ALYTAUS APSKRITIES XXIV KOMANDINĖ MATEMATIKOS OLIMPIADA
MOKYTOJO KAZIO KLIMAVIČIAUS TAUREI LAIMĖTI

Druskininkai, 2024 m. gruodžio 14 d.

1. Ūkininkas pirko žąsį, o po kurio laiko ją pardavė už 24 eurus. Parduodamas jis prarado tiek procentų, kiek eurų jam kainavo žąsis. Už kiek eurų ūkininkas pirko žąsį?

   Sprendimas. Sakykime, kad ūkininkas pirko žąsį už x eurų. Kadangi parduodamas jis prarado x procentų šios kainos, tai pagal sąlygą $x - x \cdot \frac{x}{100} = 24$. Iš lygties $x^2 - 100x + 2400 = 0$ randame, kad $x = 40$ arba $x = 60$. Pastebėkime, kad abu sprendiniai tinka, nes 40 procentų nuo 40 yra 16, taigi ūkininkas, pardavęs žąsį už 24 eurus, prarado 16 eurų. Lygiai taip pat 60 procentų nuo 60 yra 36, taigi ūkininkas prarado 36 eurus.

   Atsakymas: 40 eurų arba 60 eurų.

2. Vietoje žvaigždučių įrašykite skaitmenis taip, kad gautute teisingą daugybos veiksmą:

$$\begin{array}{r} 45 \\ \underline{**} \\ *0 \\ \underline{**0} \\ 2*** \end{array}$$

   Sprendimas. Daugiklio paskutinis skaitmuo turi būti lyginis. Kadangi padauginus 45 iš to lyginio skaičiaus gaunamas dviženklis skaičius, tai paskutinis daugiklio skaitmuo lygus 2, tuomet sandaugos pirmoji eilutė yra 90, o sandaugos paskutiniai skaitmenys yra 90. Daugiklio antrasis skaitmuo taip pat turi būti lyginis, be to, padauginus 45 iš to skaičiaus turime gauti skaičių, didesnį už 200, bet mažesnį už 300 – taigi tinka tik 6. Taigi teisingas veiksmas $45 \cdot 62 = 2790$.
   Atsakymas: $45 \cdot 62 = 2790$.

3. Kiekviename stačiakampės 3×4 lentelės langelyje įrašytas natūralusis skaičius taip, kad visi skaičiai skirtingi, visų eilučių skaičių sumos yra vienodos, visų stulpelių skaičių sumos yra vienodos. Kokia gali būti mažiausia visų lentelėje užrašytų skaičių suma?
   Sprendimas. Lentelėje užrašyta 12 skirtingų natūraliųjų skaičių, taigi jų suma S negali būti mažesnė nei $1 + 2 + 3 + \cdots + 12 = \frac{1+12}{2} \cdot 12 = 78$. Kadangi visose keturiose eilutėse skaičių sumos vienodos, tai S turi dalintis iš 4, o kadangi visuose trijuose stulpeliuose sumos irgi vienodos, tai S turi dalintis ir iš 3. Taigi S turi dalintis iš 12. Mažiausias skaičius, kuris dalijasi iš 12 ir yra didesnis už 78, yra 84. Kad suma S gali būti lygi 84, įrodo pavyzdys

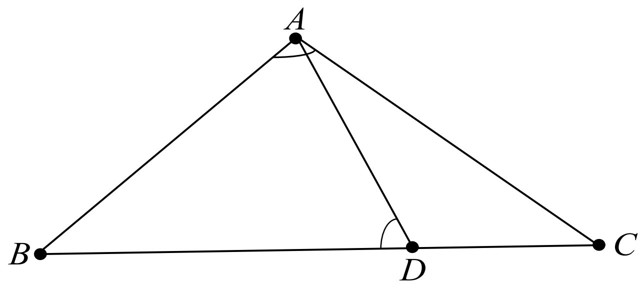
13	5	3
10	9	2
1	8	12
4	6	11

   Atsakymas: 84.

4. Su kuria a reikšme lygtys $x^3 + ax + 1 = 0$ ir $x^4 + ax^2 + 1 = 0$ turi bent po vieną tą patį sprendinį?
Sprendimas. Akivaizdu, kad $x = 0$ nėra nei vienos lygties sprendinys. Tarkime, $x = t \neq 0$ yra ir vienos, ir kitos lygties sprendinys, tuomet teisingos lygybės $t^3 + at + 1 = 0$ ir $t^4 + at^2 + 1 = 0$, taigi ir lygybės $t^3 + at = -1$ ir $t^4 + at^2 = -1$. Padalinę vieną lygybę iš kitos turime $\frac{t^4+at^2}{t^3+at} = 1$, o suprastinę gauname, kad $\frac{t^3+at}{t^2+a} = 1$, iš čia $\frac{t(t^2+a)}{t^2+a} = 1$, todėl $t = 1$ yra bendras duotųjų lygčių sprendinys. Jis gaunamas, kai $1^3 + a \cdot 1 + 1 = 0$, t. y. kai $a = -2$.
Atsakymas: $a = -2$.
5. Kiekviename languotos lentelės 11×11 langelyje padėta po šaškę. Dviese žaidžia žaidimą paeiliui darydami ėjimus, o kiekvienu ėjimu galima nuimti bet kurį skaičių greta esančių šaškių iš bet kurio stulpelio ar iš bet kurios eilutės. Laimi tas, kuris paima paskutinę šaškę. Ar gali pradėjęs žaidimą žaidėjas laimėti, nepriklausomai nuo to, kaip žais antrasis žaidėjas? Jei gali, tai paaiškinkite, kaip jis turi žaisti.
Sprendimas. Sunumeruokime eilutes ir stulpelius nuo 1 iki 11. Pirmuoju ėjimu pradedantysis žaidėjas nuima šaškę A, esančią šeštoje eilutėje ir šeštame stulpelyje. Po to į bet kurį antrojo žaidėjo ėjimą jis atsako nuimdamas tiek pat šaškių, kurios yra langeliuose, simetriškuose antrojo žaidėjo nuimtoms šaškėms taško A atžvilgiu. Taip žaidžiant, pirmasis visada galės padaryti savo eilinį ėjimą, jei ėjimą padarė antrasis. Taigi nepriklausomai nuo to, kaip žaidžia antrasis, pirmasis visada turi atsakomąjį ėjimą, taigi jis visuomet laimės.
Atsakymas: visada gali laimėti žaidimą pradėjęs žaidėjas.
6. Išspręskite lygčių sistemą
$$\begin{cases} \dfrac{xy}{3x + 2y} = \dfrac{1}{8}, \\ \dfrac{xy}{2x + 3y} = \dfrac{1}{7}. \end{cases}$$
Sprendimas. Pastebėkime, kad $x \neq 0$ ir $y \neq 0$, todėl vieną lygtį galime dalinti iš kitos. Pandalinę pirmąją lygtį iš antrosios, gauname, kad $\frac{2x+3y}{3x+2y} = \frac{7}{8}$. Iš čia $16x + 24y = 21x + 14y$, taigi $10y = 5x$, todėl $x = 2y$. Įrašę šią reikšmę į pirmąją sistemos lygtį, gauname, kad $\frac{2y^2}{6y+2y} = \frac{1}{8}$, todėl $y = \frac{1}{2}$. Tuomet $x = 1$, ir sistemos sprendinys $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.
Atsakymas: $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.
7. Yra žinoma, kad skaičius 100 turi lygiai 9 teigiamus daliklius. O koks yra didžiausias triženklis natūralusis skaičius, kurio teigiamų daliklių skaičius yra nelyginis?
Sprendimas. Kiekvieno natūraliojo skaičiaus n teigiamus daliklius galima surašyti poromis (d_1, d_2), kur $d_1 \leq d_2$ ir $d_1 d_2 = n$. Pavyzdžiui, skaičiui 100 šios poros yra $(1, 100)$, $(2, 50)$, $(4, 25)$, $(5, 20)$, $(10, 10)$. Jei n nėra tikslusis kvadratas (t. y. sveikojo skaičiaus kvadratas), tai visi porose (d_1, d_2) esantys skaičiaus n dalikliai skirtingi, o jų skaičius yra lyginis. Priešingu atveju vienoje poroje du dalikliai sutampa:$(d_1, d_2) = \left(\sqrt{n}, \sqrt{n}\right)$, o bendras teigiamų daliklių skaičius nelyginis. Vadinasi, didžiausia tinkama n reikšmė yra didžiausias triženklis tikslusis kvadratas $31^2 = 961$.
Atsakymas: 961.
8. Skaičius $a = (2^{2024} - 1)^4 - 1$ dalijasi iš 2^k. Kokia yra didžiausia galima natūralioji skaičiaus k reikšmė?

Sprendimas. Pritaikykime kvadratų skirtumo, o tada skirtumo kvadrato formulę:
$a = ((2^{2024} - 1)^2 - 1)((2^{2024} - 1)^2 + 1)$,
$a = (2^{4048} - 2 \cdot 2^{2024} + 1 - 1)(2^{4048} - 2 \cdot 2^{2024} + 1 + 1)$,
$a = (2^{4048} - 2^{2025})(2^{4048} - 2^{2025} + 2) = 2^{2026} \cdot (2^{2023} - 1)(2^{4047} - 2^{2024} + 1)$.
Kadangi dauginamieji $2^{2023} - 1$ ir $2^{4047} - 2^{2024} + 1$ yra nelyginiai, tai $a : 2^{2026}$ yra nelyginis natūralusis skaičius, o skaičius $a : 2^{2027}$ nėra sveikasis. Vadinasi, didžiausia galima natūralioji k reikšmė lygi 2026.
Atsakymas: 2026.

9. Trikampio ABC kampas A lygus 120^0, kraštinėje BC yra taškas D, kad $BD = 15$, $CD = 5$, o $\angle ADB = 60^0$. Raskite kraštinės AC ilgį.
Sprendimas. Iš to, kad $\angle ADB = 60^0$, išplaukia, kad $\angle ADC = 120^0$. Trikampių ABC ir DAC kampas C yra bendras, o $\angle BAC = \angle ADC$, todėl šie trikampiai panašieji. Iš panašumo išplaukia, kad $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$, todėl $AC^2 = BC \cdot DC = (15 + 5) \cdot 5 = 100$. Taigi $AC = 10$.
Atsakymas: 10.



10. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AC = 11$, $BC = 17$, iš viršūnės A nubrėžtas statmuo į kampo C pusiaukampinę kerta ją taške D, taškas M yra kraštinės AB vidurio taškas. Raskite atkarpos MD ilgį.
Sprendimas. Sakykime, kad tiesė AD kraštinę BC kerta taške E. Stačiųjų trikampių ACD ir CED statinis CD yra tas pats, $\angle ACD = \angle DCE$, nes AD yra kampo A pusiaukampinė. Taigi $\Delta ACD = \Delta ECD$, todėl $CE = AC = 11$, $AD = ED$. Iš $AM = MB$, $AD = ED$ išplaukia, kad atkarpa DM yra trikampio AEB vidurinė linija, todėl $MD = \frac{1}{2}EB = \frac{1}{2}(BC - CE) = \frac{1}{2}(17 - 11) = 3$.
Atsakymas: 3.