprendinys: II rūšies prekių 2 kg, o I rūšies 3 kg;

kai $a>5$, sprendinių nėra.

6 pavyzdys. Su kuria *k* reikšme lygties $x^2-2x+k=0$ sprendinių skirtumo kvadratas lygus 16?

Sprendimas. I būdas.

Lygties $x^2-2x+k=0$ sprendiniai yra $x_1=1-\sqrt{1-k}$ ir $x_2=1+\sqrt{1-k}$.

Pagal sąlygą $\left(1+\sqrt{1-k}-1+\sqrt{1-k}\right)^2=16,\ \left(2\sqrt{1-k}\right)^2=16,\ \left(\sqrt{1-k}\right)^2=4,\ 1-k=4,\ k=-3.$

II būdas.

Remiamės Vijeto teorema:

$$\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1\cdot x_2=k; \end{cases}$$

$(x_1+x_2)^2=4,$

o $(x_1-x_2)^2=x_1^2-2x_1\cdot x_2+x_2^2=(x_1^2+2x_1\cdot x_2+x_2^2)-4x_1x_2=(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2=4-4\cdot k.$

Iš sąlygos $4-4k=16,$ tuomet $k=-3.$

Ats.: $k=-3.$

7 pavyzdys. (Viena iš 1993 metų Latvijos brandos egzamino užduočių, paimta iš Algirdo Zabulionio knygelės „Matematikos brandos egzaminai“.)

Duota lygtis $(a-2)x+2ax+2a-3=0.$

a) Su kuriomis parametro *a* reikšmėmis ši lygtis turi du skirtingus sprendinius?

b) Su kuriomis parametro *a* reikšmėmis abu sprendiniai yra teigiami?

Sprendimas. a) Kvadratinė lygtis turi skirtingus sprendinius kai $a\neq 2$ ir $D>0$

$$D=(2a)^2-4\cdot(a-2)(2a-3)=4a^2-4(2a^2-4a-3a+6)=4(a^2-2a^2+7a-6)=$$
$$=4(-a^2+7a-6)=-4a^2+28a-24.$$

Sprendžiame kvadratinę nelygybę

$-4a^2+28a-24>0\,|:(-4)$

$a^2-7a+6<0.$

Kvadratinė lygtis turi du skirtingus sprendinius, kai $a\in(1;\ 2)\cup(2;\ 6).$

b) Turime duotą redukuotą kvadratinę lygtį:

$$x^2+\frac{2a}{a-2}x+\frac{2a-3}{a-2}=0.$$

Abu sprendiniai yra teigiami, kai tenkinama sąlyga:

$x_1\cdot x_2=\dfrac{2a-3}{a-2}>0,$ o $x_1+x_2=\dfrac{2a}{a-2}<0.$

Sprendžiame nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} \dfrac{2a}{a-2}<0, \\ \dfrac{2a-3}{a-2}>0; \end{cases}$$

atsižvelgę į a) užduoties reikalavimą.

$$\begin{cases} 2a>0, \\ a-2<0 \end{cases} \text{arba} \begin{cases} 2a<0, \\ a-2>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>0, \\ a<2 \end{cases} \text{arba} \begin{cases} a<0, \\ a>2; \end{cases}$$

$$1<a<2$$

$\dfrac{2a-3}{a-2}>0,$

$$\begin{cases} 2a-3>0, \\ a-2>0; \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} 2a-3<0, \\ a-2<0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>1{,}5, \\ a>2; \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} a<1{,}5, \\ a<2; \end{cases}$$

$$a>2, \qquad 1< a < 1{,}5.$$

Abu sprendiniai teigiami, kai $a \in (1;\ 1{,}5)$.

Ats.: a) Lygtis turi du skirtingus sprendinius, kai $a \in (1;\ 2) \cup (2;\ 6)$.

b) Abu lygties sprendiniai teigiami, kai $a \in (1;\ 1{,}5)$.

8 pavyzdys. Raskite lygties $a^2 + \dfrac{a-1}{x(x-2)} = \dfrac{x+2}{x-2}$ sprendinius su visomis leistinomis parametro *a* reikšmėmis.

Sprendimas. $a^2 + \frac{a^2-1}{x(x-2)} = \frac{x+2}{x-2} \quad |\cdot x(x-2) \qquad x \neq 0,\ \ x \neq 2.$

$$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 - 1 = x^2 + 2x;$$

$$a^2x^2 - x^2 - 2a^2 - 2x + a^2 - 1 = 0;$$

$$(a^2-1)x^2 - 2(a^2+1)x + a^2 - 1 = 0; \qquad a \neq \pm 1.$$

Lygties diskriminantas

$$D = (2(a^2+1))^2 - 4\cdot(a^2-1)(a^2-1) = 4(a^4+2a^2+1) - 4(a^4-2a^2+1) =$$
$$= 4(a^4+2a^2+1-a^4+2a^2-1) = 4\cdot 4a^2 = 16a^2.$$

$$x_{1;2} = \frac{2(a^2+1) \pm 4a}{2(a^2-1)} = \frac{(a^2+1) \pm 2a}{a^2-1};$$

$$x_1 = \frac{a^2-2a+1}{(a-1)(a+1)} = \frac{a-1}{a+1};$$

$$x_2 = \frac{a^2+2a+1}{(a-1)(a+1)} = \frac{a+1}{a-1}.$$

Panagrinėkime surastas *x* reikšmes:

$$\frac{a-1}{a+1} \neq 0 \ \Rightarrow\ a \neq 1; \ \ \frac{a-1}{a+1} \neq 2; \ \ a-1 \neq 2a+2 \ \Rightarrow\ a \neq -3.$$

$$\frac{a+1}{a-1} \neq 0 \ \Rightarrow\ a \neq -1; \ \ \frac{a+1}{a-1} \neq 2; \ \ a+1 \neq 2a-2 \ \Rightarrow\ a \neq 3.$$

Kai $a = \pm 1$, lygtis sprendinių neturi.

Kai $a = \pm 3$, tai $8x^2 - 10x + 8 = 0$; $4x^2 - 5x + 4 = 0$; $x = \left[\begin{array}{l} 0{,}5, \\ 2 \text{ (netinka).} \end{array}\right.$

Ats.: Kai $a \neq \pm 1$ ir $a \neq \pm 3$, tai $x = \dfrac{a+1}{a-1}$, $x = \dfrac{a-1}{a+1}$ (du sprendiniai);

kai $a = \pm 1$, lygtis sprendinių neturi;

kai $a = \pm 3$, tai $x = 0{,}5$ (vienas sprendinys).

9 pavyzdys. Kokia turi būti *a* reikšmė, kad lygties $\dfrac{x^2}{a} - x + a - 1 = 0$ sprendinių sandauga būtų mažiausia?

Sprendimas. $\frac{x^2}{a} - x + a - 1 = 0 \,|\cdot a$,

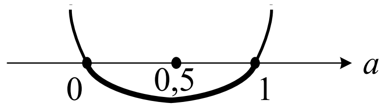
$x^2 - ax + a^2 - a = 0;$

I būdas

Pagal Vijeto teoremą $x_1 \cdot x_2 = a^2 - a.$

Kvadratinis reiškinys $a^2 - a$ įgyja nulines reikšmes, kai $a = 0$ ir $a = 1.$

Akivaizdu, kad reiškinys $a^2 - a$ įgyja mažiausią reikšmę, kai $a = 0{,}5.$



II būdas

Pasitelkę diferencialinio skaičiavimo žinias, su kuriomis susipažinsite baigiamojoje klasėje, reiškinį $a^2 - a$ galime tyrinėti taikant išvestines:

$f'(a) = (a^2 - a)' = 2a - 1;$ $2a - 1 = 0,$ $a = \frac{1}{2} = 0{,}5.$

Ats.: $a = 0{,}5.$

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Keleivinio ir prekinio traukinio greičių santykis lygus $a : b.$ Keleivinis traukinys išvyko iš stoties *A* 0,5 h vėliau negu prekinis, o atvažiavo į stotį *B* 0,5 h anksčiau. Atstumas tarp stočių *A* ir *B* lygus 5 km. Apskaičiuokite kiekvieno traukinio greitį.

2. Stačiakampės sporto aikštelės ilgis *b* m didesnis už plotį. Palei aikštelės kraštus eina vienodo pločio *a* m takas. Sporto aikštelės plotas lygus to tako plotui. Kokie yra aikštelės matmenys?

3. Trys darbininkai kartu pradeda atlikti tam tikras vienodas užduotis. *A* darbininkas užduotį atlieka *a* dienų vėliau negu *B* darbininkas ir *b* dienų vėliau negu *C* darbininkas. Dirbdami drauge, *A* ir *B* numatytą darbą atlieka per tiek pat dienų, kaip ir *C*. Per kiek laiko šią užduotį įvykdytų kiekvienas darbininkas atskirai? Kaip turi būti susiję nurodyti dydžiai, kad uždavinys turėtų sprendinį?

4. Vienas turistas nuėjo 18 km, o kitas – 32 km. Pirmasis kelyje užtruko 1 h mažiau negu antrasis ir ėjo *a* km/h mažesniu greičiu. Raskite abiejų turistų greičius. Kaip priklauso sprendinių skaičius nuo *a* reikšmių $(a > 0)$?

5. Du sportininkai bėga stadiono taku. Kiekvieno jų greitis pastovus, tačiau pirmasis stadiono ratą nubėga *a* s greičiau negu antrasis. Pradėję bėgti ta pačia kryptimi iš vienos vietos, sportininkai susilygina kas *b* s. Po kiek laiko jie susitiktų, jeigu tais pačiais greičiais ir tuo pačiu taku bėgtų priešingomis kryptimis.

6. Iš vietovės *A* upe prieš srovę išplaukė motorinė valtis, o iš vietovės *B* tuo pačiu metu pasroviui plaustas. Po *a* h jie susitiko ir toliau plaukė nesustodami. Pasiekusi vietovę *B* valtis tuoj pat grįžo ir vietovėje *A* pasivijo plaustą. Motorinės valties savasis greitis visą laiką buvo pastovus. Kiek laiko plaukė plaustas ir kiek – valtis?

7. Su kuriomis *m* reikšmėmis lygtis $x^2 - (m+1)x + m + 4 = 0$ turi du skirtingus neigiamus sprendinius?

8. Raskite sveikąją *a* reikšmę, su kuria lygties $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$ sprendinių suma lygi tų sprendinių kvadratų sumai?

Raskite lygčių sprendinius su visomis leistinomis parametro reikšmėmis:

9. $a^2(x+1)-2a(x+3)-3(x-3)=0.$

10. $\dfrac{1}{a(2+x)}+\dfrac{1}{x^2-2x}=\dfrac{2a+6}{x^3-4x}.$

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2024 m. gruodžio 23 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://www.mif.vu.lt/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA