AŠTUNTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO

MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilnius, 2025 m. kovo 8 d.

Uždavinių sąlygos

IX klasė

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 1-\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}, \\ 1+\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{6}{\sqrt{y}}. \end{cases}$$

2. Trikampio ABC kraštinėse AB ir BC atitinkamai pažymėti tokie taškai D ir E, kad

$$AD : DB = BE : EC = 2 : 1, \quad \angle ACB = 2\angle BED.$$

Įrodykite, kad trikampis ABC lygiašonis.

3. Kiekvienas iš 1000 natūraliųjų skaičių 1, 2, 3, ..., 1000 nudažytas viena iš n spalvų. Bet kurie du skirtingi skaičiai a ir b, kur a dalijasi iš b, nudažyti skirtingomis spalvomis. Raskite mažiausią galimą natūraliąją n reikšmę.

4. Sveikiesiems skaičiams $x_1, x_2, \dots, x_{13}$ yra teisinga lygybė

$$a = (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{13}) = (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{13}).$$

Įrodykite, kad $ax_1x_2\dots x_{13} = 0$.

AŠTUNTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO

MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilnius, 2025 m. kovo 8 d.

Uždavinių sąlygos

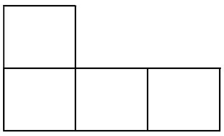
X klasė

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{12}{y + 3x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}, \\ 1 + \dfrac{12}{y + 3x} = \dfrac{6}{\sqrt{y}}. \end{cases}$$

2. Keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis. Apskritimas, kurio skersmuo yra atkarpa AC, kerta tiesę BD taškuose P ir Q. Iš taško C tiesei AC iškeltas statmuo atitinkamai kerta tieses AB ir AD taškuose X ir Y. Įrodykite, kad taškai P, Q, X, Y yra viename apskritime.

3. Tokiomis keturių vienetinių langelių figūromis, kaip parodyta paveikslėlyje, reikia padengti $n \times n$ lentelę be tarpų ir išsikišimų. Figūros gali persidengti, jas galima sukti ir apversti, bet jų kraštinės turi sutapti su lentelės langelių kraštinėmis, o kiekvieną lentelės langelį turi dengti tiek pat figūrų. Raskite visus natūraliuosius $n \geq 3$, kuriems tai įmanoma atlikti.



4. Sveikiesiems skaičiams $x_1, x_2, \dots, x_{13}$ yra teisinga lygybė

$$a = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_{13}) = (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_{13}).$$

Įrodykite, kad $ax_1x_2 \dots x_{13} = 0$.

AŠTUNTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO

MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilnius, 2025 m. kovo 8 d.

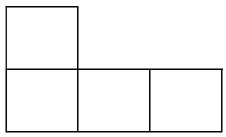
Uždavinių sąlygos

XI - XII klasės

1. Teigiami realieji skaičiai $a,\ b,\ c$ tenkina sąlygą $a+b+c=1$. Įrodykite nelygybę
$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ac+2b^2+2b}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}.$$

2. Į apskritimą įbrėžtas toks penkiakampis $ABCDE$, kad lankai $ABC,\ BCD$ ir CDE yra lygūs. Tiesė l, einanti per tašką C, kerta atkarpas AD ir BE atitinkamai taškuose P ir Q. Taškas P yra atkarpoje CQ. Įrodykite, kad $\angle PAQ=\angle PEQ$.

3. Tokiomis keturių vienetinių langelių figūromis, kaip parodyta paveikslėlyje, reikia padengti $n\times n$ lentelę be tarpų ir išsikišimų. Figūros gali persidengti, jas galima sukti ir apversti, bet jų kraštinės turi sutapti su lentelės langelių kraštinėmis, o kiekvieną lentelės langelį turi dengti tiek pat figūrų. Raskite visus natūraliuosius $n\geq 3$, kuriems tai įmanoma atlikti.



4. Raskite visus natūraliųjų skaičių penketus (a,b,c,m,n) penketus, kuriems
$$5a+b=c^m,$$
$$5b+a=c^{m+n}.$$