AŠTUNTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO

MATEMATIKOS OLIMPIADA

Vilnius, 2025 m. kovo 8 d.

Sąlygos ir sprendimai

IX klasė

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{12}{y+3x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}, \\ 1 + \dfrac{12}{y+3x} = \dfrac{6}{\sqrt{y}}. \end{cases}$$

Sprendimas. Tarę, kad $x > 0$, $y > 0$, $y + 3x \neq 0$, pertvarkome sistemą. Imame lygčių sumą ir skirtumą, padalytus iš 2:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 1, \qquad \frac{3}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{12}{y+3x}.$$

Sudauginame gautąsias lygtis:

$$\frac{9}{y} - \frac{1}{x} = \frac{12}{y+3x}, \qquad \text{t.y.} \quad y^2 + 6xy - 27x^2 = 0.$$

Iš čia gauname, kad $y = 3x$ arba $y = -9x$. Antroji reikšmė netinka, nes abu kintamieji turi būti teigiami. Kai $y = 3x$, iš pradinių lygčių sumos gauname

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{3}\right) = 1, \qquad x = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}, \qquad \text{todėl } y = 12 + 6\sqrt{x}.$$

Patikriname, kad gautoji skaičių pora (x, y) tenkina pradinę sistemą.

Atsakymas: $\left(4 + 2\sqrt{3},\ 12 + 6\sqrt{3}\right)$.

2. Trikampio ABC kraštinėse AB ir BC atitinkamai pažymėti tokie taškai D ir E, kad

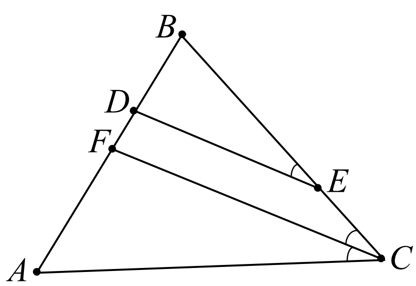
$$AD : DB = BE : EC = 2 : 1, \quad \angle ACB = 2\angle BED.$$

Įrodykite, kad trikampis ABC lygiašonis.

Įrodymas. Nubrėžkime kampo C pusiaukampinę CF (žr. pav.). Ji yra lygiagreti su tiese DE. Todėl pagal Talio teoremą

$$\frac{BF}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{3}{2} \quad \text{ir tada} \quad \frac{BF}{BA} = \frac{BF}{BD} \cdot \frac{BD}{BA} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Tai reiškia, kad taškas F yra atkarpos AB vidurys. Trikampis ABC lygiašonis ($AC = BC$), nes atkarpa CF yra ir jo pusiaukampinė, ir pusiaukraštinė.



3. Kiekvienas iš 1000 natūraliųjų skaičių 1, 2, 3, ..., 1000 nudažytas viena iš n spalvų. Bet kurie du skirtingi skaičiai a ir b, kur a dalijasi iš b, nudažyti skirtingomis spalvomis. Raskite mažiausią galimą natūraliąją n reikšmę.

Sprendimas. Bet kurie du iš 10 skaičių $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, ... , $512 = 2^9$ dalijasi vienas iš kito, todėl visi šie skaičiai turi būti nuspalvinti skirtingomis spalvomis. Taigi mažiau nei 10 spalvų neužteks. Parodysime, kad dešimčia spalvų galima nuspalvinti skaičius taip, kad būtų išpildytos uždavinio sąlyga. Suskirstykime skaičius į 10 aibių: {1}, {2, 3}, {4, 5, 6, 7}, {8, 9, ..., 15}, ..., {256, 257, ..., 511}, {512, 513, ..., 1000} ir visus kiekvienos aibės skaičius nudažykime ta pačia spalva. Taip panaudojamos 10 spalvų, o uždavinio sąlyga galioja. Iš tiesų, jei imsime du skirtingus skaičius a ir b iš tos pačios aibės, $a > b$, tai kažkuriam natūraliajam m turime

$2^{m-1} \leq b < a < 2^m$, $\qquad 1 < a{:}b < 2^m{:}2^{m-1} = 2$, $\qquad a$ nesidalija iš b.

Atsakymas: $n = 10$.

4. Sveikiesiems skaičiams $x_1, x_2, \dots, x_{13}$ yra teisinga lygybė

$$a = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_{13}) = (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_{13}).$$

Įrodykite, kad $ax_1x_2 \dots x_{13} = 0$.

Įrodymas. Jei kuris nors iš skaičių x_i yra nulis, tai lygybė $ax_1x_2 \dots x_{13} = 0$ akivaizdžiai teisinga. Jei bent vienas iš skaičių x_i yra lygus 1 arba -1, tuomet $a = 0$, todėl įrodomoji lygybė irgi yra teisinga. Jei nei vienas iš skaičių x_i nelygus 0 arba ± 1, tai $|x_i| \geq 2$ visiems $i = 1, 2, \dots, 13$. Tuomet $(1 + x_i)(1 - x_i) = (1 - x_i^2) < 0$. Gauname, kad sveikojo skaičiaus kvadratas

$$a^2 = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_{13})(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_{13}) = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2) \dots (1 - x_{13}^2)$$

yra neigiamas skaičius kaip trylikos neigiamų skaičių sandauga. Taip negali būti. Prieštara įrodo, kad sąlyga $x_i = \pm 1$ arba 0 su kuriuo nors i, o tada $ax_1x_2 \dots x_{13} = 0$.

X klasė

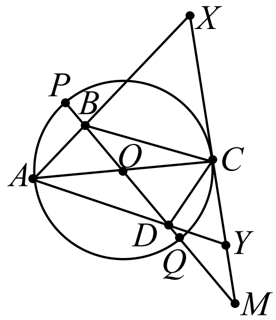
1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{12}{y + 3x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}, \\ 1 + \dfrac{12}{y + 3x} = \dfrac{6}{\sqrt{y}}. \end{cases}$$

Sprendimas. Žr. IX klasės 1 uždavinio sprendimą.

2. Keturkampis $ABCD$ yra lygiagretainis. Apskritimas, kurio skersmuo yra atkarpa AC, kerta tiesę BD taškuose P ir Q. Iš taško C tiesei AC iškeltas statmuo atitinkamai kerta tieses AB ir AD taškuose X ir Y. Įrodykite, kad taškai P, Q, X, Y yra viename apskritime.

Sprendimas. Kai tiesės BD ir XY yra lygiagrečios, uždavinio tvirtinimas akivaizdus: iš $XY \perp AC$ ir $BD \parallel XY$ išplaukia, kad $AC \perp BD$, lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės yra statmenos, jis yra rombas, tiesė AC yra $\angle BAD$ simetrijos ašis ir dėl simetrijos tiesės AC atžvilgiu keturkampis $XYQP$ yra lygiašonė trapecija, apie kurią yra apibrėžiamas apskritimas.

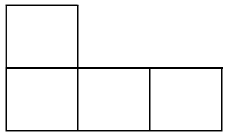


Tarkime, kad tiesės BD ir XY kertasi taške M. Tada

$\dfrac{MB}{MD} = \dfrac{MC}{MY}$, $\qquad \dfrac{MB}{MD} = \dfrac{MX}{MC}$ (Talio teorema) ir $\quad MC^2 = MX \cdot MY$.

Be to, $MC^2 = MP \cdot MQ$ (tiesė MC yra apskritimo liestinė, o atkarpa MP – jo kirstinė). Iš čia išplaukia, kad $MX \cdot MY = MP \cdot MQ$, o taškai P, Q, Y, X yra viename apskritime.

3. Tokiomis keturių vienetinių langelių figūromis, kaip parodyta paveikslėlyje, reikia padengti $n \times n$ lentelę be tarpų ir išsikišimų. Figūros gali persidengti, jas galima sukti ir apversti, bet jų kraštinės turi sutapti su lentelės langelių kraštinėmis, o kiekvieną lentelės langelį turi dengti tiek pat figūrų. Raskite visus natūraliuosius $n \geq 3$, kuriems tai įmanoma atlikti.



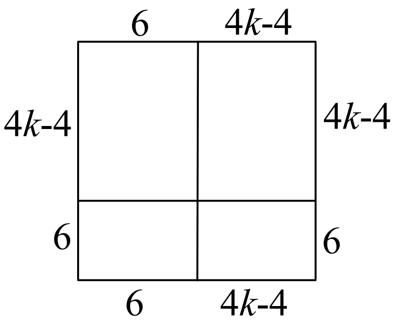
Sprendimas. Nuspalvinkime $n \times n$ lentelę kaip šachmatų lentą. Duotoji figūra, kaip ją beuždėtume, dengia du juodus ir du baltus langelius. Todėl tinkamu būdu dengiant lentelę figūromis, jų langelių, dengiančių baltus ir juodus lentelės langelius, bus po tiek pat. Todėl tinkamo denginio negausime, kai n nelyginis: tada baltų ir juodų langelių skaičiai skiriasi vienetu, o kiekvieną iš jų turi dengti po tiek pat figūrų langelių.

Jei n dalijasi iš 4, tai lentelę suskaidome į 4×2 stačiakampius, o tokį stačiakampį lengvai padengiame nurodytomis figūromis vienu sluoksniu, taigi bet kuriuo skaičiumi sluoksnių. Šiuo atveju kvadratas padengiamas vienu figūrų sluoksniu.

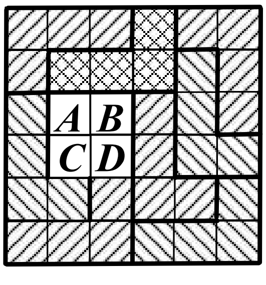
Jei lyginis n nesidalija iš 4, t. y. $n = 4k + 2$, čia k – natūralusis skaičius, tai suskaidome kvadratą į tokias dalis: vieną 6×6, dvi $6 \times (4k - 4)$ ir vieną $(4k - 4) \times (4k - 4)$ (žr. 1 pav.). Tiek $(4k - 4) \times (4k - 4)$ kvadratas, tiek abu $6 \times (4k - 4)$ stačiakampiai suskaidomi į 4×2 stačiakampius, taigi jie padengiami figūromis bet kiek sluoksnių.

Parodysime, kad 6×6 kvadratą galima dviem sluoksniais padengti figūromis. Tuo tikslu padengiame taip, kaip parodyta 2 pav., palikdami nepadengtus langelius A, B, C, D, o po to padengiame 3 pav. parodytu būdu, palikdami nepadengtus langelius E, F, G, H. Galiausiai dviem figūromis padengiame langelius A, B, C, D, E, F, G, H. Taip 6×6 kvadratas ir $(4k + 2) \times (4k + 2)$ lentelė gali būti padengti dviem figūrų sluoksniais.

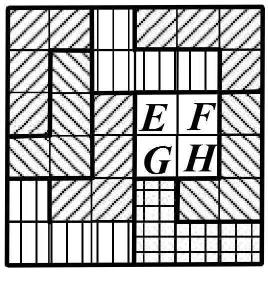
Atsakymas: $n -$ lyginis skaičius, didesnis už 2.



1 pav.



2 pav.



3 pav.

4. Sveikiesiems skaičiams $x_1, x_2, \dots, x_{13}$ yra teisinga lygybė

$$a = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_{13}) = (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_{13}).$$

Įrodykite, kad $a x_1 x_2 \dots x_{13} = 0$.

Įrodymas. Žr. IX klasės 4 uždavinio sprendimą.

XI - XII klasės

1. Teigiami realieji skaičiai $a,\ b,\ c$ tenkina sąlygą $a + b + c = 1$. Įrodykite nelygybę

$$\frac{1}{ab + 2c^2 + 2c} + \frac{1}{bc + 2a^2 + 2a} + \frac{1}{ac + 2b^2 + 2b} \geq \frac{1}{ab + bc + ca}.$$

Sprendimas. Taikydami nelygybę $a^2 + b^2 \geq 2ab$, gauname, kad

$$\begin{aligned}(ab + bc + ca)^2 &= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2bc + 2b^2ca + 2c^2ab = \\ &= a^2b^2 + (a^2 + b^2)c^2 + 2abc(a + b + c) \geq a^2b^2 + 2abc^2 + 2abc = \\ &= ab(ab + 2c^2 + 2c).\end{aligned}$$

Tada $(ab + bc + ca)^2 \geq ab(ab + 2c^2 + 2c)$ ir

$$\frac{1}{ab + 2c^2 + 2c} \geq \frac{ab}{(ab + bc + ca)^2}.$$

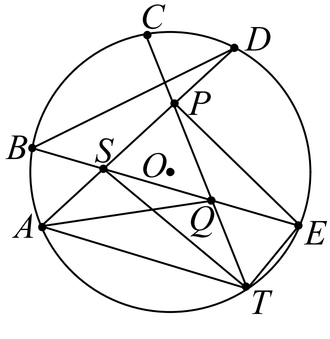
Analogiškai įrodomos nelygybės

$$\frac{1}{bc + 2a^2 + 2a} \geq \frac{bc}{(bc + ca + ab)^2}, \qquad \frac{1}{ca + 2b^2 + 2b} \geq \frac{ca}{(ca + ab + bc)^2}.$$

Sudėję šias nelygybes gauname tai, ką reikėjo įrodyti.

2. Į apskritimą įbrėžtas toks penkiakampis $ABCDE$, kad lankai $ABC,\ BCD$ ir CDE yra lygūs. Tiesė l, einanti per tašką C, kerta atkarpas AD ir BE atitinkamai taškuose P ir Q. Taškas P yra atkarpoje CQ. Įrodykite, kad $\angle PAQ = \angle PEQ$.

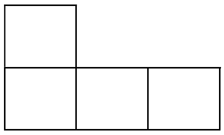
Sprendimas. Sakykime, kad tiesė PQ kerta apskritimą taške $T \neq C$, o tiesės AD ir BE susikerta taške S. Iš uždavinio sąlygoje duotų lankų lygybių lankai AB ir CD yra lygūs, analogiškai lankai BC ir DE irgi lygūs. Jei O – apskritimo centras, tai pažymėkime $\angle AOB = \angle COD = \alpha,\ \angle BOC = \angle DOE = \beta$. Tuomet



$$\angle ATQ = \angle ATC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{\alpha + \beta}{2}, \qquad \angle PTE = \angle CTE =$$
$$= \frac{1}{2}\angle COE = \frac{\alpha + \beta}{2}, \qquad \angle PSQ = \angle DBE + \angle BDA = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

(kampas PSQ tarp stygų AD ir BE). Iš sąlygos $\angle ATQ = \angle PSQ = 180° - \angle ASQ$ išplaukia, kad taškai S, A, T, Q yra viename apskritime, o iš $\angle PTE = \angle PSQ$ – kad taškai P, S, T, E yra viename apskritime. Iš čia $\angle PAQ = \angle SAQ = \angle STQ = \angle STP = \angle SEP = \angle QEP,$ ką ir reikėjo įrodyti.

3. Tokiomis keturių vienetinių langelių figūromis, kaip parodyta paveikslėlyje, reikia padengti $n \times n$ lentelę be tarpų ir išsikišimų. Figūros gali persidengti, jas galima sukti ir apversti, bet jų kraštinės turi sutapti su lentelės langelių kraštinėmis, o kiekvieną lentelės langelį turi dengti tiek pat figūrų. Raskite visus natūraliuosius $n \geq 3$, kuriems tai įmanoma atlikti.



Sprendimas. Žr. X klasės 3 uždavinio sprendimą.

4. Raskite visus natūraliųjų skaičių penketus (a, b, c, m, n), kuriems

$$5a + b = c^m,$$
$$5b + a = c^{m+n}.$$

Sprendimas. Pirmąją lygtį padauginę iš 5 ir iš jos atėmę antrąją, gauname lygybę

$$24a = c^m(5 - c^n).$$

Kadangi $24a$ yra natūralusis skaičius, tai $5 - c^n > 0$. Taigi $c = 1$, 2, 3 arba 4. Pastaraisiais dviem atvejais $n = 1$. Tada $24a = 3^m \cdot 2$ arba $24a = 4^m$. Gauname prieštarą: $3^m \cdot 2$ nesidalija iš 8, o 4^m – iš 3. Netinka ir reikšmė $c = 1$, kuriai gauname lygtį $24a = 4$, neturinčią sveikųjų sprendinių.

Kai $c = 2$, tai arba $n = 1$, arba $n = 2$. Pastaruoju atveju $24a = 2^m$ (prieštara, nes 2^m iš 3 nesidalija). Jei $n = 1$, turime $24a = 2^m \cdot 3$. Tada $2^m = 2^3 a$ ir

$$m \geq 3, \qquad a = 2^{m-3}, \qquad b = c^m - 5a = 2^m - 5 \cdot 2^{m-3} = 2^{m-3}(2^3 - 5) = 3 \cdot 2^{m-3}.$$

Nesunkiai patikriname, kad su visais natūraliaisiais $m \geq 3$ gautasis penketas $(a, b, c, m, n) =$ $= (2^{m-3}, 3 \cdot 2^{m-3}, 2, m, 1)$ tenkina uždavinio sąlygą.

Atsakymas: $(a, b, c, m, n) = (2^{m-3}, 3 \cdot 2^{m-3}, 2, m, 1)$, kai $m \geq 3$.