LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

III. LYGTYS IR NELYGYBĖS SU PARAMETRAIS

(2024–2026)

Teorinę medžiagą parengė ir trečiąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis

Jei sumąstytume, pavyzdžiui, ištirti, kaip išsidėsto plokštumoje parabolių

$$y = x^2 + 2x + q,\ \ q \in (-\infty; +\infty),$$

ir tiesės $y = kx,\ k > 0,$ susikirtimo taškai $(x; y),$ aišku, pirmiausia turėtume išspręsti kvadratinę lygtį

$$x^2 + 2x + q = kx \tag{1}$$

su nežinomuoju x ir dviem parametrais q ir k. Ir visai suprantama, kad tie parametrai yra tiesiog kintamieji dydžiai, kurių reikšmės yra realieji skaičiai. Bet ieškant (1) lygties sprendinių svarbu neužmiršti, kad q gali įgyti bet kurią realiąją reikmę, o k – tik teigiamą.

Na, o (1) lygtį visai nesunku išspręsti, nes ji ekvivalenti lygčiai

$$x^2 + (2-k)x + q = 0.$$

Gautume, kad

$$x = \frac{k-2 \pm \sqrt{(k-2)^2 - 4q}}{2},\ \ q \in (-\infty; +\infty),\ \ k > 0.$$

Štai čia ir turėtų prasidėti tikrasis tyrėjo darbas.

Drauge apsvarstykime tik vieną atvejį. Pasirinkę $k = 2,$ gautume, kad

$$x = \pm\sqrt{-q},$$

ir tai reikštų, jog esant $q > 0$ parabolė

$$y = x^2 + 2x + q$$

nesusikerta su tiese $y = 2x.$ Jei $q = 0,$ tai gautume vieną bendrą (parabolės ir tiesės) tašką (0; 0). O esant sąlygai $q < 0$ gautume du parabolės ir tiesės $y = 2x$ susikirtimo taškus: $(-\sqrt{-q}; -2\sqrt{-q})$ ir $(\sqrt{-q}; 2\sqrt{-q}).$

Kad pasidarytų dar suprantamiau, galėtume toje pačioje koordinačių sistemoje nubrėžti tiesę $y = 2x$ bei kelias paraboles $y = x^2 + 2x + q$ ir atidžiai įsižiūrėti į gautą vaizdą.

Kiti pavyzdžiai

1 pavyzdys. Raskime visas parametro $a,\ a > 0,$ reikšmes, kurioms esant parabolės $y = (x-2)^2$ ir $y = ax^2$ susikerta dviejuose taškuose.

Sprendimas. Aišku, kad susikirtimo taškuose $(x; y)$ turi galioti lygybė

$$(x-2)^2 = ax^2,\ \ a > 0.$$

Ją nagrinėkime taip:

$(x-2)^2 = ax^2 \Rightarrow (x-2)^2 - ax^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - (\sqrt{a}\cdot x)^2 = 0 \Rightarrow (x - 2 - \sqrt{a}\cdot x)(x - 2 + \sqrt{a}\cdot x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow ((1-\sqrt{a})x - 2)((1+\sqrt{a})x - 2) = 0 \Rightarrow (1-\sqrt{a})x = 2$ arba $(1+\sqrt{a})x = 2.$

Lygtis $(1-\sqrt{a})x = 2$ neturi sprendinių, jei $a = 1,$ o esant sąlygai $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ ji turi vieną sprendinį $x = \dfrac{2}{1-\sqrt{a}} = \dfrac{2(1+\sqrt{a})}{1-a}.$

Lygtis $(1+\sqrt{a})x = 2$ turi vieną sprendinį $x = \dfrac{2}{1+\sqrt{a}}.$

Taigi abi parabolės susikerta viename taške, jei $a = 1;$ šio taško koordinatės (1; 1).

Jei $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty),$ abi parabolės susikerta dviejuose taškuose; jų abscisės yra atitinkamai

$$x=\frac{2}{1-\sqrt{a}} \quad \text{ir} \quad x=\frac{2}{1+\sqrt{a}}.$$

Ats.: $a\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.

2 pavyzdys. Raskime nelygybės

$$x^3+2(a+1)x^2+(a^2-4)x+2<0 \tag{2}$$

sprendinių aibę, jei $x=-a$ yra lygties $x^3+2(a+1)x^2+(a^2-4)x+2=0$ sprendinys.

Sprendimas. Įrašykime $x=-a$ į lygtį ir raskime parametro a reikšmes, kurioms esant $x=-a$ yra lygties sprendinys:

$$(-a)^3+2(a+1)(-a)^2+(a^2-4)(-a)+2=0\Rightarrow -a^3+2a^3+2a^2-a^3+4a+2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2+4a+2=0\Rightarrow 2(a+1)^2=0\Rightarrow a=-1.$$

Vadinasi, $x=1$ yra lygties

$$x^3-3x+2=0$$

sprendinys, o sprendžiama nelygybė yra

$$x^3-3x+2<0. \tag{3}$$

Ieškodami šios nelygybės sprendinių aibės, pabandykime daugianarį x^3-3x+2 išskaidyti dvinarių sandauga:

$$x^3-3x+2=(x^3-x)-(2x-2)=x(x^2-1)-2(x-1)=(x-1)(x(x+1)-2)=$$

$$=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)((x^2-1)+(x-1))=(x-1)^2(x+1+1)=(x-1)^2(x+2).$$

Vadinasi, (3) nelygybė yra ekvivalenti nelygybei

$$(x-1)^2(x+2)<0.$$

O ji galioja tik kai $x+2<0,$ taigi tik kai $x<-2$.

Belieka padaryti išvadą, kad (2) nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $(-\infty;-2)$.

Ats.: $(-\infty;-2)$.

3 pavyzdys. Raskime visas realiųjų skaičių p ir q poras $(p;q)$, kurioms esant kvadratinės lygties $x^2+px+q=0$ sprendiniai yra p ir q; $p\neq q$.

Sprendimas. Pagal Vijeto teoremą,

$$p+q=-p \quad \text{ir} \quad p\cdot q=q.$$

Iš čia gauname:

$$\begin{cases} q=-2p, \\ q(p-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=-2p, \\ -2p(p-1)=0 \end{cases} \Rightarrow p=0 \text{ ir } q=0 \text{ arba } p=1 \text{ ir } q=-2.$$

Kadangi (pagal sąlygą) $p\neq q$, tai $p=1$, $q=-2$.

Gauname tik vieną parametrų p ir q porą $(1;-2)$, kuri tenkina uždavinio sąlygą.

Ats.: $(1;-2)$.

4 pavyzdys. Raskime parametro p reikšmes, kurioms esant kvadratinės lygties

$$x^2+(2p-1)x+p^2=0$$

abu sprendiniai yra didesni už 1.

Sprendimas. Kad lygtis turėtų du sprendinius, jos diskriminantas

$$D=(2p-1)^2-4p^2=1-4p$$

turi būti teigiamas skaičius. Todėl $p<\frac{1}{4}$.

Tegu x_1 ir x_2 yra lygties sprendiniai. Pagal Vijeto teoremą,

$$x_1 + x_2 = 1 - 2p \quad \text{ir} \quad x_1 \cdot x_2 = p^2.$$

Pagal sąlygą, $x_1 > 1$ ir $x_2 > 1$. Todėl

$$x_1 + x_2 > 2 \text{ ir } x_1 \cdot x_2 > 1 \Rightarrow 1 - 2p > 2 \text{ ir } p^2 > 1 \Rightarrow p < -\frac{1}{2} \text{ ir } |p| > 1 \Rightarrow p < -1.$$

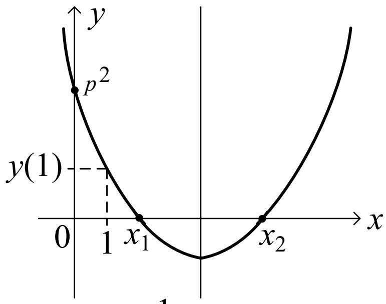
Pagal atliktą analizę galima padaryti (bent jau tarpinę!) išvadą, kad turi būti $p < -1$.

Vis dėlto neskubėkime su galutine išvada, nes iš nelygybių $x_1 + x_2 > 2$ ir $x_1 \cdot x_2 > 1$ nebūtinai išplaukia, kad $x_1 > 1$ ir $x_2 > 1$.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad parabolės

$$y = x^2 + (2p-1)x + p^2$$

šakos kyla į viršų (žr.1 pav.). Todėl (esant sąlygai $x_1 > 1$ ir $x_2 > 1$) turi būti $y(1) > 0$; čia $y(1)$ yra kvadratinio trinario reikšmė, kai $x = 1$.



1 pav.

Iš nelygybės $y(1) > 0$ gauname:

$$1 + (2p-1)\cdot 1 + p^2 > 0 \Rightarrow 2p + p^2 > 0 \Rightarrow p(2+p) > 0 \Rightarrow p < -2 \text{ arba } p > 0.$$

Sugretinę su nelygybe $p < -1$, gauname galutinį atsakymą: $p < -2$.

Ats.: $p < -2$.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Raskite visas parametro *a* reikšmes, kurioms esant vienas kvadratinės lygties

$$(a-1)x^2 - 4ax + 4(a+1) = 0, \quad a \neq 1,$$

sprendinys yra neigiamas, o kitas – didesnis už 1.

2. Raskite mažiausią kvadratinio trinario $P(x) = x^2 + bx + c$ reikšmę, jei kvadratinės lygties $x^2 + bx + c = 0$ sprendinių skirtumas lygus 7.

3. Nustatykite, kuriai parametro *a* reikšmei esant kvadratinio trinario

$$x^2 + ax - 1 - a$$

šaknų (kvadratinės lygties $x^2 + ax - 1 - a = 0$ sprendinių) kvadratų suma yra pati mažiausia.

Pastaba. Kai diskriminantas lygus nuliui, kvadratinis trinaris turi dvi lygias šaknis, o kvadratinė lygtis – vieną sprendinį.

4. Raskite visas sveikąsias parametro *m* reikšmes, kurioms esant abu kvadratinės lygties

$$x^2 + 5mx + 84 = 0$$

sprendiniai yra sveikieji skaičiai.

5. Raskite parametrų *p* ir *q* reikšmių poras (*p*; *q*), $p + q = 16$, kurioms esant abu kvadratinės lygties

$$x^2 + px + q = 0$$

sprendiniai yra sveikieji skaičiai.

6. Raskite visas parametro *a* reikšmes, kurioms esant lygtys

$$x^2 + y^2 = a \quad \text{ir} \quad x - y = a$$

turi tik vieną bendrą sprendinį (realiųjų skaičių porą (*x*; *y*), kuri tenkina ir pirmą, ir antrą lygtį).

7. Nustatykite, kokioms parametro *a* reikšmėms esant nelygybės

$$(a - x^2)(a + x - 2) < 0$$

sprendinių nėra nei intervale $(-\infty; -1)$, nei intervale $(1; +\infty)$.

8. Nustatykite, kokioms parametro a reikšmėms esant nelygybės

$$ax^2 + (a-1)x + a - 1 < 0, \quad a \neq 0, \tag{1}$$

sprendinių aibė yra intervalas $(-\infty; +\infty)$.

9. Nustatykite, kokioms parametro a reikšmėms esant nelygybė $y \geq x^2 + a$ turi vienintelį sprendinį $(x; y)$, jei $x \geq y^2 + a$.

10. Raskite parametrų m ir n reikšmes, kurioms esant $x = 2$ ir $x = 3$ yra lygties $2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0$ sprendiniai. Taip pat raskite trečią šios lygties sprendinį.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2025 m. balandžio 4 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA