

Jaunajam
matematikui
26

2023–2025 metų
Lietuvos jaunųjų matematikų mokyklos
užduotys ir jų sprendimai

Užduotys

- A. Apynis, E. Mazėtis.** STOJAMOJI UŽDUOTIS (2, 65–67 psl.)
- I. K. Pulmonas.** GEOMETRINIO TURINIO TEKSTINIAI UŽDAVINIAI (3–8, 68–71 psl.)
- II. A. Apynis.** EKSTREMUMAI (9–16, 72–75 psl.)
- III. E. Mazėtis.** GEOMETRINIAI VEKTORIŲ TAIKYMAI (17–24, 76–80 psl.)
- IV. A. Apynis.** TIESINĖS LYGTYS IR DETERMINANTAI (25–36, 81–86 psl.)
- V. A. Apynis.** RODIKLINĖS LYGTYS IR NELYGYBĖS (37–43, 87–90 psl.)
- VI. E. Mazėtis.** KOORDINAČIŲ METODAS PLOKŠTUMOJE (44–49, 91–94 psl.)
- VII. R. Kašuba.** ŽAIDIMAI IR TURNYRAI (50–56, 95–99 psl.)
- VIII. A. Novikas.** SVEIKŲJŲ SKAIČIŲ LAIPSNIAI (57–63, 100–102 psl.)
- A. Apynis, E. Mazėtis.** BAIGIAMOJI UŽDUOTIS (64, 103 psl.)

STOJAMOJI UŽDUOTIS

1. Apskaičiuokite parabolės $y = 3x^2 + 6x$ ir tiesės $y = 6 - x$ susikirtimo taškų koordinates.
2. Raskite du natūraliuosius skaičius, vienas iš kurių būtų 5 kartus didesnis už kitą, o jų sandauga dalytųsi iš 498.
3. Išspręskite nelygybę

$$\frac{9}{(x+1)^2} \geq 1.$$

4. Raskite visus triženklus natūraliuosius skaičius, tenkinančius šias sąlygas:
 - a) pirmas skaitmuo tris kartus mažesnis už trečią skaitmenį;
 - b) šio skaičiaus suma su skaičiumi, gautu sukeitus antrą skaitmenį su trečiu, dalijasi iš 8.
5. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^3y - y^3x = 6. \end{cases}$$

6. Apskaičiuokite $x^4 + \frac{1}{x^4}$, jei $x + \frac{1}{x} = 4$.
7. Kiek yra natūraliųjų skaičių porų (m, n) , kurioms $1 \leq m < n \leq 100$, o sandauga mn dalijasi iš 7?
8. Inde buvo 20% koncentracijos druskos rūgšties tirpalo. Iš pradžių iš jo nupylė 1 litrą tirpalo ir įpylė 1 litrą vandens. Paskui vėl nupylė 1 litrą tirpalo ir įpylė 1 litrą vandens. Taip susidarė 5% koncentracijos druskos rūgšties tirpalas. Apskaičiuokite, kiek litrų tirpalo buvo inde.
9. Trikampio ABC kraštinių santykis $AC : CB : BA = 3 : 4 : 5$. Įbrėžtas į šį trikampį apskritimas kraštines AC , CB ir AB liečia atitinkamai taškuose K , L ir M . Raskite santykius $AK : KC$, $CL : LB$ ir $BM : MA$.
10. Lygiašonio trikampio ABC , $AB = BC$, aukštinės $BM = 5$, $AN = 8$. Raskite trikampio kraštinių AB ir AC ilgius.

I. GEOMETRINIO TURINIO TEKSTINIAI UŽDAVINIAI

Teorinę medžiagą parengė ir pirmąją užduotį sudarė mokytojas ekspertas Kazimieras Pulmonas

Yra įvairių tekstinių uždavinių tipų. Tai ir tiesiaegio judėjimo, ir vidutinio greičio, ir judėjimo ratu bei eskalatoriumi, plaukimo upe, darbo ir dalių, procentų uždaviniai. O kur dar laiko ir kalendoriaus, svėrimų bei pilstymų, žmogaus amžiaus ir kur kas gyvena nustatymų problemos. Apžvelkime geometrinio turinio kai kuriuos uždavinius ir jų sprendimą.

1 pavyzdys. Lygiašonio trikampio pagrindas yra 3 dm ilgesnis už šoninę kraštinę, o trikampio perimetras lygus 48 dm. Apskaičiuokite šio trikampio plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad lygiašonio trikampio šoninė kraštinė lygi x dm, $x > 0$. Tada pagrindo ilgis yra $(x + 3)$ dm.

Pagal sąlygą:

$$x + x + (x + 3) = 48, \quad 3x = 45, \quad x = 15.$$

Vadinasi, $AC = BC = 15$ dm, o $AB = 18$ dm.

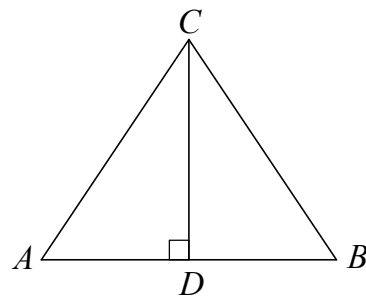
Nubrėžiame $CD \perp AB$, tai $AD = DB = 9$ (dm). Trikampis ACD yra statusis ir pagal Pitagoro teoremą:

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144, \quad CD = 12 \text{ dm (nes } CD > 0 \text{)}.$$

Trikampio ABC plotas lygus

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 12 = 108 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

Ats.: 108 dm^2 .



2 pavyzdys. Iš vienos vietovės tiksliai šiaurės ir vakarų kryptimis pastoviais vidutiniais greičiais išbėgo du bėgikai. Po 12 sekundžių tarp jų buvo 60 metrų. Raskite bėgikų greičius, jeigu žinoma, kad vieno jų greitis yra 25 % mažesnis už kito.

Sprendimas. Sakykime, kad greičiau bėgančiojo greitis yra x m/s, $x > 0$, tai lėčiau – $0,75x$ m/s. Per 12 s vienas nubėgo $12x$ m, o kitas – $0,75x \cdot 12 = 9x$ metrų.

Pagal sąlygą bėgikų kryptys yra statmenos, tai pagal Pitagoro teoremą:

$$(12x)^2 + (9x)^2 = 60^2, \quad \sqrt{144x^2 + 81x^2} = 60, \quad \sqrt{225x^2} = 60, \quad 15x = 60, \quad x = 4 \text{ m/s}.$$

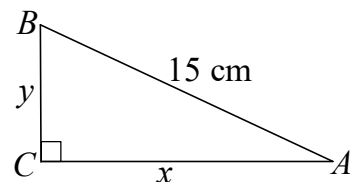
Taigi vieno greitis yra 4 m/s, o kito $4 \cdot 0,75 = 3$ (m/s).

Ats.: 3 m/s, 4 m/s.

3 pavyzdys. Stačiojo trikampio plotas lygus 54 cm^2 , o įžambinės ilgis yra 15 cm. Apskaičiuokite trikampio perimetrą.

Sprendimas. Sakykime, kad stačiojo trikampio statinių ilgiai yra x cm ir y cm ($x > 0$, $y > 0$). Pagal sąlygą:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 15^2, \\ \frac{1}{2}xy = 54. \end{cases}$$



Šią sistemą galima spręsti įvairiai.

I būdas

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 225, \\ y = \frac{108}{x}, \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{108}{x}\right)^2 = 225, \quad x^2 + \frac{11664}{x^2} = 225 \mid \cdot x^2 \ (x \neq 0), \quad x^4 - 225x^2 + 11664.$$

Tegul $x^2 = t$, tai turime lygtį $t^2 - 225t + 11664 = 0$ ir $t_1 = 81$, $t_2 = 144$.

Kai $t = 81$, tai $x^2 = 81$ ir $x = 9$, o $y = \frac{108}{9} = 12$; o kai $t = 144$, tai $x^2 = 144$ ir $x = 12$, o $y = \frac{108}{12} = 9$.

Vadinasi, trikampio statinių ilgiai yra 9 cm ir 12 cm, o trikampio perimetras $P = 9 + 12 + 15 = 36$ (cm).

II būdas

Sistemos antrą lygtį padauginę iš 4 ir abi lygtis panariui sudėję turime:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 225 + 54 \cdot 4, \quad (x + y)^2 = 441, \quad x + y = 21 \text{ (nes } x + y > 0 \text{)}.$$

Vadinasi, trikampio perimetras $P = (x + y) + 15 = 21 + 15 = 36$ (cm).

Šį uždavinį galima spręsti ir kitaip, panaudodami stataus trikampio geometrinius vidurkius. Panagrinėkime juos.

Kadangi trikampiai BCD ir ACD yra statieji ($CD \perp AB$) ir jų kraštinės yra atitinkamai statmenos ($BC \perp AC$), tai trikampiai yra panašieji. Todėl

$$\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD, \quad \text{t. y.}$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot BD}.$$

Analogiškai $\triangle ACD$ ir $\triangle ABC$ yra panašieji. Todėl

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD, \quad \text{t. y. } AC = \sqrt{AB \cdot AD}.$$

Darome išvadą ir apibendriname:

- Stačiajame trikampyje aukštinė, nubrėžta į įžambinę yra geometrinis vidurkis įžambinės atkarpų, į kurias statmens pagrindas dalina įžambinę.
- Kiekvienas statinis yra geometrinis vidurkis visos įžambinės ir to statinio projekcijos įžambinėje.

III būdas

Tegul $AB = c$, $CD = h_c$, $x = AC$ ir $BC = a$.

Kadangi $S = 54 \text{ cm}^2$, o $c = 15$, tai $\frac{1}{2}c \cdot h_c = 54$ ir $h_c = \frac{108}{15} = 7,2$ (cm).

Pasinaudoję geometriniiais vidurkiais stačiajame trikampyje turime:

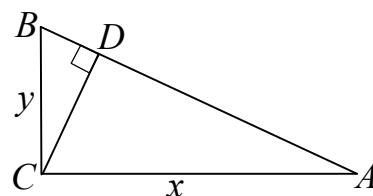
$$CD = \sqrt{BD \cdot DA} = \sqrt{BD \cdot (15 - BD)} \Rightarrow 7,2 = \sqrt{BD \cdot (15 - BD)}, \quad 51,84 = 15BD - BD^2.$$

Taigi $BD^2 - 15BD + 51,84 = 0$ ir $BD = 5,4$ cm arba $9,6$ cm. Pagal uždavinio prasmę (brėžinį) turime $BD = 5,4$ cm ir $AD = 9,6$ cm.

Kadangi $x = \sqrt{AB \cdot AD} = \sqrt{15 \cdot 9,6} = \sqrt{144} = 12$ (cm), o $y = \sqrt{AB \cdot BD} = \sqrt{15 \cdot 5,4} = \sqrt{81} = 9$ (cm), tai $P = 12 + 9 + 15 = 36$ (cm).

Ats.: $P = 36$ cm.

Panaudodami 3 pavyzdžio sąlygos ir sprendimo duomenis galime sukonstruoti įvairius naujus teiginius ar užduotis. Pavyzdžiui, trikampio ABC kraštinių BC , AC ir AB santykiai yra



$BC : AC : AB = 9 : 12 : 15 = 3 : 4 : 5$, o $BD : AD = 5,4 : 9,6 = 54 : 96 = 9 : 16$. Trikampio BCD plotas sudaro trikampio ACD ploto $\frac{9}{16} \cdot 100\% = 0,5625 \cdot 100\% = 56,25\%$ ir taip toliau.

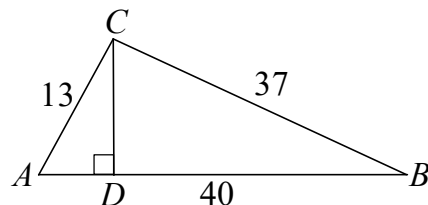
4 pavyzdys. Trikampio kraštinės lygios 13, 37 ir 40 ilgio vienetų. Apskaičiuosime šio trikampio plotą.

Skaičiuodami trikampio plotą, paprastumo dėlei, trikampio pagrindu pasirinkime ilgiausiąją kraštinę $AB = 40$.

Sprendimas.

I būdas

Tegul $AC = 13$, $BC = 37$. Nubrėžiame $CD \perp AB$. Pagal Pitagoro teoremą turime: $CD^2 = AC^2 - AD^2$ ir $CD^2 = BC^2 - (AB - AD)^2$. Todėl $CD^2 = 13^2 - AD^2$ ir $CD^2 = 37^2 - (40 - AD)^2$. Vadinasi,



$$1369 - 1600 + 80AD - AD^2 = 169 - AD^2, \quad 80AD = 400 \quad \text{ir} \quad AD = 5. \quad \text{Todėl}$$

$$CD^2 = 169 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \quad \text{ir} \quad CD = 12.$$

$$\text{Trikampio plotas lygus } \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 12 = 240.$$

Apibendrinkime šio uždavinio sprendimą. Bendruoju atveju išveskime Herono formulę (Heronas Aleksandrietis, gyvenęs 1–2 a. Aleksandrijoje, senovės graikų matematikas, mechanikas ir išradėjas).

Tegul $CD \perp AB$, $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$, $CD = h$, $AD = x$, $DB = c - x$, o $P = a + b + c$ ir $p = \frac{1}{2}P$.

$$\text{Kadangi } h^2 = b^2 - x^2 \quad \text{ir} \quad h^2 = a^2 - (c - x)^2, \quad \text{tai turime } b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2 \quad \text{ir}$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2, \quad 2cx = -a^2 + b^2 + c^2. \quad \text{Iš čia } x = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}. \quad \text{Todėl}$$

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \right)^2 = \left(b - \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \right) \cdot \left(b + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \right) = \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2c} \cdot \frac{2bc - a^2 + b^2 + c^2}{2c} = \\ &= \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2c} \cdot \frac{(b^2 + 2bc + c^2) - a^2}{2c} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2c} \cdot \frac{(b + c)^2 - a^2}{2c} = \\ &= \frac{(a - (b - c)) \cdot (a + (b - c))}{2c} \cdot \frac{((b + c) - a) \cdot ((b + c) + a)}{2c} = \\ &= \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2c} \cdot \frac{(b + c - a)(b + c + a)}{2c} = \frac{(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{4c^2} = \\ &= \frac{(a + b + c)(a + b + c - 2a)(a + b + c - 2b)(a + b + c - 2c)}{4c^2} = \frac{2p(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)}{4c^2} = \\ &= \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{c^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vadinasi, } h = \frac{2\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{c}.$$

$$\text{Todėl } S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{2 \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

II būdas

Trikampio perimetras $P = 13 + 37 + 40 = 90$, o pusė perimetro 45. Pagal Herono formulę turime, kad trikampio plotas

$$S = \sqrt{45 \cdot (45 - 13)(45 - 37)(45 - 40)} = \sqrt{45 \cdot 32 \cdot 8 \cdot 5} = \sqrt{9 \cdot 5 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot 5} = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 240.$$

Ats.: 240 pl.vnt.

5 pavyzdys. Bukojo trikampio dvi kraštinės lygios 5 cm ir 7 cm, o plotas lygus $10\sqrt{3}$ cm². Raskite trečiosios kraštinės ilgį.

Sprendimas. Sakysime, kad trečiosios kraštinės ilgis yra c . Remdamiesi trikampio nelygybe, kad trikampio bet kuri kraštinė yra ilgesnė už kitų dviejų kraštinių ilgių skirtumą, bet trumpesnė už jų sumą, darome išvadą, kad $2 \text{ cm} < c < 12 \text{ cm}$.

Trikampio perimetras $P = 5 + 7 + c = 12 + c$, o pusė perimetro $p = 6 + \frac{c}{2}$. Pagal Herono formulę:

$$\sqrt{\left(6 + \frac{c}{2}\right)\left(6 + \frac{c}{2} - 5\right)\left(6 + \frac{c}{2} - 7\right)\left(6 + \frac{c}{2} - c\right)} = 10\sqrt{3}, \quad \sqrt{\left(6 + \frac{c}{2}\right)\left(1 + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2} - 1\right)\left(6 - \frac{c}{2}\right)} = 10\sqrt{3},$$

$$\left(6 - \frac{c}{2}\right)\left(6 + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2} - 1\right)\left(\frac{c}{2} + 1\right) = 300,$$

$$\left(36 - \frac{c^2}{4}\right)\left(\frac{c^2}{4} - 1\right) = 300, \quad \frac{144 - c^2}{4} \cdot \frac{c^2 - 4}{4} = 300 \mid \cdot 16, \quad (144 - c^2)(c^2 - 4) = 4800,$$

$$c^4 - 148c^2 + 5376 = 0. \quad c^2 = 74 \pm 10.$$

Kadangi $c^2 = 64$ arba $c^2 = 84$, tai $c = 8 \text{ cm}$ arba $c = 2\sqrt{21} \text{ cm}$. Pagal sąlygą trikampis yra bukas, todėl jo trečiosios kraštinės ilgis $2\sqrt{21} \text{ cm}$.

Ats.: $2\sqrt{21} \text{ cm}$.

Kai trikampio ilgiausios kraštinės kvadratas yra lygus kitų dviejų kraštinių ilgių kvadratų sumai, tai pagal teoremą, atvirkštinę Pitagoro teoremą, toks trikampis yra statusis.

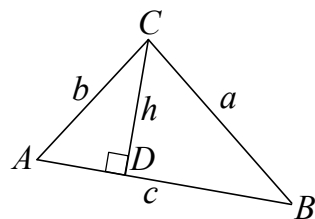
Jei trikampio ilgiausios kraštinės kvadratas yra mažesnis už kitų dviejų kraštinių sumą, tai trikampis yra smailiakampis, o jei didesnis – bukas. Tai išplaukia iš kosinusų teoremos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Kadangi prieš tai spręstame uždavinyje $8^2 = 64$, o $5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$, tai trikampis smailusis, o jei kraštinių ilgiai 5 cm, 7 cm ir $2\sqrt{21} \text{ cm}$, tai $(2\sqrt{21})^2 = 84 > 5^2 + 7^2 = 74$ ir trikampis bukas.

Yra ir trigonometrinė trikampio ploto apskaičiavimo formulė. Jeigu žinomos dvi trikampio kraštinės b ir c , o kampas tarp jų yra A , tai iš stataus trikampio ACD : $\frac{h}{b} = \sin A$ ir $h = b \sin A$. Turime:

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h = \frac{1}{2} c \cdot b \sin A. \quad \text{Analogiškai,} \quad S = \frac{1}{2} a \cdot b \sin C,$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot c \sin B.$$



6 pavyzdys. Trikampio kraštinių ilgiai $a=13$, $b=14$, $c=15$ ilgio vienetų. Apskaičiuokite šio trikampio didžiausio kampo sinusą ir ilgiausios aukštinės ilgį.

Trikampio didžiausias kampas yra prieš ilgiausią kraštinę c , t. y. kampą C . Kadangi $P=13+14+15=42$, o $p=21$, tai $S=\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}=84$. Vadinasi, $S=\frac{1}{2}a \cdot b \sin C$, todėl

$$84=\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 \sin C, \text{ o } \sin C=\frac{84}{13 \cdot 7}=\frac{12}{13}.$$

Ilgiausia trikampio aukštinė yra nubrėžta į trumpiausią kraštinę a . Taigi, $\frac{1}{2}a \cdot h_a=84$,

$$h_a=\frac{2 \cdot 84}{13}=\frac{168}{13}=12\frac{12}{13}.$$

$$\text{Ats.: } \sin C=\frac{12}{13}, \quad h_a=12\frac{12}{13}.$$

7 pavyzdys. Yra stačiakampio formos sklypas. Jo ploto (m^2) skaičius yra trimis didesnis už perimetro (m) skaičių. Raskite sklypo matmenis, jei žinoma, kad jie yra sveikieji metrų skaičiai.

Sprendimas. Sakykime, kad sklypo matmenys yra x ir y ($x \in N$, $y \in N$). Pagal sąlygą:

$$xy=2(x+y)+3, \quad xy=2x+2y+3, \quad xy-2y=2x+3, \quad (x-2)y=2x+3, \quad y=\frac{2x+3}{x-2}.$$

Išskirkime gautos trupmenos sveikąją dalį:

$$y=\frac{2x+3}{x-2}=\frac{2x-4+7}{x-2}=\frac{2(x-2)}{x-2}+\frac{7}{x-2}=2+\frac{7}{x-2}.$$

Akivaizdu, kad y bus sveikasis skaičius, kai $x=3$ arba $x=9$. Jei $x=3$, tai $y=2+\frac{7}{3-2}=2+7=9$;

jei $x=9$, tai $y=2+\frac{7}{9-2}=2+1=3$. Vadinasi, stačiakampio kraštinės yra 3 m ir 9 m.

Ats.: 3 m $\times$ 9 m.

Panagrinėkime n -kampio viršūnės įstrižainių skaičių.

Iš kiekvieno

4-kampio kampo viršūnės išeina $4-3=1$ įstrižainė,

5-kampio kampo viršūnės išeina $5-3=2$ įstrižainės,

6-kampio kampo viršūnės išeina $6-3=3$ įstrižainės,

.....

n -kampio kampo viršūnės išeina $(n-3)$ įstrižainių.

Vadinasi, skirtingų įstrižainių n -kampyje yra 2 kartus mažiau, t. y. $\frac{1}{2}n \cdot (n-3)$.

Nesunku pastebėti, kad per vieną kampo viršūnę nubrėžta įstrižainė:

4-kampį padalija į $(4-3)+1=2$ trikampius,

5-kampį padalija į $(5-3)+1=3$ trikampius,

6-kampį padalija į $(6-3)+1=4$ trikampius,

7-kampį padalija į $(7-3)+1=5$ trikampius,

.....

n -kampį padalija į $(n-3)+1=n-2$ (trikampių).

Pavyzdžiui, 18-kampis turi $\frac{1}{2} \cdot 18(18-3) = 9 \cdot 15 = 135$ skirtingas įstrižaines, o per vieną viršūnę nubrėtos įstrižainės šį daugiakampį padalija į $18-2 = 16$ (trikampių). Nesunku įsitikinti, kad iš viso 170 įstrižainių turi 20-kampis.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Lygiašonio trikampio aukštinė, nubrėžta į pagrindą lygi 12 cm, o tas pagrindas yra trumpesnis už aukštinę 16,(6)%. Apskaičiuokite šio trikampio plotą ir perimetrą.
2. Stačiojo trikampio įžambinė yra 10 m, o statinių ilgių suma lygi 14 m. Raskite šio trikampio plotą.
3. Dviem stačiojo kampo kraštinėmis juda kūnai A ir B . Tam tikru momentu kūnas A , kurio greitis 6 m/s, nuo stataus kampo viršūnės buvo nutolęs per 78 m, o kūnas B , kurio greitis 8 m/s, – 104 m. Per kiek laiko nuo to momento atstumas tarp kūnų buvo 70 m?
4. Trikampio ABC kraštinėse AB ir BC pažymėti atitinkamai taškai K ir L taip, kad $AK : KB = 2 : 1$, o $BL : LC = 3 : 2$. Kiek procentų trikampio BKL plotas sudaro keturkampio $AKLC$ ploto?
5. Trikampio ABC kraštinių ilgiai yra atitinkamai 18, 20 ir 34 ilgio vienetai. Nustatykite trikampio rūšį kampų atžvilgiu ir apskaičiuokite didžiausio kampo sinusą bei aukštinės, nubrėžtos į trumpiausią kraštinę, ilgį.
6. Trikampio plotas lygus $6\sqrt{3}$ cm², o dviejų kraštinių ilgiai yra 3 cm ir 7 cm. Raskite trečiosios kraštinės ilgį.
7. Trikampio kraštinių ilgių santykiai 17:10:9, o plotas lygus 144 cm². Raskite trikampio perimetrą.
8. Stačiakampio formos kambario grindų ploto (m²) skaičius yra vienetu mažesnis už šio kambario grindų perimetro (m) skaičių. Raskite kambario grindų matmenis metrais, jei žinoma, kad jie yra sveikieji metrų skaičiai.
9. Iš stačiakampio dviejų priešingų viršūnių nubrėžti statmenys įstrižainei dalija ją į tris lygias dalis. Raskite stačiakampio ilgesniosios kraštinės ilgį, jei trumpesnioji yra a ($a > 0$).
10. Taisyklingasis daugiakampis iš viso turi 90 įstrižainių. Kam lygus šio daugiakampio vieno kampo dydis?

II. EKSTREMUMAI

Teorinę medžiagą parengė ir antrąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis

Pagal nusistovėjusią tradiciją ekstremumų (funkcijos maksimumo bei minimumo) paieškos uždaviniai mokyklinėje matematikoje nagrinėjami ir sprendžiami tik susipažinus su išvestine (išvestine funkcija) ir jos savybėmis.

Šioje jauniems matematikams skirtoje temoje funkcijos ekstremumams rasti pirmiausia ieškosime galimybės apsiriboti jau žinomais teiginiais bei žemesnėse klasėse įgytais įgūdžiais. Gana išsamiai susipažinsime tik su neneigiamų skaičių aritmetinį vidurkį $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ ir jų geometrinį vidurkį $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ siejančia nelygybe $A_n \geq G_n$; taip pat išnagrinėsime jos taikymo uždavinių.

1 pavyzdys. Taikant nelygybę $a^2 \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$, visai nesunku rasti dviejų kintamųjų funkcijos $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $x > 0$, $y > 0$, mažiausią reikšmę. Kadangi

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right)^2 + 2 \geq 2,$$

jei $x > 0$ ir $y > 0$,

ir $\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = 0$, kai $x = y > 0$, tai 2 yra mažiausia funkcijos reikšmė aibėje $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$.

2 pavyzdys. Taikydami nelygybę $a^2 \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$, raskime funkcijos

$$f(x, y) = (x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right), \quad x > 0, \quad y > 0,$$

mažiausią reikšmę.

Sprendimas. Iš pradžių abi sumas sudauginkime, o tada gautą reiškinį tvarkykime panašiai kaip pirmame pavyzdyje. Gausime:

$$f(x, y) = (x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 = 2 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) = 2 + \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right)^2 + 2 \geq 4.$$

Reikšmę $f(x, y) = 4$ funkcija įgyja taškuose (x, y) , $y = x$, $x > 0$.

Taigi 4 yra mažiausia šios funkcijos reikšmė aibėje $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$.

3 pavyzdys. Įrodykite, kad trijų kintamųjų funkcijos

$$f(x, y, z) = (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

mažiausia reikšmė aibėje $\{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$ yra 9.

Įrodymas. Tegu $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Tada

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \left(1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{y}{x} + 1 + \frac{y}{z} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{z}{y} + 1 \right) = \\ &= 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9, \end{aligned}$$

nes $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$ ir $\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 2$, jei $x > 0$, $y > 0$ ir $z > 0$, o sumų reikšmės, lygios 2, įgyjamos esant sąlygoms (atitinkamai): $x = y$, $y = z$ ir $z = x$; taigi kai $x = y = z > 0$.

Vadinasi, 9 tikrai yra funkcijos $f(x, y, z)$ mažiausia reikšmė aibėje $\{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

Kartais labai praverčia gebėjimas kvadratinę trinari $x^2 + px + q$ užrašyti pavidalu

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Tada (jei $a \neq 0$)

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

4 pavyzdys. Raskime vieno kintamojo funkcijos $f(x) = \frac{5 + 2x - x^2}{2x - x^2 - 3}$ mažiausią reikšmę.

Sprendimas. Iš pradžių išsiaiškinkime funkcijos apibrėžimo sritį, nes turi galioti nelygybė $2x - x^2 - 3 \neq 0$. Kadangi

$$2x - x^2 - 3 = -(x^2 - 2x + 3) = -((x-1)^2 + 2) \leq -2$$

esant bet kuriam realiajam skaičiui x , tai $f(x)$ apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje – intervale $(-\infty; +\infty)$.

Ieškodami funkcijos $f(x)$ mažiausios reikšmės, trupmeną $\frac{5 + 2x - x^2}{2x - x^2 - 3}$ pertvarkykime taip:

$$\begin{aligned} \frac{5 + 2x - x^2}{2x - x^2 - 3} &= \frac{-(x^2 - 2x - 5)}{-(x^2 - 2x + 3)} = \frac{(x^2 - 2x + 1) - 6}{(x^2 - 2x + 1) + 2} = \frac{(x-1)^2 - 6}{(x-1)^2 + 2} = \frac{((x-1)^2 + 2) - 8}{(x-1)^2 + 2} = \\ &= \frac{(x-1)^2 + 2}{(x-1)^2 + 2} - \frac{8}{(x-1)^2 + 2} = 1 - \frac{8}{(x-1)^2 + 2}. \end{aligned}$$

Kadangi $\frac{8}{(x-1)^2 + 2} \leq 4$, kai $x \in (-\infty; +\infty)$, tai $f(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^2 + 2} \geq 1 - 4 = -3$, kai $x \in (-\infty; +\infty)$.

Vadinasi, mažiausia $f(x)$ reikšmė intervale $(-\infty; +\infty)$ yra -3 ; ji įgyjama taške $x = 1$.

Ats.: $\min f(x) = f(1) = -3$.

5 pavyzdys. Raskime funkcijos

$$f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 5}{x^4 + 2x^2 + 1}, \quad x \in (-\infty; +\infty),$$

mažiausią reikšmę.

Sprendimas. Trupmeną, nusakančią funkciją $f(x)$, pertvarkykime taip:

$$\begin{aligned} \frac{x^4 + x^2 + 5}{x^4 + 2x^2 + 1} &= \frac{(x^4 + 2x^2 + 1) - (x^2 - 4)}{x^4 + 2x^2 + 1} = 1 - \frac{x^2 - 4}{x^4 + 2x^2 + 1} = 1 - \frac{x^2 - 4}{(x^2 + 1)^2} = 1 - \frac{(x^2 + 1) - 5}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= 1 - \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{5}{(x^2 + 1)^2} = 1 - \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{5}{(x^2 + 1)^2} = 5\left(\frac{1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{2}{10(x^2 + 1)} + \frac{1}{100}\right) + 1 - \frac{1}{20} = \\ &= 5\left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{19}{20}. \end{aligned}$$

Dabar jau lengva suprasti, kad mažiausia trupmenos $\frac{x^4 + x^2 + 5}{x^4 + 2x^2 + 1}$ reikšmė intervale $(-\infty; +\infty)$ yra $\frac{19}{20}$ ir ji įgyjama, kai $x^2 + 1 = 10$; taigi taške $x = -3$ ir taške $x = 3$.

$$\text{Ats.: } \min f(x) = f(-3) = f(3) = \frac{19}{20}.$$

6 pavyzdys. Apskaičiuokime, kokie turi būti sandėlio (stačiakampio gretasienio) pagrindo matmenys, kad esant 4 metrų sienų aukščiui ir 32 metrų pagrindo perimetrai, jo tūris būtų didžiausias.

Sprendimas. Tegu x yra vienos pagrindo kraštinės ilgis. Tada $16 - x$ yra kitos pagrindo kraštinės ilgis, o sandėlio tūris (žym. $V(x)$) yra

$$V(x) = 4x(16 - x) = 4(16x - x^2) = 4(64 - (64 - 16x + x^2)) = 4(64 - (x - 8)^2).$$

Aišku, kad $V(x) \leq 4 \cdot 64 = 256 \text{ (m}^3\text{)}$, o didžiausia $V(x)$ reikšmė yra 256 m^3 , kai $x = 8 \text{ m}$.

Taigi sandėlio pagrindas turi būti kvadratas, kurio kraštinės ilgis 8 metrai.

Ats.: Kvadratas, kurio kraštinės ilgis 8 metrai.

Dabar pereikime prie realiųjų skaičių $a_1, a_2, \dots, a_n$ aritmetinio vidurkio

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

ir jų geometrinio vidurkio

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

sąryšio

$$A_n \geq G_n, \text{ jei } a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0, \quad (1)$$

teisingumo pagrindimo bei šio sąryšio taikymo ieškant funkcijos maksimumo bei minimumo.

Aišku, kad $A_2 \geq G_2$, nes

$$A_2 - G_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2}{2} = \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} \geq 0, \text{ jei } a_1 \geq 0 \text{ ir } a_2 \geq 0.$$

Iš karto atkreipkime dėmesį ir į tai, kad lygybė $A_2 = G_2$ įmanoma tik kai $a_1 = a_2 \geq 0$.

Visai panašiai galima įrodyti, kad $A_4 \geq G_4$:

$$\begin{aligned} A_4 - G_4 &= \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} - \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} - \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \geq \\ &\geq \sqrt{\frac{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2}}{2}} - \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4}} - \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} = \\ &= \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} - \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} = 0. \end{aligned}$$

Žinoma, čia taikėme jau įrodytą nelygybę $A_2 \geq G_2$. O lygybė $A_4 = G_4$ galioja taip pat vieninteliu atveju – kai $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 \geq 0$.

Analogiškai galima įrodyti nelygybes $A_8 \geq G_8$, $A_{16} \geq G_{16}$ ir kt. (kai $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$).

Nelygybę $A_3 \geq G_3$ įrodykime remdamiesi nelygybe $A_4 \geq G_4$:

$$A_3 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 \cdot \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}} = \sqrt[4]{G_3^3 \cdot A_3};$$

$$A_3 \geq \sqrt[4]{G_3^3 \cdot A_3} \Rightarrow A_3^4 \geq G_3^3 \cdot A_3 \Rightarrow A_3^4 - G_3^3 \cdot A_3 \geq 0 \Rightarrow A_3 (A_3^3 - G_3^3) \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow A_3 (A_3 - G_3) (A_3^2 + A_3 G_3 + G_3^2) \geq 0 \Rightarrow A_3 - G_3 \geq 0.$$

Vadinasi, $A_3 \geq G_3$, jei $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$ ir $a_3 \geq 0$.

O lygybė $A_3 = G_3$ galima tik kai

$$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3},$$

taigi tik kai $a_1 = a_2 = a_3 \geq 0$.

Galbūt jau aiškėja, kad nelygybės $A_5 \geq G_5$, $A_6 \geq G_6$ ir $A_7 \geq G_7$ galima įrodyti taikant nelygybę $A_8 \geq G_8$, nes

$$A_5 = \frac{8A_5}{8} = \frac{5A_5 + 3A_5}{8} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + A_5 + A_5 + A_5}{8}, \\ A_6 = \frac{6A_6 + 2A_6}{8} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + A_6 + A_6}{8}, \\ A_7 = \frac{7A_7 + A_7}{8} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + A_7}{8}.$$

Gautume, kad

$$A_5 \geq \sqrt[8]{G_5^5 \cdot A_5^3}, \quad A_6 \geq \sqrt[8]{G_6^6 \cdot A_6^2} \quad \text{ir} \quad A_7 \geq \sqrt[8]{G_7^7 \cdot A_7},$$

o iš nelygybių

$$A_5^8 \geq G_5^5 \cdot A_5^3, \quad A_6^8 \geq G_6^6 \cdot A_6^2 \quad \text{ir} \quad A_7^8 \geq G_7^7 \cdot A_7$$

išplauktų, jog

$$A_5^3 (A_5^5 - G_5^5) \geq 0 \Rightarrow A_5^5 \geq G_5^5 \Rightarrow A_5 \geq G_5;$$

$$A_6^2 (A_6^6 - G_6^6) \geq 0 \Rightarrow A_6^6 \geq G_6^6 \Rightarrow A_6 \geq G_6;$$

$$A_7 (A_7^7 - G_7^7) \geq 0 \Rightarrow A_7^7 \geq G_7^7 \Rightarrow A_7 \geq G_7.$$

O tada ateitų nelygybių

$$A_{16} \geq G_{16}, \quad A_{32} \geq G_{32}, \quad A_{64} \geq G_{64}, \dots$$

taikymo eilė.

Vis dėlto ne čia būtų (1) nelygybės įrodymo pabaiga – apibendrinančiam teiginiui:

Nelygybė $A_n \geq G_n$; $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, galioja esant bet kuriam natūraliajam skaičiui n .

įrodyti reikėtų palypėti ant kitos natūraliųjų skaičių teorijos pakopos, kuri vadinama **matematinės indukcijos aksioma**.

Štai čia šį kartą ir sustokime. O smalsesniam jaunajam matematikui patartume susirasti Juozo Šinkūno knygą „Ekstremumai be išvestinių“ (Leidykla TEV, Vilnius, 2008) ir ne šiaip pasklaidyti, o su pieštuku rankoje atidžiai pastudijuoti.

7 pavyzdys. Įrodykite, kad 100 yra mažiausia sandaugos

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{10}} \right)$$

reikšmė, jei $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, 10$.

Sprendimas. Taikykime nelygybę $A_{10} \geq G_{10}$:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{10}} \right) &= 100 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{10}}{10} \cdot \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{10}}}{10} \geq \\ &\geq 100 \cdot \sqrt[10]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10}} \cdot \sqrt[10]{\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10}}} = 100. \end{aligned}$$

Kad galėtume pasakyti, jog 100 tikrai yra mažiausia sandaugos reikšmė, turime įsitikinti, kad yra toks skaičių $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ rinkinys, kuriam galioja sąlyga:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{10} \text{ ir } \frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \dots = \frac{1}{a_{10}}.$$

Aišku, kad tinka rinkiniai $(a, a, \dots, a)$, $a > 0$.

Vadinasi, 100 tikrai yra mažiausia sandaugos $(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{10}} \right)$ reikšmė,

jei $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, 10$.

8 pavyzdys. Raskime funkcijos

$$f(x, y, z) = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0,$$

mažiausią reikšmę.

Sprendimas. Funkciją apibūrinančią reiškinį $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$ pertvarkykime taip, kad kuo

daugiau naudotos turėtume taikydami nelygybę $A_3 \geq G_3$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} &= \left(\frac{x}{y+z} + 1 \right) + \left(\frac{y}{z+x} + 1 \right) + \left(\frac{z}{x+y} + 1 \right) - 3 = \\ &= \left(\frac{x+y+z}{y+z} + \frac{y+z+x}{z+x} + \frac{z+x+y}{x+y} \right) - 3 = (x+y+z) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) - 3 = \\ &= \frac{1}{2} ((x+y) + (y+z) + (z+x)) \cdot \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) - 3. \end{aligned}$$

Jei pažymėtume

$$a_1 = x+y, \quad a_2 = y+z \quad \text{ir} \quad a_3 = z+x,$$

gautume, kad $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$.

Todėl

$$(x+y) + (y+z) + (z+x) = a_1 + a_2 + a_3 = 3 \cdot \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} = 3 \cdot \sqrt[3]{(x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x)}$$

ir

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}}{3} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3}} = \frac{3}{\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}} = \\ &= \frac{3}{\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}}. \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{1}{2}((x+y) + (y+z) + (z+x)) \cdot \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right) - 3 \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}} - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

jei $x > 0$, $y > 0$ ir $z > 0$.

Lygybė $f(x, y, z) = \frac{3}{2}$ galioja tik kai

$$x+y = y+z = z+x \text{ ir } \frac{1}{x+y} = \frac{1}{y+z} = \frac{1}{z+x},$$

taigi tik kai $x = y = z > 0$.

Matome, kad skaičius $\frac{3}{2}$ yra mažiausia funkcijos $f(x, y, z) = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$ reikšmė, jei $x > 0$, $y > 0$ ir $z > 0$.

$$\text{Ats.: } \frac{3}{2}.$$

9 pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x) = x^2 \cdot (6-x)$ didžiausią reikšmę intervale $[0; 6]$.

Sprendimas. Kadangi $f(0) = f(6) = 0$ ir $f(x) > 0$, kai $x \in (0; 6)$, tai tikėtina, kad intervale $(0; 6)$ didžiausią funkcijos reikšmę pasiseks rasti.

Ieškokime galimybės išspręsti uždavinį taikant nelygybę $G_n \leq A_n$.

Jei bandytume taikyti nelygybę $G_2 \leq A_2$ skaičiams x^2 ir $6-x$, gautume:

$$x^2 \cdot (6-x) = \left(\sqrt{x^2(6-x)} \right)^2 \leq \left(\frac{x^2 + (6-x)}{2} \right)^2 = \frac{(x^2 - x + 6)^2}{4}.$$

Lygybė $G_2 = A_2$ čia galiotų tik kai $x^2 = 6-x$, taigi taške $x=3$ ($x=-2$ nepriklauso intervalui $(0; 6)$). Tačiau nelygybės dešinėje pusėje yra ne konkretus skaičius, o reiškinys $\frac{(x^2 - x + 6)^2}{4}$, galintis įgyti įvairias reikšmes intervale $(0; 6)$.

Vadinasi, nelygybę $G_n \leq A_n$ dera taikyti ne bet kuria pasitaikiusia proga, kad gautum siekiamą rezultatą.

Pabandykime daryti taip:

$$f(x) = x^2 \cdot (6-x) = 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (6-x) = 4 \left(\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (6-x)} \right)^3 \leq 4 \cdot \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + (6-x)}{3} \right)^3 = 4 \cdot \left(\frac{6}{3} \right)^3 = 32.$$

Lygybė $G_3 = A_3$ galioja tik kai $\frac{x}{2} = 6-x$, taigi tik kai $x=4$.

Kadangi $x=4$ yra intervale $(0; 6)$, darome išvadą, kad $\min f(x) = f(4) = 32$.

Ats.: 32.

Komentaras. Jei užrašę funkciją $f(x)$ pavidalu

$$f(x) = 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (6-x)$$

būtume taikę nelygybę $G_4 = A_4$, būtume gavę:

$$f(x) = \left(\sqrt[4]{4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (6-x)} \right)^4 \leq \left(\frac{4 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + (6-x)}{4} \right)^4 = \left(\frac{10}{4} \right)^4 = \frac{625}{16} = 39,0625.$$

Bet lygybė $G_4 = A_4$ negalioja jokiam intervale $(0; 6)$ taške, nes lygčių sistema $4 = \frac{x}{2} = 6 - x$ neturi sprendinių.

Tokia funkcijos analizė nebūtų klaidinga, bet gautas rezultatas

$$f(x) = x^2 \cdot (6-x) < 39,0625, \text{ kai } x \in (0; 6),$$

neleistų padaryti išvados, kad $\min f(x) = f(4) = 32$.

10 pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x) = \frac{x-3}{x^2-2x+22}$ didžiausią reikšmę intervale $(3; +\infty)$.

Sprendimas. Kvadratinis trinaris $x^2 - 2x + 22$ įgyja tik teigiamas reikšmes, o dvinaris $x - 3$ intervale $(3; +\infty)$ taip pat yra teigiamas.

Siekdami taikyti nelygybę $A_n \geq G_n$, funkcijos išraišką pertvarkykime taip:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-3}{x^2-2x+22} = \frac{x-3}{x(x-3) + (x-3) + 25} = \frac{\frac{x-3}{x-3}}{\frac{x(x-3) + (x-3) + 25}{x-3}} = \frac{1}{x+1 + \frac{25}{x-3}} = \\ &= \frac{1}{\left(x-3 + \frac{25}{x-3}\right) + 4}. \end{aligned}$$

Kadangi $(x-3) + \frac{25}{x-3} \geq 2\sqrt{(x-3) \cdot \frac{25}{x-3}} = 10$, jei $x > 3$, tai $f(x) \leq \frac{1}{10+4} = \frac{1}{14}$, jei $x \in (3; +\infty)$.

Lygybė $A_2 = G_2$ galioja tik kai $x-3 = \frac{25}{x-3}$. Šios lygties sprendinys $x=8$ yra intervale

$(3; +\infty)$, todėl $\frac{1}{14}$ yra funkcijos $f(x) = \frac{x-3}{x^2-2x+22}$ didžiausia reikšmė intervale $(3; +\infty)$.

$$\text{Ats.: } \max f(x) = f(8) = \frac{1}{14}.$$

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Dviejų teigiamų sveikųjų skaičių suma lygi 161, o 7 yra didžiausias jų bendras daliklis. Tarp šias sąlygas tenkinančių skaičių raskite du skaičius, kurių sandauga yra didžiausia.
2. Raskite didžiausią sandaugos $x \cdot y$ reikšmę, jeigu $3x + 4y = 12$.
3. Raskite mažiausią sumos $x^2 + y^2$ reikšmę, jeigu $8x + 4y = 1$.
4. Tuo pačiu metu iš miesto A į miestą B išvažiuoja dviratininkas, kurio greitis 30 km/h, o iš miesto B į miestą C – dviratininkas, kurio greitis 10 km/h. Keliai AB ir BC yra tiesūs, o mieste B susikerta

stačiu kampu. Nustatykite, po kurio laiko atstumas tarp dviratininkų bus mažiausias, jei miestas B yra už 120 km nuo miesto A , o miestas C yra už 40 km nuo miesto B .

5. Taškas M yra stačiojo trikampio ABC ($\angle A = 90^\circ$) įžambinėje BC . Atkarpa AM yra įbrėžto į šį trikampį stačiakampio įstrižainė. Nustatykite, kokių santykiu didžiausio ploto stačiakampio viršūnė M dalija trikampio įstrižainę BC , jei $AB = 50$ cm, $AC = 30$ cm.

6. Raskite funkcijos $f(x) = x^3 + 3x^2 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}$, $x > 0$, mažiausią reikšmę.

7. Raskite funkcijos $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 42}{x - 2}$, $x > 2$, mažiausią reikšmę.

8. Įrodykite, kad mažiausia reiškinio

$$f(x, y, z) = (x + 2y)(y + 2z)(z + 2x)$$

reikšmė lygi 27, jeigu $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ ir $xyz = 1$.

9. Raskite didžiausią reiškinio $f(a, b) = 1 - a^2 - 4b^2$ reikšmę, jeigu $a + 4b = 1$.

10. Raskite mažiausią reiškinio

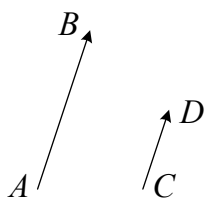
$$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) \left(\frac{1}{y} - 1\right) \left(\frac{1}{z} - 1\right)$$

reikšmę, jeigu $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ ir $x + y + z = 1$.

III. GEOMETRINIAI VEKTORIŲ TAIKYMAI

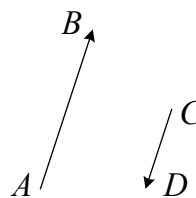
Teorinę medžiagą parengė ir trečiąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

Sakoma, kad atkarpa AB yra *orientuotoji atkarpa* (arba kryptinė atkarpa), jei yra nurodyta, kuris iš taškų A ir B yra orientuotosios atkarpos pradžios taškas, tuomet kitas atkarpos galas yra jos pabaigos taškas. Orientuotosios atkarpos yra vadinamos *vektoriais*. Tekste vektoriai žymimi arba viena raide su rodykle $\vec{a}$, arba dviem didžiosiomis raidėmis su rodykle $\overrightarrow{AB}$, pirmoje vietoje rašant vektoriaus pradžios tašką. Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra vadinami a) *vienakrypčiais* (žymima $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$), jei spinduliai AB ir CD yra vienodos krypties (1a pav.), b) *priešpriešiais* (žymima $\overrightarrow{AB} \updownarrow \overrightarrow{CD}$), jei spinduliai AB ir CD yra priešingų krypčių (1b pav.), c) *kolineariaisiais* (žymima $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$), jei tiesės AB ir CD lygiagrečios. Kolinearieji vektoriai yra arba vienakrypčiai, arba priešpriešiai. Vektoriaus $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *ilgiu* (arba *moduliu*) vadinamas atkarpos AB ilgis; vektoriaus $\vec{a}$ *modulis* žymimas $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$. Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra vadinami *lygiais*, jei jų moduliai lygūs, o kryptys sutampa, žymima $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Iš šio apibrėžimo išplaukia, kad, jei vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ nėra vienoje tiesėje, tai vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra lygūs tada ir tik tada, kai keturkampis $ABDC$ yra lygiagretainis.



$$\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$$

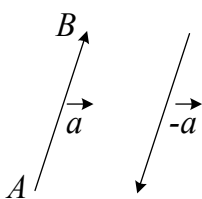
1a pav.



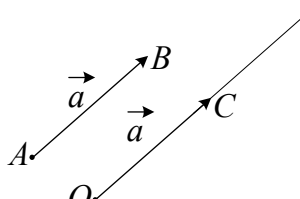
$$\overrightarrow{AB} \updownarrow \overrightarrow{CD}$$

1b pav.

Nulinis vektoriumi $\vec{0}$ vadinamas toks vektorius, kurio pradžios ir galo taškai sutampa. Nulinis vektorius yra kolinearusis su bet kuriuo vektoriumi. Nulinio vektoriaus modulis lygus nuliui. Vektoriai, kurių moduliai lygūs, o kryptys priešingos, yra vadinami *priešingaisiais vektoriais*. Vektoriumi $\vec{a}$ priešingas vektorius žymimas $-\vec{a}$. Akivaizdu, kad $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (2 pav.), o $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.

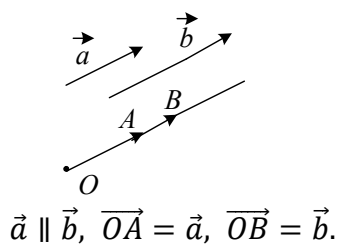


2 pav.



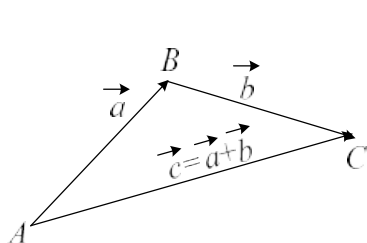
3 pav.

Sakykime, kad $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ – duotasis vektorius, O – bet kuris plokštumos taškas. Nubrėžkime spindulį OM , vienkryptį su spinduliu AB ir jame raskime vienintelį tašką C , kad atkarpos AB ir OC būtų vienodo ilgio (3 pav.). Tuomet vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{OC}$ yra lygūs. Sakoma, kad vektorius $\vec{a}$ yra *atidedamas nuo taško* O . Akivaizdu, bet kuris vektorius vieninteliu būdu yra atidedamas nuo bet kurio taško. Jei $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – kolinearieji vektoriai, tai atidėti nuo vieno taško, jie yra vienoje tiesėje (4 pav.). Jei du vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ atidėti nuo vieno taško O ($\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$), tai kampas AOB yra vadinamas *kampu tarp vektorių* $\vec{a}$ ir $\vec{b}$; šis kampas yra intervale $[0^\circ, 180^\circ]$. Jei $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, tai kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ lygus 0° , o jei $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$ – tai kampas tarp jų lygus 180° .

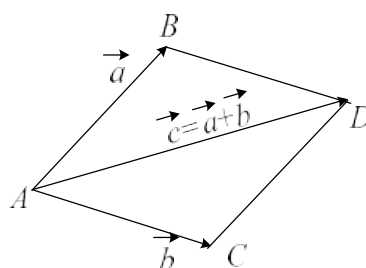


4 pav.

Sakykime, kad $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – du vektoriai. Parinkime tašką A ir atidėkime nuo jo vektorius $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, o nuo taško B - vektorius $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ (5 pav.). Tuomet vektorius $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ yra vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ suma: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, arba $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (vektorių sudėties trikampio taisyklė).



5 pav.



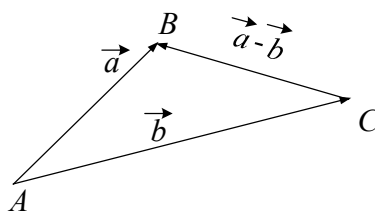
6 pav.

Jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearieji, tai atidėję nuo taško A vektorius $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ir $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, nubrėžiame lygiagretainę $ABDC$ (6 pav.). Tuomet $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (vektorių sudėties lygiagretainio taisyklė).

Vektorių sudėtis pasižymi šiomis savybėmis:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

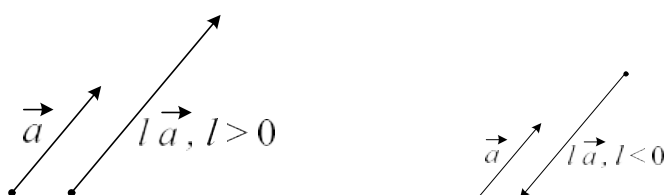
Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skirtumu vadinamas toks vektorius $\vec{x}$, kad $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$, žymime $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$. Akivaizdu, kad $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ (7 pav.). Jei $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, tai $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.



7 pav.

Skaičiaus l ir vektoriaus $\vec{a}$ sandauga vadinamas vektorius $\vec{b}$, nustatomas šiomis sąlygomis:

- 1) $\vec{b} \uparrow \vec{a}$, jei $l > 0$, $\vec{b} \updownarrow \vec{a}$, jei $l < 0$;
- 2) $|\vec{b}| = |l| \cdot |\vec{a}|$ (8 pav.).



8 pav.

Skaičiaus 0 ir vektoriaus $\vec{a}$ sandauga yra nulinis vektorius. Skaičiaus l ir vektoriaus $\vec{a}$ sandauga žymima $\vec{b} = l \cdot \vec{a}$ (arba $\vec{b} = l\vec{a}$).

Vektoriaus daugyba iš skaičiaus pasižymi tokiomis savybėmis:

- 1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$,
- 2) $(lk) \cdot \vec{a} = l \cdot (k \cdot \vec{a})$,
- 3) $(l + k) \cdot \vec{a} = l \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{a}$,
- 4) $l \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = l \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b}$.

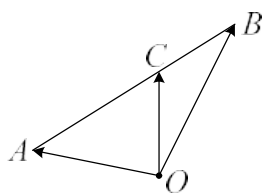
Nenuliniai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearieji tada ir tik tada, kai yra toks skaičius l , kad $\vec{b} = l \cdot \vec{a}$. Jei $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, tai $l = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, o jei $\vec{a} \downarrow \vec{b}$, tai $l = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

1 pavyzdys. Sakysime, kad atkarpoje AB yra taškas C ir $AC : CB = \alpha : \beta$, čia α ir β – du duotieji skaičiai. Tuomet bet kuriam taškui O yra teisinga lygybė $\vec{OC} = \frac{\beta \vec{OA} + \alpha \vec{OB}}{\alpha + \beta}$.

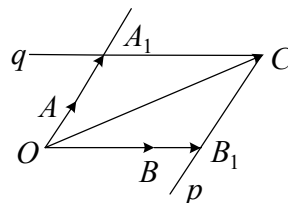
Sprendimas. Sakysime, kad $AC : CB = \alpha : \beta$ (9 pav.). Tuomet $\vec{AC} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{CB}$. Jei O – bet kuris plokštumos taškas, tai $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$, $\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC}$, t. y. $\vec{OC} - \vec{OA} = \frac{\alpha}{\beta} (\vec{OB} - \vec{OC})$. Iš čia gauname, kad $(\alpha + \beta) \vec{OC} = \alpha \vec{OB} + \beta \vec{OA}$, ką ir reikėjo įrodyti.

Atskiru atveju, kai taškas C yra atkarpos AB vidurio taškas, tai $AC : CB = 1 : 1$, ir įrodytoji formulė yra tokia: $\vec{OC} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$.

1 teorema. Sakysime, kad $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – du plokštumos nekolinearieji vektoriai. Tuomet bet kuris plokštumos vektorius $\vec{c}$ vienareikšmiškai išreiškiamas vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ t. y. egzistuoja skaičiai l ir m , kad būtų teisinga lygybė $\vec{c} = l\vec{a} + m\vec{b}$.



9 pav.



10 pav.

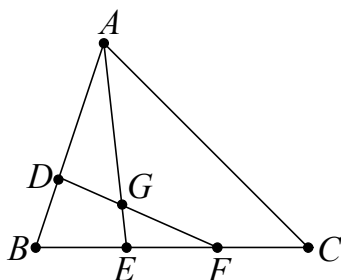
Įrodymas. Atidėkime duotuosius vektorius nuo pasirinkto plokštumos taško O : $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ (10 pav.). Kadangi vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra nekolinearieji, tai taškai O, A, B nėra vienoje tiesėje. Jei taškas C yra tiesėje OA (arba tiesėje OB), tai vektoriai $\vec{c}$ ir $\vec{a}$ (arba $\vec{c}$ ir $\vec{b}$) yra kolinearieji, todėl yra toks skaičius l , kad $\vec{c} = l\vec{a} = l\vec{a} + 0 \cdot \vec{b}$ (arba yra toks skaičius m , kad $\vec{c} = m\vec{b} = 0 \cdot \vec{a} + m\vec{b}$). Jei taškas C nėra nei tiesėje OA , nei tiesėje OB , tai per tašką C nubrėžiame tieses $p \parallel OA$ ir $q \parallel OB$. Sakysime, kad tiesės p ir OB kertasi taške B_1 , o tiesės q ir OA – taške A_1 . Kadangi vektoriai $\vec{OA_1}$ ir $\vec{OA}$ kolinearieji, tai egzistuoja skaičius l , kad $\vec{OA_1} = l \cdot \vec{OA} = l \cdot \vec{a}$. Analogiškai vektoriai $\vec{OB_1}$ ir $\vec{OB}$ kolinearieji, tai egzistuoja skaičius m , kad $\vec{OB_1} = m \cdot \vec{OB} = m \cdot \vec{b}$. Kadangi keturkampis OA_1CB_1 yra lygiagretainis, tai $\vec{OC} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1}$, todėl $\vec{c} = l\vec{a} + m\vec{b}$. Jei $l' \neq l$, ir $m' \neq m$ – kiti skaičiai, su kuriais teisinga lygybė $\vec{c} = l'\vec{a} + m'\vec{b}$, tai atėmę vieną lygybę iš kitos, gauname, kad $(l - l')\vec{a} + (m - m')\vec{b} = \vec{0}$ t. y. $\vec{a} = \frac{m - m'}{l - l'} \vec{b}$, taigi $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Gavome prieštarą teoremos sąlygai, taigi $l' = l$, $m' = m$, ir teorema įrodyta.

Taikant šią teoremą uždavinių sprendimui, paprastai pasirenkami kurie nors du nekolinearieji vektoriai ir jais išreiškiami uždavinio sąlygoje minimi vektoriai, arba kuris nors vienas vektorius išreiškiamas dviem būdais. Pailiustruosime tai pavyzdžiais.

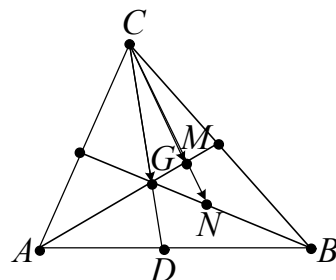
2 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinėje AB yra taškas D , o karštinėje BC — taškai E ir F tokie, kad $AD : DB = 3 : 2$, $BE : EC = 1 : 3$, $BF : FC = 4 : 1$. Rasime, kokių santykiu tiesė AE dalija atkarpą DF .

Sprendimas. Sakysime, kad tiesės AE ir DF susikerta taške G (11 pav.). Kadangi taškas E dalija atkarpą BC santykiu $BE : EC = 1 : 3$, tai pagal 1 pavyzdžio lygybę $\overrightarrow{AE} = \frac{3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{4}$. Be to akivaizdu, kad $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$. Vektoriai $\overrightarrow{AE}$ ir $\overrightarrow{AG}$ yra kolinerieji, tai yra toks skaičius x , kad $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AE} = x \cdot \frac{3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{4} = \frac{3}{4}x\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}x\overrightarrow{AC}$. (*) Kita vertus $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{DG}$ ir $\overrightarrow{DF}$ yra kolinerieji, tai yra toks skaičius y , kad $\overrightarrow{DG} = y\overrightarrow{DF} = y(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}) = y\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}\right) = y\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\right) = -\frac{2}{5}y\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}y\overrightarrow{AC}$. Tada $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}y\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}y\overrightarrow{AC} = \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5}y\right)\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}y\overrightarrow{AC}$ (**). Kaip išplaukia iš 1 teoremos gautosios vektoriaus $\overrightarrow{AG}$ išraiškos (*) ir (**) nekolineariaisiais vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ turi sutapti, todėl turii būti teisingos lygybės $\frac{3}{4}x = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}y$, $\frac{1}{4}x = \frac{4}{5}y$. Iš čia $x = \frac{16}{5}y$, $\frac{3}{4} \cdot \frac{16}{5}y = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}y$, $y = \frac{3}{14}$. Tad $DG : GF = 3 : 11$.

Atsakymas: $3 : 11$.



11 pav.



12 pav.

3 pavyzdys. Taškas G yra trikampio ABC pusiauakraščių sankirtos taškas. Per viršūnę C nubrėžta tiesė l kerta tieses AG ir BG atitinkamai taškuose M ir N (12 pav.). Jei $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{BG} = l\overrightarrow{GN}$, tai $k + l = 1$. Įrodysime tai.

Sprendimas. Jei CD – trikampio pusiauakraštinė, tai pagal trikampio pusiauakraščių savybes $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{3}$. Tuomet $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{CG} + \frac{1}{k}\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CG} + \frac{1}{k}(\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CA}) = \left(1 + \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{CG} - \frac{1}{k}\overrightarrow{CA} = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{3} - \frac{1}{k}\overrightarrow{CA} = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3k}\right)\overrightarrow{CA} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3k}\right)\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{CG} + \frac{1}{l}\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CG} + \frac{1}{l}(\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CB}) = \left(1 + \frac{1}{l}\right)\overrightarrow{CG} - \frac{1}{l}\overrightarrow{CB} = \left(1 + \frac{1}{l}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{3} - \frac{1}{l}\overrightarrow{CB} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3l}\right)\overrightarrow{CA} + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3l}\right)\overrightarrow{CB}$. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{CM}$ ir $\overrightarrow{CN}$ yra kolinerieji, tai yra toks skaičius x , kad $\overrightarrow{CM} = x\overrightarrow{CN}$, t. y. $\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3k}\right)\overrightarrow{CA} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3k}\right)\overrightarrow{CB} = x\left(\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3l}\right)\overrightarrow{CA} + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3l}\right)\overrightarrow{CB}\right)$. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{CA}$ ir $\overrightarrow{CB}$ yra nekolinearieji, tai iš šios išraiškos išplaukia lygybės $\frac{1}{3} - \frac{2}{3k} = \frac{x}{3} + \frac{x}{3l}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3k} = \frac{x}{3} - \frac{2x}{3l}$. Iš čia $1 - \frac{2}{k} = x + \frac{x}{l}$, $1 + \frac{1}{k} = x - \frac{2x}{l}$. Pirmąją lygybę padauginame iš 2 ir sudedame su antrąja: $3 - \frac{3}{k} = 3x$, $x = 1 - \frac{1}{k}$, $1 + \frac{1}{k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{l}\right)$, $\frac{k+1}{k} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{l-2}{l}$, $(k+1)l = kl - 2k - l + 2$, $2k + 2l = 2$, ką ir reikėjo įrodyti.

Skaičius, lygus vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ modulių sandaugai, padaugintai iš kampo tarp jų kosinuso, vadinamas vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *skaliarine sandauga*. Jei $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – duotieji vektoriai, kampas tarp jų lygus φ , tai jų skaliarinė sandauga $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$. Iš skaliarinės sandaugos apibrėžimo išplaukia, kad nenuliniai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ statmeni tada ir tik tada, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui.

Skaliarinė sandauga pasižymi šiomis savybėmis:

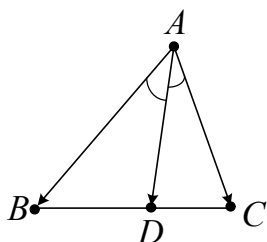
1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
3. $(l \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = l \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$;
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \geq 0$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ tik kai $\vec{a} = \vec{0}$.

Pagal skaliarinės daugybos apibrėžimą ir ketvirtąją savybę kampas φ tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ apskaičiuojamas pagal formulę $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, o vektoriaus $\vec{a}$ modulis – pagal formulę $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

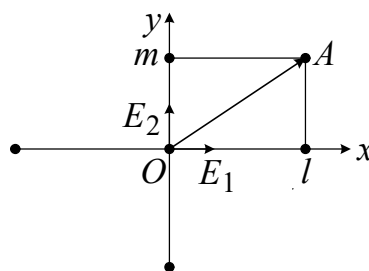
4 pavyzdys. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ moduliai atitinkamai lygūs 3 ir 4, kampas tarp jų 60° . Trikampis ABC yra toks, kad $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = 2\vec{a}$. Rasime trikampio pusiaukampinės AD ilgį.

Sprendimas. Taikome trikampio pusiaukampinės savybę: trikampio kampo A pusiaukampinė kerta trikampio kraštinę BC taške D ir yra teisinga lygybė $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (13 pav.). Kadangi $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - 2\vec{b}$, tai trikampio kraštinės AB ilgis $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2} = \sqrt{(\vec{a} - 2\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2}$. Įrašę į šią išraišką $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 3^2 = 9$, $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 4^2 = 16$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6$, gauname, kad $AB = 7$. Kadangi $\overrightarrow{AC} = 2\vec{a}$, kraštinės AC ilgis lygus $AC = |\overrightarrow{AC}| = |2\vec{a}| = 2 \cdot |\vec{a}| = 6$. Taigi $BD : DC = AB : AC = 7 : 6$, todėl pagal 1 pavyzdžio lygybę $\overrightarrow{AD} = \frac{6\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC}}{6+7}$, tuomet $AD = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{\overrightarrow{AD}^2} = \frac{1}{13} \sqrt{(6\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{13} \sqrt{(6(\vec{a} - 2\vec{b}) + 7 \cdot 2\vec{a})^2} = \frac{1}{13} \sqrt{(20\vec{a} - 12\vec{b})^2} = \frac{4}{13} \sqrt{(5\vec{a} - 3\vec{b})^2} = \frac{4}{13} \sqrt{25\vec{a}^2 - 30\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2} = \frac{4}{13} \sqrt{25 \cdot 9 - 30 \cdot 6 + 9 \cdot 16} = \frac{4}{13} \sqrt{189} = \frac{12}{13} \sqrt{21}$.

Atsakymas: $\frac{12}{13} \sqrt{21}$.



13 pav.



14 pav.

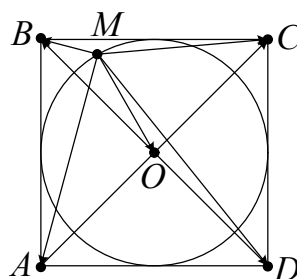
Sakykime, kad plokštumoje yra duota stačiakampė Dekarto koordinatinių sistema Oxy , jos ašių Ox ir Oy vienetiniai vektoriai paprastai žymimi $\overrightarrow{OE_1} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{j}$ (14 pav.). Kadangi vektoriai $\vec{i}$ ir $\vec{j}$ yra nekolinearieji, tai bet kuris plokštumos vektorius $\vec{a}$ jais išreiškiamas (1 teorema): $\vec{a} = l\vec{i} + m\vec{j}$. Skaičiai l ir m yra vadinami vektoriaus $\vec{a}$ koordinatėmis koordinatinių sistemoje Oxy . Jei vektorius $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ atidedamas nuo koordinatinių pradžios taško, tai skaičiai l ir m yra taško A koordinatės

koordinatinių sistemoje Oxy (14 pav.). Jei koordinatinių sistemoje taškų A ir B koordinatės $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, tai iš lygybės $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ gauname formulę vektoriaus koordinatėms rasti, kai žinomos jo galų koordinatės $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$.

Kadangi vektoriai $\vec{i}$ ir $\vec{j}$ yra statmeni, tai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui. Jei $\vec{a} = l_1\vec{i} + m_1\vec{j}$, $\vec{b} = l_2\vec{i} + m_2\vec{j}$, tai iš skaliarinės daugybos savybių lengvai gauname, kad $\vec{a} \cdot \vec{b} = l_1l_2 + m_1m_2$. Iš čia išplaukia, kad $|\vec{a}| = \sqrt{l_1^2 + m_1^2}$, o kampo tarp vektorių kosinusas randamas pagal formulę $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$.

5 pavyzdys. Į kvadratą įbrėžtas apskritimas. Įrodysime, kad bet kurio šio apskritimo taško atstumų iki kvadrato viršūnių kvadratų suma yra vienoda visiems apskritimo taškams.

Sprendimas. Sakysime, kad taškas O yra kvadrato $ABCD$ įstrižainių sankirtos taškas, taškas M yra kuris nors į kvadratą įbrėžto apskritimo taškas (15 pav.). Turime: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}$. Šias lygybes skaliariškai keliamė kvadratu ir sudedame. Žymėdami kvadrato kraštinę $AB = BC = CD = DA = a$, gauname, kad $4a^2 = 2(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2) - 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA})$. Iš čia $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2 + (\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MD}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA})) = 2a^2 + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})$. Kadangi $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}$, o $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, tai $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) = 4\overrightarrow{MO}^2 = 4R^2$, čia $R = \frac{a}{2}$ – į kvadratą įbrėžto apskritimo

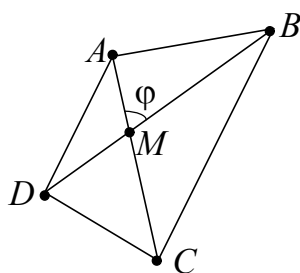


15 pav.

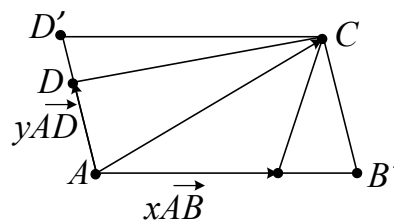
spindulys. Tuomet $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2 + 4(\frac{a}{2})^2 = 3a^2$. Iš čia seka, kad nagrinėjamoji kvadratų suma yra vienoda visiems apskritimo taškams M .

Kaip žinome, lygiagretainio $ABCD$ plotas lygus gretimų kraštinių sandaugai, padaugintai iš kampo tarp jų sinuso: $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \angle A = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin \angle A$. Kadangi $\angle A \in (0^\circ, 180^\circ)$, tai $\sin \angle A > 0$, todėl $\sin \angle A = \sqrt{1 - (\cos \angle A)^2} = \sqrt{1 - (\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|})^2} = \frac{\sqrt{AB^2 \cdot AD^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})^2}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|}$. Įrašę šią sinuso reikšmę, gauname tokią lygiagretainio $ABCD$ ploto formulę $S_{ABCD} = \sqrt{AB^2 \cdot AD^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})^2}$. Kadangi trikampio ABC plotas lygus pusei lygiagretainio $ABDC$ ploto, tai $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$.

Sakykime, kad keturkampio $ABCD$ įstrižainės AC ir BD susikerta taške M , o jų sudaromas kampas $\angle AMB = \varphi$ (16 pav.). Tuomet $\angle CMD = \varphi$, $\angle BMC = \angle AMD = 180^\circ - \varphi$, taigi $\sin \angle AMB = \sin \angle BMC = \sin \angle CMD = \sin \angle DMA = \sin \varphi$. Kadangi keturkampio $ABCD$ plotas lygus trikampių AMB, BMC, CMD ir DMA plotų sumai, tai $S_{ABCD} = S_{\triangle AMB} + S_{\triangle BMC} + S_{\triangle CMD} + S_{\triangle DMA} = \frac{1}{2}MA \cdot MB \sin \angle AMB + \frac{1}{2}MB \cdot MC \sin \angle BMC + \frac{1}{2}MC \cdot MD \sin \angle CMD + \frac{1}{2}MD \cdot MA \sin \angle DMA = \frac{1}{2} \sin \varphi \cdot (MA \cdot MB + MB \cdot MC + MC \cdot MD + MD \cdot MA) = \frac{1}{2} (MB(MA + MC) + MD(MC + MA)) \sin \varphi = \frac{1}{2} (MA + MC)(MB + MD) \sin \varphi = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \varphi$. Taigi įrodėme, kad keturkampio plotas lygus jo įstrižainių sandaugos pusei, padaugintai iš kampo tarp įstrižainių sinuso. Iš čia gauname tokią keturkampio ploto formulę $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 \cdot BD^2 - (\vec{AC} \cdot \vec{BD})^2}$.



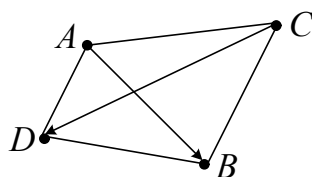
16 pav.



17 pav.

6 pavyzdys. Taškai $A(-2, -3)$, $B(7, 7)$, $C(-3, 1)$ ir $D(3, 0)$ yra keturkampio viršūnės. Rasime jo plotą.

Sprendimas. Visų pirma nustatysime, kuri iš atkarpų AD ar AC yra keturkampio įstrižainė. Tą galima padaryti, atidedant duotuosius taškus koordinatinių plokštumoje, bet galima patikrinti ir skaičiuojant. Pastebėkime (17 pav.), kad teisingas toks teiginys: jei atkarpa AC yra keturkampio $ABCD$ įstrižainė, tai išraiškoje $\vec{AC} = x\vec{AB} + y\vec{AD}$, kurios teisingumas išplaukia iš 1 teoremos, skaičiai x ir y yra teigiamieji skaičiai. Kadangi $\vec{AB} = (7 - (-2))\vec{i} + (7 - (-3))\vec{j} = 9\vec{i} + 10\vec{j}$, $\vec{AC} = (-3 - (-2))\vec{i} + (1 - (-3))\vec{j} = -\vec{i} + 4\vec{j}$, o $\vec{AD} = (3 - (-2))\vec{i} + (0 - (-3))\vec{j} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$, tai $-\vec{i} + 4\vec{j} = x(9\vec{i} + 10\vec{j}) + y(5\vec{i} + 3\vec{j})$. Kadangi vektoriai $\vec{i}$ ir $\vec{j}$ yra nekolinearieji, tai šioje išraiškoje koeficientai prie šių vektorių turi sutapti. Iš čia seka, kad $\begin{cases} 9x + 5y = -1, \\ 10x + 3y = 4. \end{cases}$ Šios sistemos sprendinys $x = 1$, $y = -2$, todėl $\vec{AC} = \vec{AB} - 2\vec{AD}$. Kadangi šioje išraiškoje vienas iš koeficientų yra neigiamas, tai atkarpa AC nėra įstrižainė. Ji yra keturkampio kraštinė, o kadangi iš gautos lygybės išplaukia, kad $\vec{AB} = \vec{AC} + 2\vec{AD}$, tai atkarpa AB yra keturkampio įstrižainė (18 pav.). Tuomet keturkampio plotas $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot CD^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{CD})^2}$. Kadangi $\vec{CD} = 6\vec{i} - \vec{j}$, tai $AB^2 = 9^2 + 10^2 = 181$, $CD^2 = 6^2 + (-1)^2 = 37$, $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 9 \cdot 6 + 10 \cdot (-1) = 44$, tai ieškomasis plotas $S = \frac{1}{2} \sqrt{181 \cdot 37 - 44^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4761} = \frac{69}{2}$.



18 pav.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Taškas M yra trikampio ABC kraštinės AB vidurio taškas, O – trikampio pusiaukraštinių sankirtos taškas. Vektorius $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{MO}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$.
2. Taškas M yra lygiagretainio $ABCD$ kraštinės AD vidurys, o taškas N yra kraštinėje CD . Be to, $CN : ND = 1 : 3$. Vektorius $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{CM}$ ir $\overrightarrow{BN}$.
3. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse BC ir CD yra taškai K ir L , be to, $BK : KC = 2 : 3$, $CL : LD = 5 : 3$. Tiesės DK ir BL kertasi taške M . Raskite, koku santykiu M dalija atkarpas DK ir BL .
4. Taškai P ir Q yra atitinkamai atkarpų AB ir CD vidurio taškai. Įrodykite, kad atkarpų AC , BD ir PQ vidurio taškai yra vienoje tiesėje.
5. Per lygiagretainio $ABCD$ viršūnę C nubrėžta tiesė d , kertanti tieses AB ir AD atitinkamai taškuose M ir N taip, kad $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC} = l\overrightarrow{AN}$. Raskite sumą $k + l$.
6. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 4$, $AC = 5$, kampas A lygus 45° . Raskite trikampio pusiaukraštinės AM ir pusiaukampinės AD ilgius.
7. Stačiojo trikampio ABC statinių ilgiai $CA = 6$, $CB = 8$. Raskite kampo tarp jo pusiaukampinių CM ir BN kosinusą.
8. Taškas O yra apskritimo centras, taškai A , B ir C yra tokie apskritimo taškai, kad $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Raskite kampo AOB didumą.
9. Duotos trikampio viršūnių koordinatės $A(3, 0)$, $B(2, 7)$, $C(5, 3)$. Raskite trikampio plotą ir aukštinės AH ilgį.
10. Taškai $(-6, -1)$, $(-4, -4)$, $(-1, 4)$, $(-3, -3)$ yra keturkampio viršūnės. Raskite jo plotą.

IV. TIESINĖS LYGTYS IR DETERMINANTAI

Teorinę medžiagą parengė bei ketvirtąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis

1. Tiesinė lygtis. Tiesinė lygtimi su n ($n \in \mathbb{N}$) nežinomųjų vadinama lygtis

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b,$$

kurioje $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ir b yra žinomi dydžiai (realieji skaičiai), o $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ – nežinomi dydžiai (realieji skaičiai).

Skaičiai $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ vadinami *koeficientais*, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ – *nežinomaisiais*, o skaičius b vadinamas *laisvuju nariu*.

Nežinomųjų reikšmių, tarkim, $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n$ rinkinys $(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3; \dots; \bar{x}_n)$ vadinamas tiesinės lygties *sprendiniu*, jeigu galioja lygybė

$$a_1 \cdot \bar{x}_1 + a_2 \cdot \bar{x}_2 + a_3 \cdot \bar{x}_3 + \dots + a_n \cdot \bar{x}_n = b.$$

Jeigu nežinomųjų skaičius n yra nedidelis, tiesinės lygties nežinomieji ir jų koeficientai paprastai užrašomi skirtingomis raidėmis. Pavyzdžiui, tiesinė lygtis su vienu nežinuoju užrašoma pavidalu $ax = b$, tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais – pavidalu $ax + by = c$, o su trimis nežinomaisiais – pavidalu $ax + by + cz = d$ ir pan.

2. Tiesinės lygties sprendinių aibė. Tiesinės lygties

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

sprendinių $(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3; \dots; \bar{x}_n)$ visuma vadinama *sprendinių aibe*. Ją kartais žymėsime raide X .

Tuo atveju, kai tiesinė lygtis neturi nė vieno sprendinio, pavyzdžiui, tiesinė lygtis

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + 0 \cdot x_n = 1,$$

vertosime *tuščiosios aibės* simbolį $\emptyset$ ir rašysime: $X = \emptyset$.

Patį paprasčiausia yra tiesinė lygtis su vienu nežinomuju $ax = b$.

Jei $a \neq 0$, ji turi tik vieną sprendinį – realųjį skaičių $\frac{b}{a}$.

Jei $a = 0$, yra du atvejai:

1) $b = 0$ ir 2) $b \neq 0$.

Pirmu atveju bet kuris realusis skaičius r yra tiesinės lygties $ax = b$ sprendinys (nes $0 \cdot r = 0$), o antru atveju tiesinė lygtis $ax = b$ neturi nė vieno sprendinio (rašytume $X = \emptyset$).

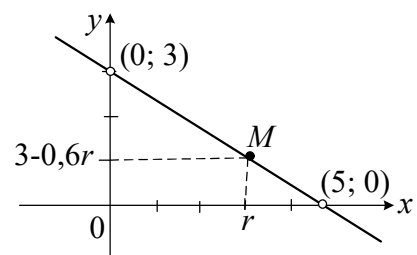
Glaustai prisiminkime ir gerai pažįstamą tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais $ax + by = c$.

Jei $a \neq 0$, tai bet kurį sprendinį galima užrašyti pavidalu $\left(\frac{c-b \cdot r}{a}; r\right)$, $r \in \mathbb{R}$, o jei $b \neq 0$, tai pavidalu $\left(r; \frac{c-a \cdot r}{b}\right)$, $r \in \mathbb{R}$.

Taip pat gerai žinome, kad ir vienu, ir kitu atveju gautume, jog tiesinės lygties su dviem nežinomaisiais sprendinių aibės X geometrinis vaizdas (grafikas) yra kuri nors plokštumos tiesė.

Štai, pavyzdžiui, tiesinę lygtį $3x + 5y = 15$ užrašę pavidalu $y = 3 - 0,6x$ lengvai įsitikintume, kad kiekvienas jos sprendinys $(r; 3 - 0,6r)$, $r \in \mathbb{R}$, yra tiesės, einančios per taškus $(0; 3)$ ir $(5; 0)$, taškas M , kurio koordinatės $(r; 3 - 0,6r)$.

Tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ tenkina kiekviena realiųjų skaičių r_1 ir r_2 pora $(r_1; r_2)$, o lygtis $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$, $c \neq 0$, sprendinių neturi.



1 pav.

3. Veiksmai su tiesinėmis lygtimis. Tiesinės lygties

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b \tag{1}$$

ir skaičiaus λ sandauga yra tiesinė lygtis

$$(\lambda a_1)x_1 + (\lambda a_2)x_2 + (\lambda a_3)x_3 + \dots + (\lambda a_n)x_n = \lambda b. \tag{2}$$

Kad būtų trumpiau, (1) lygtį pažymėkime simboliu L . Tada (2) lygtį žymėsime simboliu λL . Štai, pavyzdžiui, tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais

$$L: 7x + 11y = 77$$

padauginę iš 3 gausime lygtį

$$3L: 21x + 33y = 231.$$

Dviejų tiesinių lygčių su n nežinomųjų

$$L_1: a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 + \dots + a'_nx_n = b'$$

ir

$$L_2: a''_1x_1 + a''_2x_2 + a''_3x_3 + \dots + a''_nx_n = b''$$

suma (žym. $L_1 + L_2$) yra tiesinė lygtis su n nežinomųjų

$$(a'_1 + a''_1)x_1 + (a'_2 + a''_2)x_2 + (a'_3 + a''_3)x_3 + \dots + (a'_n + a''_n)x_n = b' + b''.$$

Pavyzdžiui, tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais

$$2x + 3y + z = 6 \quad \text{ir} \quad 4x - 2y + 3z = 4$$

suma yra tiesinė lygtis su trimis nežinomaisiais $6x + y + 4z = 10$.

Tegu L_1 ir L_2 yra tiesinės lygtys su n , $n \in \mathbb{N}$, nežinomųjų, o λ_1 ir λ_2 – realieji skaičiai. Tada tiesinių lygčių $\lambda_1 L_1$ ir $\lambda_2 L_2$ suma $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$ vadinama lygčių L_1 ir L_2 *tiesiniu dariniu*, o skaičiai λ_1 ir λ_2 – tiesinio darinio *koeficientais*.

Sudarykime kelių tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais

$$L_1: 2x - y + 3z = 4$$

ir

$$L_2: 3x + 2y - 4z = 1$$

tiesinius darinius, pavyzdžiui, $3L_1 + 2L_2$, $2L_1 + L_2$ ir $4L_1 + 3L_2$:

1) Padauginę L_1 iš 3 gausime lygtį

$$3L_1: 6x - 3y + 9z = 12,$$

o L_2 padauginę iš 2 gausime lygtį

$$2L_2: 6x + 4y - 8z = 2.$$

Skaičiuodami sumą $3L_1 + 2L_2$ gausime:

$$(6x - 3y + 9z) + (6x + 4y - 8z) = 12 + 2,$$

$$(6 + 6)x + (-3 + 4)y + (9 - 8)z = 14,$$

$$12x + y + z = 14.$$

Taigi tiesinis darinys $3L_1 + 2L_2$ yra tiesinė lygtis su trimis nežinomaisiais

$$12x + y + z = 14.$$

2) Panašiai skaičiuodami gautume, kad tiesinis darinys $2L_1 + L_2$ yra tiesinė lygtis su trimis nežinomaisiais $7x + 0 \cdot y + 2z = 9$, kurią galima suvokti ir kaip tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais $7x + 2z = 9$.

3) Tiesinis darinys $4L_1 + 3L_2$ yra $17x + 2y + 0 \cdot z = 19$. Šios lygties sprendinių aibė priklauso tik nuo x ir y , nes z gali būti bet kuris realusis skaičius. Taigi ir ją galima suvokti kaip tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais $17x + 2y = 19$.

4. Tiesinių lygčių sistemos sprendimas eliminuojant nežinomuosius. Trumpam grįžkime prie to, ką jau gerai mokame – išspręskime, pavyzdžiui, tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} 2x + 7y = 14, \\ 5x + 3y = 15. \end{cases} \quad (3)$$

Iš pradžių pirmą lygtį padauginame iš (-5) , antrą lygtį padauginame iš 2, o tada pirmą lygtį pridėkime prie antros lygties. Taip gausime naują lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x + 7y = 14, \\ 0 \cdot x - 29y = -40, \end{cases} \quad (4)$$

kurios sprendinį visai nesunku rasti:

$$0 \cdot x - 29y = -40 \Rightarrow 29y = -40 \Rightarrow y = \frac{40}{29};$$

$$2x + 7 \cdot \frac{40}{29} = 14 \Rightarrow 2x = 14 - \frac{280}{29} \Rightarrow x = 7 - \frac{140}{29} = \frac{7(29-20)}{29} = \frac{63}{29}.$$

Vadinasi, (4) lygčių sistemos sprendinys yra $\left(\frac{63}{29}; \frac{40}{29}\right)$. Kartu jis yra ir (3) lygčių sistemos sprendinys (galima įsitikinti tiesiogiai patikrinus).

Jei pažymėtume (kad ir mintyse) (3) sistemos pirmą lygtį simboliu L_1 , o antrą – simboliu L_2 , tai visai lengvai suprastume, kad (4) sistemos antra lygtis $0 \cdot x - 29y = -40$ yra lygtį

$$L_1: 2x + 7y = 14 \quad \text{ir} \quad L_2: 5x + 3y = 15$$

tiesinis darinys $(-5)L_1 + 2L_2$. Taip pat aišku, kad (4) sistema yra gauta iš (3) sistemos, jos antrą lygtį L_2 pakeitus tiesiniu dariniu $(-5)L_1 + 2L_2$.

Svarbu suprasti ir tai, kad tiesinio darinio koeficientus tikslinga pasirinkti taip, kad gautos lygties kurio nors nežinomojo koeficientas būtų lygus nuliui – taip eliminuojamas tas nežinomasis.

Taikydami nežinomųjų eliminavimo metodą išspręskime porą tiesinių lygčių su didesniu nežinomųjų skaičiumi sistemą.

1 pavyzdys. Išspręskime tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 4, \\ 3x - y + 6z = 4, \\ 2x + y - 4z = 2, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases} \quad (5)$$

Sprendimas. Pasirinkime, pavyzdžiui, ketvirtą lygtį (mintyse pažym. L_4). Bandykime eliminuoti nežinomąjį y iš pirmos, antros ir trečios lygčių (taigi iš L_1 , L_2 ir L_3). Tai galima padaryti kad ir taip:

1) Ketvirtą lygtį $L_4: x + y + 2z = 4$ padauginus (mintyse ar juodraštyje) iš -2 ir pridėjus prie pirmos lygties $L_1: x + 2y - 2z = 4$. Kitaip sakant, pirmą lygtį pakeitus tiesiniu dariniu $L_1 + (-2)L_4$, taiga lygtimi $-x + 0 \cdot y - 6z = -4$.

2) Antrą lygtį $L_2: 3x - y + 6z = 4$ pakeitus tiesiniu dariniu $L_2 + L_4$.

3) Trečią lygtį $L_3: 2x + y - 4z = 2$ pakeitus tiesiniu dariniu $L_3 + (-1)L_4$.

Taip gausime naują (bet ekvivalenčią!) tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} -x + 0 \cdot y - 6z = -4, \\ 4x + 0 \cdot y + 8z = 8, \\ x + 0 \cdot y - 6z = -2, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases} \quad (6)$$

Praleidę nuliui lygius dėmenis turėsime tokią sistemą:

$$\begin{cases} -x & -6z = -4, \\ 4x & +8z = 8, \\ x & -6z = -2, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$$

Dabar pasirinkime pirmą lygtį (čia jos žymuo bus vėl L_1) ir eliminuokime nežinomąjį x iš antros, trečios ir ketvirtos lygčių, pakeisdami jas tiesiniais dariniais:

1) lygtį $L_2: 4x + 0 \cdot y + 8z = 8$ – tiesiniu dariniu $L_2 + 4L_1$;

2) lygtį $L_3: x + 0 \cdot y - 6z = -2$ – tiesiniu dariniu $L_3 + L_1$;

3) lygtį $L_4: x + y + 2z = 4$ – tiesiniu dariniu $L_4 + L_1$.

Praleidę nuliui lygius dėmenis, gausime dar vieną (vėl ekvivalenčią!) keturių tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} -x - 6z = -4, \\ -16z = -8, \\ -12z = -6, \\ y - 4z = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Ši lygčių sistema turi vienintelį sprendinį – realiųjų skaičių trejetą $\left(1; 2; \frac{1}{2}\right)$.

Lengva įsitikinti, kad jis tenkina ir (6), ir (5) lygčių sistemą. Vadinasi, (5) lygčių sistema turi vienintelį sprendinį $\left(1; 2; \frac{1}{2}\right)$.

$$\text{Ats.: } \left(1; 2; \frac{1}{2}\right).$$

2 pavyzdys. Išspręskime tiesinių lygčių su keturiais nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 7. \end{cases} \quad (8)$$

Sprendimas. Iš pradžių eliminuokime nežinomąjį x_1 iš pirmos lygties ir iš trečios lygties, tuo tikslu pirmą lygtį

$$L_1: 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 6$$

pakeisdami tiesiniu dariniu $L_1 + (-2)L_2$, o trečią lygtį

$$L_3: 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 7$$

pakeisdami tiesiniu dariniu $L_3 + (-4)L_2$.

Tiesinis darinys $L_1 + (-2)L_2$ yra tiesinė lygtis $0 \cdot x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -4$, o tiesinis darinys $L_3 + (-4)L_2$ yra tiesinė lygtis $0 \cdot x_1 + 6x_2 - 9x_3 - 7x_4 = -13$, todėl (8) lygčių sistema ekvivalenti šiai tiesinių lygčių su keturiais nežinomaisiais sistemai:

$$\begin{cases} 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 6x_2 - 9x_3 - 7x_4 = -13. \end{cases} \quad (9)$$

Dabar eliminuokime x_2 iš antros ir iš trečios lygties, pakeisdami lygtį

$$L_2: x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$$

tiesiniu dariniu $3L_2 + L_1$, taigi tiesine lygtimi $3x_1 + 0 \cdot x_2 + 5x_3 + 0 \cdot x_4 = 11$, o lygtį

$$L_3: 0 \cdot x_1 + 6x_2 - 9x_3 - 7x_4 = -13$$

pakeisdami tiesiniu dariniu $L_3 + (-2)L_1$, taigi tiesine lygtimi $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 7x_3 - x_4 = -5$.

Gausime ekvivalenčią tiesinių lygčių su keturiais nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -4, \\ 3x_1 + 5x_3 = 11, \\ -7x_3 - x_4 = -5. \end{cases} \quad (10)$$

Trečią lygtį padauginame iš -3 ir gautą lygtį pridėkime prie pirmos lygties. Kitaip sakant, tiesinę lygtį $L_1: 0 \cdot x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -4$ pakeiskime tiesiniu dariniu $L_1 + (-3)L_3$, t. y. tiesine lygtimi $0 \cdot x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 0 \cdot x_4 = 11$. Šiuo veiksmu x_4 eliminuojamas iš (10) sistemos pirmos lygties.

Belieka išspręsti šią tiesinių lygčių su keturiais nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} 3x_2 + 20x_3 &= 11, \\ 3x_1 + 5x_3 &= 11, \\ -7x_3 - x_4 &= -5. \end{cases} \quad (11)$$

Iš antros lygties gauname, kad $x_1 = \frac{1}{3}(11 - 5x_3)$, iš pirmos lygties gauname, kad $x_2 = \frac{1}{3}(11 - 20x_3)$, o iš ketvirtos lygties – $x_4 = 5 - 7x_3$.

Matome, kad jei x_3 yra bet kuris realusis skaičius r , tai realiųjų skaičių rinkinys $\left(\frac{1}{3}(11-5r); \frac{1}{3}(11-20r); r; 5-7r\right)$ yra (11) sistemos sprendinys. Dėl (8), (9), (10) ir (11) sistemų ekvivalentumo darome išvadą, kad (8) tiesinių lygčių su keturiais nežinomaisiais sistema turi be galo daug sprendinių ir jie yra užrašomi pavidalu $\left(\frac{1}{3}(11-5r); \frac{1}{3}(11-20r); r; 5-7r\right)$, $r \in \mathbb{R}$.

$$Ats.: \left(\frac{1}{3}(11-5r); \frac{1}{3}(11-20r); r; 5-7r \right), \quad r \in \mathbb{R}.$$

5. Tiesinių lygčių su $n, n \in \mathbb{N}$, nežinomųjų kvadratinė sistema. Susitarkime bet kurią tiesinių lygčių sistemą vadinti *kvadratine tiesinių lygčių sistema*, jeigu jos lygčių skaičius sutampa su nežinomųjų skaičiumi.

Bendrasis kvadratinės tiesinių lygčių sistemos su $n, n \in \mathbb{N}$, nežinomųjų pavidalas yra

[illegible]

6. Kvadratinės tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos sprendinio formulė. Bet kurią dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą galima užrašyti pavidalu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2; \end{cases} \quad (13)$$

čia a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , c_1 ir c_2 gali būti bet kurie realieji skaičiai. Beje, simboliai su dvigubais indeksais skaitomi taip: „ a vienas vienas – simbolis a_{11} “, „ a du vienas“ – simbolis a_{21} ir t. t.

Ieškodami (13) sistemos sprendinio, taikykime nežinomųjų eliminavimo metodą (žr. 1 ir 2 pavyzdžius). Kad būtų mažiau papildomų rūpesčių sudarant tiesinius darinius, apsiribokime atveju, kai tarp koeficientų a_{11} , a_{12} , a_{21} ir a_{22} nėra nė vieno nuliui lygaus skaičiaus. Kita vertus, jei tarp (13) sistemos lygčių koeficientų būtų bent vienas lygus nuliui, jos sprendinių aibę būtų galima rasti iš karto.

Iš pradžių eliminuokime nežinomąjį x_1 iš antros lygties, o paskui (esant galimybei) eliminuokime nežinomąjį x_2 iš pirmos lygties. Tuo tikslu antrą lygtį pakeiskime tiesiniu dariniu $a_{11}L_2 + (-a_{21})L_1$, taigi tiesine lygtimi

$$(a_{11}a_{21} - a_{21}a_{11})x_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}c_2 - c_1a_{21}.$$

Gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ 0 \cdot x_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}c_2 - c_1a_{21}. \end{cases} \quad (14)$$

Pažymėjus

$$d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \text{ ir } d_2 = a_{11}c_2 - c_1a_{21},$$

jī īgis pavidalā

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ 0 \cdot x_1 + dx_2 = d_2. \end{cases} \quad (15)$$

Esant sąlygai $d \neq 0$, galima eliminuoti nežinomąjį x_2 iš pirmos lygties pakeičiant ją tiesiniu dariniu $dL_1 + (-a_{12})L_2$ – tiesine lygtimi

$$da_{11}x_1 + 0 \cdot x_2 = dc_1 - a_{12}d_2.$$

Gautume ekvivalenčią tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} da_{11}x_1 + 0 \cdot x_2 = dc_1 - a_{12}d_2, \\ 0 \cdot x_1 + dx_2 = d_2. \end{cases} \quad (16)$$

Kadangi

$$\begin{aligned} dc_1 - a_{12}d_2 &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})c_1 - a_{12}(a_{11}c_2 - c_1a_{21}) = a_{11}a_{22}c_1 - a_{12}a_{21}c_1 - a_{12}a_{11}c_2 + a_{12} \cdot c_1a_{21} = \\ &= a_{11}a_{22}c_1 - a_{12}a_{21}c_2 = a_{11}(c_1a_{22} - a_{12}c_2), \end{aligned}$$

tai (16) sistemos pirma lygtis tampa lygtimi

$$da_{11}x_1 + 0 \cdot x_2 = a_{11}(c_1a_{22} - a_{12}c_2).$$

Padalijus iš a_{11} ir pažymėjus

$$d_1 = c_1a_{22} - a_{12}c_2,$$

jį įgyja pavidalą $d_1x_1 + 0 \cdot x_2 = d_1$.

Taip vietoj (15) gauname ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} dx_1 + 0 \cdot x_2 = d_1, \\ 0 \cdot x_1 + dx_2 = d_2, \end{cases} \quad (17)$$

iš kurios išplaukia, jog skaičių

$$x_1 = \frac{d_1}{d} \quad \text{ir} \quad x_2 = \frac{d_2}{d} \quad (18)$$

pora $\left(\frac{d_1}{d}; \frac{d_2}{d}\right)$ yra vienintelis (13) sistemos sprendinys.

Šiose sprendinio komponenčių x_1 ir x_2 formulėse

$$d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (19)$$

$$d_1 = c_1a_{22} - a_{12}c_2, \quad (20)$$

$$d_2 = a_{11}c_2 - c_1a_{21}. \quad (21)$$

Tęsdami (13) lygčių sistemos sprendimo analizę, sugrįžkime prie (15) sistemos ir aptarkime atvejį, kai $d = 0$.

Šiuo atveju (15) sistema bus pavidalo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = d_2. \end{cases}$$

Aišku, kad ji neturės nė vieno sprendinio, jei $d_2 \neq 0$. O atveju $d_2 = 0$ ji turės be galo daug sprendinių,

kurių aibė sutaps su tiesinės lygties $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1$ sprendinių aibe $\left(r; \frac{1}{a_{12}}(c_1 - a_{11} \cdot r)\right)$, $r \in \mathbb{R}$;

čia turime mintyje pradinę prielaidą, jog $a_{11} \neq 0$ ir $a_{12} \neq 0$.

Apibendrinant atliktą (13) sistemos sprendimą, galima padaryti tokias išvadas:

1) kvadratinė tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais (13) sistema turi vienintelį sprendinį $\left(\frac{d_1}{d}; \frac{d_2}{d}\right)$, jei $d \neq 0$;

2) (13) sistema turi be galo daug sprendinių, jei $d = 0$ ir $d_1 = d_2 = 0$;

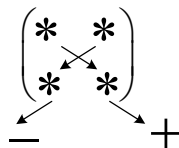
3) (13) sistema neturi nė vieno sprendinio, jei $d = 0$ ir bent vienas iš skaičių d_1 ir d_2 nelygus nuliui.

Skaičiai d , d_1 ir d_2 čia vadinami (13) lygčių sistemos (antros eilės) *determinantais*. Jų skaičiavimo (19)–(21) formulėms lengviau prisiminti, pakaktų sudaryti tris 2×2 matmenų skaičių

lenteles (*matricas*)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{pmatrix}$$

ir pagal jas apskaičiuoti d , d_1 ir d_2 reikšmes taikant schemą



Skaičiuojant praktiškai, paprastai rašoma taip:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \quad (19a)$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix} = c_1a_{22} - a_{12}c_2; \quad (20a)$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix} = a_{11}c_2 - c_1a_{21}. \quad (21a)$$

3 pavyzdys. Išspręskime kvadratinę tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} 5x + 7y = 1, \\ 4x - 13y = 38. \end{cases}$$

Sprendimas. Sudarykime tris matricas: $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -13 \end{pmatrix}$, $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 38 & -13 \end{pmatrix}$, $A_y = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 38 \end{pmatrix}$

ir apskaičiuokime jų determinantus (žymėdami atitinkamai d , d_x ir d_y). Gausime:

$$d = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -13 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-13) - 7 \cdot 4 = -65 - 28 = -93,$$

$$d_x = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 38 & -13 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-13) - 7 \cdot 38 = -13 - 266 = -279,$$

$$d_y = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 38 \end{vmatrix} = 5 \cdot 38 - 1 \cdot 4 = 190 - 4 = 186.$$

Vadinasi, $x = \frac{d_x}{d} = \frac{-279}{-93} = 3$, $y = \frac{d_y}{d} = \frac{186}{-93} = -2$, o pora $(3; -2)$ yra lygčių sistemos sprendinys.

Ats.: $(3; -2)$.

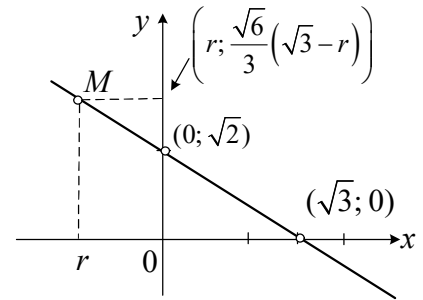
4 pavyzdys. Išspręskime kvadratinę tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = \sqrt{6}, \\ 2\sqrt{3} \cdot x + 3\sqrt{2} \cdot y = 6. \end{cases} \quad (22)$$

Sprendimas. Apskaičiuokime tris determinantus:

$$d = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 3\sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad d_x = \begin{vmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{3} \\ 6 & 3\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad \text{ir} \quad d_y = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} & 6 \end{vmatrix}.$$

Gausime, kad $d = 0$, $d_x = 0$ ir $d_y = 0$. Vadinas, (22) sistema turi be galo daug sprendinių. O kokia jų aibė? Imkim ir padauginim pirmą lygtį iš $\sqrt{6}$ – gausim antrą lygtį. Vadinas, ir viena, ir kita lygtis apibrėžia tą pačią tiesę (žr. 2 pav.), einančią per taškus $(\sqrt{3}; 0)$ ir $(0; \sqrt{2})$. Todėl (22) sistemos sprendinių aibę sudaro realiųjų skaičių poros $\left(r; \frac{\sqrt{6}}{3}(\sqrt{3}-r)\right)$, $r \in \mathbb{R}$.



2 pav.

$$\text{Ats.: } \left(r; \frac{\sqrt{6}}{3}(\sqrt{3}-r)\right), r \in \mathbb{R}.$$

7. O kas toliau? Toliau – kvadratinė tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistema ir jos bendrojo sprendinio formulės paieška. Tada – kvadratinė tiesinių lygčių su dar didesniu nežinomųjų skaičiumi. Ir vis ilgesni, painesni skaičiavimai, kuriuose visai nesunku pasiklysti.

Toliau – neišvengiamai artima pažintis su matricomis, jų sudėtimi, daugyba, įvairiais matricų tiesiniais dariniais, su kvadratinės matricos determinanto savybėmis, kol atsiras gebėjimas rasti kvadratinės matricos A atvirkštinę matricą A^{-1} , kol ateis supratimas, kad bet kurią kvadratinę tiesinių lygčių sistemą įmanoma užrašyti pavidalu $Ax = c$, o jos sprendinį – formule $x = A^{-1}c$.

Vis dėlto ne čia padėkime paskutinį tašką. Pažintį su determinantų taikymu pratęskime mokydami spręsti kvadratinę tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3. \end{cases} \quad (23)$$

Jos bendrąjį sprendinį $(x_1; x_2; x_3)$ galima užrašyti keturių kvadratinių matricų

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{pmatrix}.$$

determinantais atitinkamai d , d_1 , d_2 ir d_3 , jei $d \neq 0$. Formulės tokios:

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \quad x_2 = \frac{d_2}{d}, \quad x_3 = \frac{d_3}{d}. \quad (24)$$

Bet determinantų skaičiavimas šiuo atveju gerokai sunkesnis:

$$\begin{aligned} d &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}), \end{aligned} \quad (25)$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & a_{23} \\ c_3 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & a_{22} \\ c_3 & a_{32} \end{vmatrix}, \quad (26)$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & a_{23} \\ c_3 & a_{33} \end{vmatrix} - c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & c_2 \\ a_{31} & c_3 \end{vmatrix}, \quad (27)$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & c_2 \\ a_{32} & c_3 \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & c_2 \\ a_{31} & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (28)$$

Atveju $d = 0$ gautume, kad (23) sistema arba turi be galo daug sprendinių, arba neturi nė vieno

sprendinio.

Sprendžiant konkrečius uždavinius tuo galima įsitikinti išsprendus lygčių sistemą eliminuojant nežinomuosius.

Išspręskime kelias tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemas ir tuo baikime pažintį su determinančių taikymu sprendžiant kvadratinės tiesinių lygčių sistemas.

5 pavyzdys. Išspręskime kvadratinę tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = -2, \\ -3x + y - 5z = 8, \\ x + 4y - 8z = 3. \end{cases} \quad (29)$$

Sprendimas. Iš pradžių apskaičiuokime sistemos lygčių koeficientų matricos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

determinantą d . Pagal (25) formulę,

$$\begin{aligned} d &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 2(1 \cdot (-8) - (-5) \cdot 4) - 3((-3) \cdot (-8) - (-5) \cdot 1) + ((-3) \cdot 4 - 1 \cdot 1) = \\ &= 2 \cdot 12 - 3 \cdot 29 + (-13) = 24 - 87 - 13 = -76. \end{aligned}$$

Kadangi $d \neq 0$, darome išvadą, jog (29) lygčių sistema turi vienintelį sprendinį $(x; y; z)$, kurio komponentės apskaičiuojamos pagal formules

$$x = \frac{d_1}{d}, \quad y = \frac{d_2}{d}, \quad z = \frac{d_3}{d};$$

čia

$$\begin{aligned} d_1 &= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= -2(1 \cdot (-8) - (-5) \cdot 4) - 3(8 \cdot (-8) - (-5) \cdot 3) + (8 \cdot 4 - 1 \cdot 3) = \\ &= -2 \cdot 12 - 3 \cdot (-49) + 29 = -24 + 147 + 29 = 152, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 8 & -5 \\ 1 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 2(8 \cdot (-8) - (-5) \cdot 3) + 2((-3) \cdot (-8) - (-5) \cdot 1) + ((-3) \cdot 3 - 8 \cdot 1) = \\ &= 2 \cdot (-49) + 2 \cdot 29 - 17 = -98 + 58 - 17 = -57, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 2(1 \cdot 3 - 8 \cdot 4) - 3((-3) \cdot 3 - 8 \cdot 1) - 2((-3) \cdot 4 - 1 \cdot 1) = \\ &= 2 \cdot (-29) - 3 \cdot (-17) - 2 \cdot (-13) = -58 + 51 + 26 = 19. \end{aligned}$$

$$\text{Vadinasi, } x = \frac{152}{-76} = -2, \quad y = \frac{-57}{-76} = \frac{3}{4}, \quad z = \frac{19}{-76} = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Ats.: } \left(-2; \frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\right).$$

6 pavyzdys. Išspręskime kvadratinę tiesinių lygčių sistemą su trimis nežinomaisiais

$$\begin{cases} x+3y-7z=11, \\ 2x-y+2z=-1, \\ 3x+2y-5z=7. \end{cases} \quad (30)$$

Sprendimas. Šios sistemos lygčių koeficientų matrica yra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Skaičiuodami jos determinantą (pagal (25) formulę), gauname, kad

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + (-7) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 3 \cdot (-16) - 7 \cdot 7 = 0.$$

Kadangi $d=0$, nėra galimybės taikyti (24) formulį, todėl (30) lygčių sistemos sprendimą tęskime taikydami nežinomųjų eliminavimo metodą. Iš pradžių eliminuokime x iš antros ir iš trečios lygties, tuo tikslu antrą lygtį pakeisdami tiesiniu dariniu $L_2 + (-2)L_1$, o trečią lygtį – tiesiniu dariniu $L_3 + (-3)L_1$. Gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} x+3y-7z=11, \\ 0 \cdot x - 7y + 16z = -23, \\ 0 \cdot x - 7y + 16z = -26. \end{cases}$$

Eliminuodami y trečią lygtį pakeiskime tiesiniu dariniu $L_3 + (-1)L_2$. Gausime ekvivalenčią tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+3y-7z=11, \\ 0 \cdot x - 7y + 16z = -23, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -3. \end{cases} \quad (31)$$

Žinoma, trečia lygtis neturi nė vieno sprendinio. Vadinasi, (31) sistema, taigi ir (30), sprendinių neturi.
Ats.: $\emptyset$.

7 pavyzdys. Išspręskime tiesinių lygčių sistemą su trimis nežinomaisiais

$$\begin{cases} 5x-7y+4z=2, \\ -x+3y+z=3, \\ 7x-13y+2z=-4. \end{cases} \quad (32)$$

Sprendimas. Iš pradžių apskaičiuokime sistemos lygčių koeficientų matricos $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 7 & -13 & 2 \end{pmatrix}$

determinantą d :

$$d = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 7 & -13 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -13 & 2 \end{vmatrix} - (-7) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -13 \end{vmatrix} = 5 \cdot 19 + 7 \cdot (-9) + 4 \cdot (-8) = 95 - 63 - 32 = 0.$$

Toliau taikykime nežinomųjų eliminavimo metodą. Pirmą (32) sistemos lygtį pakeiskime tiesiniu dariniu $L_1 + 5L_2$, o trečią – tiesiniu dariniu $L_3 + 7L_2$.

Gausime ekvivalenčią tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 8y + 9z = 17, \\ -x + 3y + z = 3, \\ 0 \cdot x + 8y + 9z = 17. \end{cases} \quad (33)$$

Matome, kad trečia lygtis sutampa su pirma lygtimi, todėl (33) sistema, taigi ir (32), yra ekvivalenti dviejų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemai

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 3, \\ 8y + 9z = 17. \end{cases} \quad (34)$$

Iš trečios lygties išplaukia, kad

$$y = \frac{1}{8}(17 - 9z).$$

Tada

$$-x + 3 \cdot \frac{1}{8}(17 - 9z) + z = 3 \Rightarrow -x + \frac{51}{8} - \frac{19}{8}z = 3 \Rightarrow x = \frac{27}{8} - \frac{19}{8}z = \frac{1}{8}(27 - 19z).$$

Pasirinkę $z = r$, $r \in \mathbb{R}$, gausime trejetą $\left(\frac{1}{8}(27 - 19r); \frac{1}{8}(17 - 9r); r\right)$, kuris tenkina ne tik (34),

bet ir (32) lygčių sistemą.

Vadinasi, (32) sistema turi be galo daug sprendinių, kuriuos galima užrašyti pavidalu $\left(\frac{1}{8}(27 - 19r); \frac{1}{8}(17 - 9r); r\right)$, $r \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ats.: } \left(\frac{1}{8}(27 - 19r); \frac{1}{8}(17 - 9r); r\right), \quad r \in \mathbb{R}.$$

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + (\sqrt{5} - \sqrt{3})y = 1, \\ (\sqrt{6} + 2)x + (\sqrt{10} - \sqrt{6})y = 2. \end{cases}$$

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \sqrt{5} \cdot x + \sqrt{2} \cdot y = 6, \\ 5\sqrt{2} \cdot x + 2\sqrt{5} \cdot y = 6\sqrt{10}. \end{cases}$$

3. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} (\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)y = 2\sqrt{2}, \\ (2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)x + (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)y = \sqrt{3}. \end{cases}$$

4. Apskaičiuokite kvadratinės matricos

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 1 + \sqrt{2} & 1 + \sqrt{3} & 1 + \sqrt{5} \\ 2 + \sqrt{2} & 2 + \sqrt{3} & 2 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{determinantą.}$$

5. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 8, \\ 3x - 2y - 3z = -3, \\ 2x + 5y + 8z = 27. \end{cases}$$

6. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x - 2y + 9z = -7, \\ -2x + y - 4z = 5, \\ 3x - 6y - 8z = 12. \end{cases}$$

7. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - 3y + z = 1, \\ 2x + y + 2z = 7. \end{cases}$$

8. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2, \\ 3x - y + 2z = 10, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases}$$

9. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y + z = 5, \\ 2x + 3y + 4z = 14, \\ x - y + 3z = 3, \\ x + 4y + z = 11. \end{cases}$$

10. Eliminudami nežinomuosius išspręskite lygčių sistemą su keturiais nežinomaisiais

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 4, \\ x_2 + x_3 & = 5, \\ 2x_1 & + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 & + 2x_4 = -4. \end{cases}$$

V. RODIKLINĖS LYGTYS IR NELYGYBĖS

Teorinę medžiagą parengė ir penktąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis

Nagrinėdami šią temą pradėkime nuo sąvokų. Prisiminkime, kad *rodikline lygtimi* (taip pat *rodikline nelygybe*) vadinama tokia lygtis (nelygybė), kurios nežinomas yra laipsnio rodiklyje.

Rodiklinė lygtis

$$a^x = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \quad (1)$$

vadinama *paprasčiausiąja rodikline lygtimi*.

Paprasčiausiosios rodiklinės nelygybės yra

$$a^x > b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \quad (2)$$

ir

$$a^x < b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0. \quad (3)$$

Rodiklinės lygties $a^x = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$, *sprendiniu* vadinamas realusis skaičius x , kuriam esant skaičių a pakėlus laipsniu x gaunamas skaičius b . Beje, toks skaičius x yra vadinamas *skaičiaus b logaritmu pagrindu a* ir žymimas simboliu $\log_a b$ (čia visada turi būti $a > 0, \quad a \neq 1$ ir $b > 0$). Taigi (1) lygties sprendinys yra

$$x = \log_a b. \quad (4)$$

Rodiklinės nelygybės $a^x > b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$, ($a^x < b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$) *sprendiniu* vadinamas realusis skaičius, kuriam esant skaičius a^x yra didesnis už skaičių b (mažesnis už skaičių b).

Išspręsti rodiklinę nelygybę

$$a^x \geq b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \quad (5)$$

reiškia rasti bendrą lygties $a^x = b$ ir nelygybės $a^x > b$ sprendinių aibę. Analogiškai suvokiamas ir uždavinys

$$a^x \leq b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0. \quad (6)$$

Gilinantį rodiklinių lygčių bei rodiklinių nelygybių sprendimą pravartu ne tik pakartoti, bet ir iš naujo apmąstyti svarbiausias realiojo skaičiaus laipsnio savybes:

$$\begin{aligned} a^{m+n} &= a^m \cdot a^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (a^{-1})^m = \left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1}{a^m}, \\ (a \cdot b)^m &= a^m \cdot b^m, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = (a \cdot b^{-1})^m = a^m \cdot (b^{-1})^m = \frac{a^m}{b^m}; \end{aligned} \quad (7)$$

čia $a > 0, \quad b > 0, \quad m$ ir n realieji skaičiai, o a^{-1} ir b^{-1} – skaičių a ir b atvirkštiniai skaičiai.

Sprendžiant rodiklines nelygybes labai svarbu neužmiršti, kad:

1) jei $0 < a < 1$, tai

$$a^m > a^n \quad \text{tik kai} \quad m < n; \quad (8)$$

2) jei $a > 1$, tai

$$a^m > a^n \quad \text{tik kai} \quad m > n. \quad (9)$$

Iš pastarųjų dviejų laipsnio savybių išplaukia, kad funkcija

$$y = a^x, \quad 0 < a < 1,$$

yra *mažėjančioji funkcija* bet kuriame realiųjų skaičių intervale, o funkcija

$$y = a^x, \quad a > 1,$$

yra *didėjančioji funkcija* bet kuriame realiųjų skaičių intervale.

1 pavyzdys. Išspręskime:

a) rodiklinę lygtį

$$2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} = 16\sqrt{2}; \quad (10)$$

b) rodiklinę nelygybę

$$2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} < 16\sqrt{2}; \quad (11)$$

c) rodiklinę nelygybę

$$2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} > 16\sqrt{2}. \quad (12)$$

Sprendimas. Kadangi $16\sqrt{2} = 2^{\frac{9}{2}}$, tai (10) lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$x^2 - 6x - \frac{5}{2} = \frac{9}{2},$$

kuri turi du sprendinius: $x = -7$ ir $x = 1$.

Vadinasi, (10) lygtis turi du sprendinius – sveikuosius skaičius -7 ir 1 .

Kadangi $2 > 1$, tai (11) nelygybė yra ekvivalenti nelygybei

$$x^2 - 6x - \frac{5}{2} < \frac{9}{2},$$

taigi kvadratinei nelygybei $x^2 - 6x - 7 < 0$, kurios sprendinių aibė yra intervalas $(-7; 1)$.

Analogiškai (12) nelygybė yra ekvivalenti kvadratinei nelygybei $x^2 - 6x - 7 > 0$, kurios sprendinių aibė yra intervalų $(-\infty; -7)$ ir $(1; +\infty)$ sąjunga $(-\infty; -7) \cup (1; +\infty)$.

Ats.: a) $\{-7; 1\}$; b) $(-7; 1)$; c) $(-\infty; -7) \cup (1; +\infty)$.

2 pavyzdys. Išspręskime:

a) rodiklinę lygtį

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16}; \quad (13)$$

b) rodiklinę nelygybę

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} < \frac{9}{16}; \quad (14)$$

c) rodiklinę nelygybę

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} > \frac{9}{16}. \quad (15)$$

Sprendimas. Kadangi

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1-\frac{1}{x}}$$

ir

$$\frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

tai sprendžiamą lygtį ir nelygybes galima užrašyti taip:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1-\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2, \quad (13a)$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1-\frac{1}{x}} < \left(\frac{3}{4}\right)^2, \quad (14a)$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1-\frac{1}{x}} > \left(\frac{3}{4}\right)^2. \quad (15a)$$

Spręsdami (13a) lygtį gauname:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1-\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow x-1-\frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0, x \neq 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \text{ arba } x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Vadinasi, (13) lygtis turi du sprendinius – realiuosius skaičius $\frac{3 - \sqrt{13}}{2}$ ir $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$.

Sprendžiant (14a) ir (15a) nelygybes svarbu atkreipti dėmesį į tai, kad laipsnio $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1-\frac{1}{x}}$

pagrindas $\frac{3}{4}$ yra intervalui (0; 1) priklausantis skaičius. Todėl (žr. (8)) (14a) nelygybė yra ekvivalenti nelygybei

$$x - 1 - \frac{1}{x} > 2, \quad (14b)$$

o (15a) nelygybė yra ekvivalenti nelygybei

$$x - 1 - \frac{1}{x} < 2. \quad (15b)$$

Spręsdami (14b) nelygybę gauname:

$$x - 1 - \frac{1}{x} > 2 \Rightarrow \frac{x^2 - 3x - 1}{x} > 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 < 0, x < 0 \text{ arba } x^2 - 3x - 1 > 0, x > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}; 0\right) \text{ arba } x \in \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}; +\infty\right).$$

Matome, kad (14) nelygybės sprendinių aibė yra intervalų $\left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}; 0\right)$ ir $\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$

sąjunga $\left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$.

Spręsdami (15b) nelygybę gauname:

$$x - 1 - \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow x - 3 - \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 3x - 1}{x} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 1 < 0, x > 0 \text{ arba } x^2 - 3x - 1 > 0, x < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}; \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right), x > 0 \text{ arba}$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}; +\infty\right), x < 0 \Rightarrow x \in \left(0; \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right) \text{ arba } x \in \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right).$$

Vadinasi, (15) nelygybės sprendinių aibė yra intervalų $\left(0; \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)$ ir $\left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right)$ sąjunga

$$\left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(0; \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right).$$

$$\text{Ats.: a) } \left\{\frac{3 - \sqrt{13}}{2}; \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right\};$$

$$\text{b) } \left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}; +\infty\right);$$

$$\text{c) } \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(0; \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right).$$

3 pavyzdys. Išspręskime:

a) rodiklinę lygtį

$$2^x + 4^x = 8^x; \quad (16)$$

b) rodiklinę nelygybę

$$2^x + 4^x > 8^x; \quad (17)$$

c) rodiklinę nelygybę

$$2^x + 4^x < 8^x. \quad (18)$$

Sprendimas. Pažymėkime $t = 2^x$. Tada gausime, kad $4^x = t^2$, $8^x = t^3$. Taikydami šį keitinį iš pradžių išspręskime (16) lygtį, o paskui – (17) ir (18) nelygybes.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2^x + 4^x = 8^x &\Rightarrow \begin{cases} t + t^2 = t^3, \\ t = 2^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^3 - t^2 - t = 0, \\ t = 2^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t(t^2 - t - 1) = 0, \\ t = 2^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - t - 1 = 0, \\ t = 2^x \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ t = 2^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \\ t = 2^x \end{cases} \Rightarrow 2^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \log_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Matome, kad $\log_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ yra vienintelis (16) lygties sprendinys.

$$\begin{aligned} \text{b) } 2^x + 4^x > 8^x &\Rightarrow \begin{cases} t^3 - t^2 - t > 0, \\ t = 2^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t(t^2 - t - 1) > 0, \\ t = 2^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - t - 1 > 0, \\ t = 2^x \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} t \in \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right) \\ t = 2^x \end{cases} \Rightarrow 2^x \in \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right) \Rightarrow x \in \left(\log_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right). \end{aligned}$$

Taigi (17) nelygybės sprendinių aibė yra realiųjų skaičių intervalas $\left(\log_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

$$\begin{aligned} \text{c) } 2^x + 4^x < 8^x &\Rightarrow \begin{cases} t^3 - t^2 - t < 0, \\ t = 2^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t(t^2 - t - 1) < 0, \\ t = 2^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - t - 1 < 0, \\ t = 2^x \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} t \in \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \\ t = 2^x \end{cases} \Rightarrow 2^x \in \left(0; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow x \in \left(-\infty; \log_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

Gavome, kad (18) nelygybės sprendinių aibė yra realiųjų skaičių intervalas $\left(-\infty; \log_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

$$\text{Ats.: a) } \log_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \text{ b) } \left(\log_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right); \text{ c) } \left(-\infty; \log_2 \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

4 pavyzdys. Išspręskime rodiklinę nelygybę

$$6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x < 0. \quad (19)$$

Sprendimas. Kadangi

$$6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 6^x \left(6 \cdot \frac{4^x}{6^x} - 13 + 6 \cdot \frac{9^x}{6^x} \right) = 6^x \left(6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 13 + 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x \right),$$

tai (19) nelygybė yra ekvivalenti nelygybei

$$6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 13 + 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x < 0. \quad (19a)$$

Šią nelygybę spręskime taikydami keitinį

$$t = \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

Gausime:

$$6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 13 + 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x < 0 \Rightarrow \begin{cases} 6t - 13 + \frac{6}{t} < 0, \\ t = \left(\frac{2}{3}\right)^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{6t^2 - 13t + 6}{t} < 0, \\ t = \left(\frac{2}{3}\right)^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6t^2 - 13t + 6 < 0, \\ t = \left(\frac{2}{3}\right)^x. \end{cases} \quad (20)$$

Nelygybės $6t^2 - 13t + 6 < 0$ sprendinių aibei rasti reikia išspręsti kvadratinę lygtį $6t^2 - 13t + 6 = 0$. Gausime:

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{12} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12} \Rightarrow t = \frac{2}{3} \text{ arba } t = \frac{3}{2}.$$

Vadinasi, kvadratinės nelygybės $6t^2 - 13t + 6 < 0$ sprendinių aibė yra intervalas $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$.

Tęsdami (20) sistemos sprendimą gausime:

$$\begin{cases} 6t^2 - 13t + 6 < 0, \\ t = \left(\frac{2}{3}\right)^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \in \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right), \\ t = \left(\frac{2}{3}\right)^x \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3} < \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} < \left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Rightarrow x \in (-1; 1),$$

nes 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 1$, todėl $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{2}{3} \Rightarrow x < 1$

ir 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Rightarrow x = -1$, todėl $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Rightarrow x > -1$.

Matome, kad (19a) sistemos (taigi ir (19)) sprendinių aibė yra realiųjų skaičių intervalas $(-1; 1)$.
Ats.: $(-1; 1)$.

5 pavyzdys. Išspręskime rodiklinę lygtį

$$3^x \cdot 5^{x^2} = 15. \quad (21)$$

Sprendimas. Nesunku įsitikinti, kad $x = 1$ yra (21) lygties sprendinys.

Jei $x > 1$, tai $3^x > 3$ ir $5^{x^2} > 5$, todėl kiekviename intervalo $(1; +\infty)$ taške galioja nelygybė $3^x \cdot 5^{x^2} > 15$, o tai reiškia, kad intervale $(1; +\infty)$ (21) lygtis neturi sprendinių.

Jei $0 \leq x < 1$, tai $1 \leq 3^x < 3$ ir $1 \leq 5^{x^2} < 5$, todėl intervale $[0; 1)$ (21) lygtis taip pat neturi nė vieno sprendinio.

Dabar išsiaiškinkime, ar (21) lygtis turi sprendinių intervale $(-\infty; 0)$.

Padauginę iš 3^{-x} gauname ekvivalenčią lygtį

$$5^{x^2} = 15 \cdot 3^{-x}.$$

Ją spręskime taip:

$$5^{x^2} \cdot 5^{-x} = 15 \cdot 3^{-x} \cdot 5^{-x},$$

$$5^{x^2-x} = 15^{1-x},$$

$$5^{x(x-1)} = 15^{1-x},$$

$$\left(5^{x(x-1)}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \left(15^{1-x}\right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

Atkreipkime dėmesį į tai, kad kėlimas laipsniu $\frac{1}{x-1}$ čia yra korektiškas, nes $x \neq 1$. Toliau gauname:

$$5^x = 15^{-1} \Rightarrow 5^x = \frac{1}{15} \Rightarrow x = \log_5 \frac{1}{15}.$$

Realusis skaičius $\log_5 \frac{1}{15}$ yra (21) lygties sprendinys, priklausantis intervalui $(-\infty; 0)$.

$$\text{Ats.: } 1; \log_5 \frac{1}{15}.$$

Kitas (21) lygties sprendimo būdas.

$$3^x \cdot 5^{x^2} = 15 \Rightarrow \left(3^x \cdot 5^{x^2}\right) 15^{-x} = 15 \cdot 15^{-x} \Rightarrow 5^{x^2-x} = 15^{1-x}.$$

Jei $x = 1$, tai lygybė tikrai galioja (taigi $x = 1$ yra (21) lygties sprendinys).

Jei $x \neq 1$, tai

$$\left(5^{x^2-x}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \left(15^{1-x}\right)^{\frac{1}{x-1}} \Rightarrow 5^x = 15^{-1} \Rightarrow x = \log_5 \frac{1}{15}.$$

$$\text{Ats.: } 1; \log_5 \frac{1}{15}.$$

6 pavyzdys. Išspręskime rodiklinę lygtį

$$\left(\sqrt{8+2\sqrt{7}}\right)^x + \left(\sqrt{8-2\sqrt{7}}\right)^x = 4^x. \quad (22)$$

Sprendimas. Kadangi

$$8+2\sqrt{7} = 7+2\sqrt{7}+1 = (\sqrt{7}+1)^2 \quad \text{ir} \quad 8-2\sqrt{7} = 7-2\sqrt{7}+1 = (\sqrt{7}-1)^2,$$

tai

$$\left(\sqrt{8+2\sqrt{7}}\right)^x = (\sqrt{7}+1)^x \quad \text{ir} \quad \left(\sqrt{8-2\sqrt{7}}\right)^x = (\sqrt{7}-1)^x.$$

Todėl (22) lygtis yra ekvivalenti rodiklinei lygčiai

$$(\sqrt{7}+1)^x + (\sqrt{7}-1)^x = 4^x. \quad (23)$$

Ir dabar nesimato, koks keitinys galėtų tikti šiai lygčiai išspręsti. Užtat lengviau patikrinti, kad $x = 2$ yra lygties sprendinys.

Padaliję (23) lygtį iš 4^x gausime ekvivalenčią rodiklinę lygtį

$$\left(\frac{\sqrt{7}+1}{4}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}\right)^x = 1. \quad (24)$$

Matome, kad abiejų laipsnių pagrindai yra intervalui $(0; 1)$ priklausantys skaičiai, todėl suma

$$\left(\frac{\sqrt{7}+1}{4}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{7}-1}{4}\right)^x$$

yra didesnė už 1, jei $x \in (-\infty; 2)$, ir mažesnė už 1, jei $x \in (2; +\infty)$.

Vadinasi, $x = 2$ yra vienintelis (22) lygties sprendinys.

$$\text{Ats.: } 2.$$

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Išspręskite:

a) rodiklinę lygtį

$$4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x - 7 \cdot 3^{x+1} = 40;$$

b) rodiklinę nelygybę

$$0 < 4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x - 7 \cdot 3^{x+1} < 40.$$

2. Išspręskite:

a) rodiklinę lygtį

$$(0,5)^x + (0,25)^x = (0,125)^x;$$

b) rodiklinę nelygybę

$$(0,5)^x + (0,25)^x > (0,125)^x.$$

3. Išspręskite rodiklinę nelygybę

$$3^{x+1} < \frac{9^{4x^2}}{\sqrt{27}}.$$

4. Raskite natūraliųjų skaičių trejetą $(x; y; z)$, $x < y < z$, kuriam esant galioja lygybė:

a) $2^x + 2^y + 2^z = 328;$

b) $2^x + 2^y + 2^z = 172.$

5. Išspręskite rodiklinę lygtį

$$9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}.$$

6. Išspręskite rodiklinę lygtį

$$7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0.$$

7. Išspręskite rodiklinę nelygybę

$$5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x \geq 7 \cdot 10^x.$$

8. Išspręskite rodiklinę nelygybę

$$98 - 7^{x^2+5x-48} \geq 49^{x^2+5x-49}.$$

9. Išspręskite:

a) rodiklinę lygtį

$$(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 14;$$

b) rodiklinę nelygybę

$$(3 + \sqrt{2})^x + (3 - \sqrt{2})^x < 6.$$

10. Išspręskite rodiklinę lygtį

$$3^{x-1} + 5^{x-1} = 34.$$

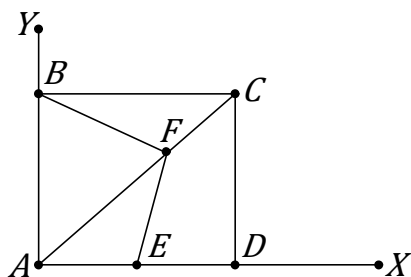
VI. KOORDINAČIŲ METODAS PLOKŠTUMOJE

Teorinę medžiagą parengė ir šeštąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

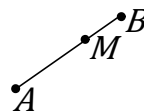
Geometrinį uždavinį sprendimą dažnai palengvina tinkamas koordinatinių (arba analizinių) metodų taikymas. Sprendžiant uždavinius šiuo metodu, svarbu tinkamai parinkti koordinatinių sistemą, nes nuo jos parinkimo priklauso uždavinio sprendimo racionalumas. Pastebėkime, kad koordinatinių metodų iš esmės galima išspręsti bet kurį geometrijos uždavinį. Nors dažnai koordinatinis metodas susijęs su daug skaičiavimų, bet, kai sunku surasti grynai geometrinį sprendimo metodą, koordinatinių taikymas dažnai būna vienintelis uždavinio sprendimo būdas. Pateiksime pavyzdžių.

1 pavyzdys. Taškas E yra kvadrato $ABCD$ kraštinės AD vidurys, taškas F yra su tašku A nesutampantis įstrižainės AC taškas, toks, kad tiesės EF ir FB yra statmenos. Rasime santykį $AF : FC$.

Sprendimas. Stačiakampės Dekarto koordinatinių sistemos pradžios tašką parenkame taške A , tiesės AD ir AB yra atitinkamai Ox ir Oy ašys (1 pav.). Kadangi uždavinio sąlygoje nėra duoti jokių atkarpų ilgiai, tai pasirinkime kvadrato kraštinės ilgį lygų vienetui, tuomet kvadrato viršūnių koordinatės yra $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$, $D(1,0)$. Kadangi taškas E yra atkarpos AD vidurys, tai $E(\frac{1}{2}, 0)$. Tiesės AC lygtis $y = x$, todėl taško F koordinatės $F(m, m)$, čia $m \in (0, \sqrt{2})$. Rasime vektorių $\overrightarrow{EF}$ ir $\overrightarrow{FB}$ koordinatas, iš vektoriaus galo koordinatinių atimdami jo pradžios koordinatas: $\overrightarrow{EF} = (m - \frac{1}{2}, m)$, $\overrightarrow{FB} = (-m, 1 - m)$. Pagal sąlygą vektoriai $\overrightarrow{EF}$ ir $\overrightarrow{FB}$ yra statmenieji, todėl jų skaliarinė sandauga lygi nuliui: $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FB} = (m - \frac{1}{2})(-m) + m(1 - m) = 0$. Iš čia $m(1 - m - m + \frac{1}{2}) = 0$. Kadangi taškai A ir F yra skirtingi, tai $m \neq 0$, taigi $\frac{3}{2} - 2m = 0$, $m = \frac{3}{4}$. Iš čia seka, kad $F(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, todėl $AF = \frac{3}{4}AC$, taigi $AF : FC = 3 : 1$.



1 pav.



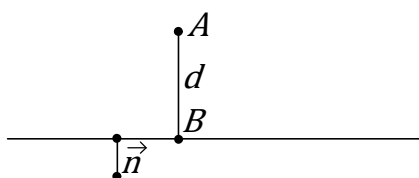
2 pav.

Sakykime, kad $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$ yra du skirtingi plokštumos taškai. Taškas $M(x, y)$ yra tiesėje AB tada ir tik tada, kai vektoriai $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{AB}$ yra kolinearieji (2 pav.), o tai reiškia, kad jų koordinatės yra proporcingos. Kadangi $\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1)$, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, tai šių vektorių kolinearumo sąlyga $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Taigi tiesės AB taško M koordinatėms yra teisinga ši lygybė. Atvirkščiai, jei taško M koordinatėms (x, y) teisinga ši lygybė, tai vektoriai $\overrightarrow{AM}$ ir $\overrightarrow{AB}$ yra kolinearieji, taigi taškas M yra tiesėje AB . Taigi gautoji lygtis yra per du taškus einančios tiesės lygtis. Pertvarkome ją $x(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1) = 0$ ir pažymime $A = y_2 - y_1$, $B = x_1 - x_2$, $C = -Ax_1 - By_1$, tuomet gauname tokią tiesės lygtį: $Ax + By + C = 0$.

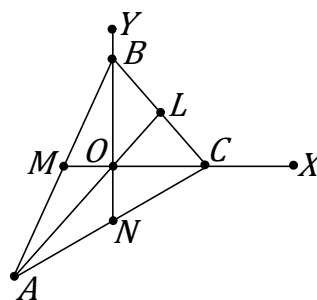
Nagrinėkime vektorių $\vec{N}$, kurio koordinatės (A, B) . Kadangi yra teisinga lygybė $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = (y_2 - y_1)(x_2 - x_1) + (x_1 - x_2)(y_2 - y_1) = 0$, tai vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\vec{N}$ yra statmenieji,

taigi tiesės lygtyje koeficientai A ir B yra tiesei statmenojų vektoriaus koordinatės. Todėl dvi tiesės $a: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ir $b: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ yra statmenos, kai joms statmenųjų vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, o tiesės a ir b yra lygiagrečios, kai jų statmenieji vektoriai yra kolinearieji: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Iš čia išplaukia, kad tiesės b , einančios per tašką $A(x_0, y_0)$ statmenai tiesei $a: Ax + By + C = 0$, lygtis yra $b: -B(x - x_0) + A(y - y_0) = 0$, o tiesės c , einančios per tašką A ir lygiagrečios su tiese a , lygtis yra $c: A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Sakykime, kad taškas $A(x_0, y_0)$ nėra tiesėje $a: Ax + By + C = 0$, statmuo iš taško A tiesei a kerta tiesę a taške B (3 pav.). Atkarpos AB ilgis yra lygus atstumui d nuo taško A iki tiesės a . Jei $B(x_1, y_1)$ – taško B koordinatės, tai $\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Nagrinėkime vienetinį vektorių (vektorių, kurio ilgis lygus vienetui) $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \right)$, kuris statmenas tiesei a . Šis vektorius su vektoriumi $\overrightarrow{AB}$ sudaro kampą, lygų arba 0° , arba 180° , taigi jo kosinusas lygus ± 1 . Tuomet skaliarinė sandauga $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}| \cdot (\pm 1) = \pm d$, taigi $|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}| = d$. Kita vertus $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = (x_1 - x_0) \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} + (y_1 - y_0) \cdot \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{-Ax_0 - By_0 + (Ax_1 + By_1)}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{(-Ax_0 - By_0 - C)}{\sqrt{A^2+B^2}}$, paskutinė lygybė seka iš to, kad taškas B yra tiesėje a , todėl jo koordinatės tenkina tiesės a lygtį. Iš gautųjų lygybių išplaukia atstumo nuo taško A iki tiesės a formulė $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.



3 pav.



4 pav.

2 pavyzdys. Trikampio ABC pusiaukraštinės BN ir CM yra statmenos, jų ilgiai $BN = 8$, $CM = 12$. Rasime trikampio ABC plotą.

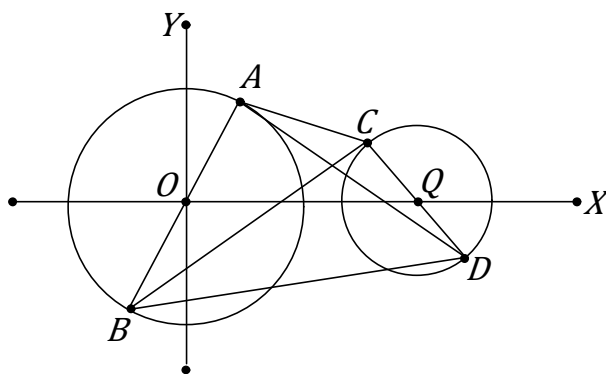
Sprendimas. Sakykime, kad trikampio pusiaukraštinės susikerta taške O . Parenkame koordinatinių sistemą taip, kad taškas O yra jos pradžia, Ox ir Oy ašys yra atitinkamai tiesės CM ir BN (4 pav.). Kadangi pagal pusiaukraštinių savybę $CO : OM = BO : ON = 2 : 1$, tai $CO = 8$, $OM = 4$, $BO = \frac{16}{3}$, $ON = \frac{8}{3}$. Tuomet trikampio viršūnių koordinatės $B\left(0, \frac{16}{3}\right)$, $C(8, 0)$. Kraštinės BC vidurio taško L koordinatės yra lygios taškų B ir C koordinatinių sumų pusei: $x_L = \frac{1}{2}(x_B + x_C)$, $y_L = \frac{1}{2}(y_B + y_C)$, taigi $L\left(4, \frac{8}{3}\right)$. Kadangi $LO : OA = 1 : 2$, tai $\overrightarrow{LA} = 3\overrightarrow{LO}$. Jei taško A koordinatės $A(x, y)$, tai iš šios lygybės gauname, kad $(x - 4, y - \frac{8}{3}) = 3\left(0 - 4, 0 - \frac{8}{3}\right)$, taigi $x - 4 = -12$, $y - \frac{8}{3} = -8$. Iš čia gauname viršūnės A koordinates $A\left(-8, -\frac{16}{3}\right)$. Tiesės BC lygtis $\frac{x-0}{8-0} = \frac{y-\frac{16}{3}}{0-\frac{16}{3}}$, taigi $BC: 2x + 3y - 16 = 0$, o kraštinės BC ilgis $BC = \sqrt{(8-0)^2 + \left(0 - \frac{16}{3}\right)^2} = \frac{8}{3}\sqrt{13}$. Trikampio ABC aukštinės iš viršūnės A ilgis h lygus taško A atstumui iki tiesės BC . Pagal gautąją

atstumo nuo taško iki tiesės formulę randame, kad $h = \frac{|2 \cdot (-8) + 3 \cdot (-\frac{16}{3}) - 16|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{48}{\sqrt{13}}$. Todėl trikampio plotas $S = \frac{1}{2} BC \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \sqrt{13} \cdot \frac{48}{\sqrt{13}} = 64$.

Sakykime, kad plokštumoje duotas apskritimas, kurio centras $O(x_0, y_0)$, o spindulio ilgis lygus R . Taškas $M(x, y)$ yra šio apskritimo taškas, tada ir tik tada, kai jo atstumas iki taško O lygus spindulio ilgiui R : $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$. Šią lygybę perrašome taip $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ – tai yra apskritimo lygtis.

3 pavyzdys. Plokštumoje duoti du apskritimai. Įrodysime, kad atstumų kvadratų nuo vieno apskritimo skersmens galų iki kito apskritimo skersmens galų suma vienoda visiems tų apskritimų skersmenims.

Sprendimas. Sakykime, kad vieno apskritimo centras yra taškas O , jo spindulio ilgis lygus R , kito apskritimo centras yra taškas Q , spindulio ilgis r , o atstumas tarp jų centrų lygus $OQ = m$. Parenkame koordinačių sistemą taip, kad jos pradžios taškas būtų taškas O , o taškas Q būtų Ox ašyje (5 pav.). Tuomet $O(0, 0)$, $Q(m, 0)$, pirmojo apskritimo lygtis $x^2 + y^2 = R^2$, antrojo $(x - m)^2 + y^2 = r^2$. Jei taškas $A(a, b)$ yra pirmojo apskritimo taškas, tai kitas skersmens galas $B(-a, -b)$. Jei CD yra kuris nors kito apskritimo skersmuo, o $C(c, d)$, $D(x, y)$, tai iš to, kad taškas Q yra atkarpos CD vidurys, turime lygybes $m = \frac{c+x}{2}$, $0 = \frac{d+y}{2}$, iš kurių randame $x = 2m - c$, $y = -d$, taigi $D(2m - c, -d)$. Ieškomoji kvadratų suma $AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2 + (a - 2m + c)^2 + (b + d)^2 + (-a - c)^2 + (-b - d)^2 + (-a - 2m + c)^2 + (-b + d)^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + 8m^2 - 8mc$. Kadangi taškas A yra pirmame apskritime, tai $a^2 + b^2 = R^2$, o kadangi taškas C yra kitame apskritime, tai $(c - m)^2 + d^2 = r^2$, taigi $c^2 + d^2 = r^2 - m^2 + 2cm$. Pasinaudoję šiomis lygybėmis gauname, kad $AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 = 4(R^2 + r^2 - m^2)$, o tai ir reiškia, kad ieškomoji kvadratų suma nepriklauso nuo skersmenų AB ir CD parinkimo.

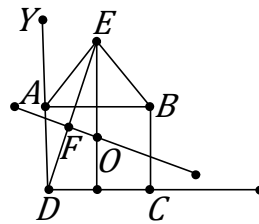


5 pav.

4 pavyzdys. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 1, trikampis AEB yra lygiakraštis, taškas E yra kvadrato išorėje. Rasime apie trikampį DEC apibrėžto apskritimo spindulį.

Sprendimas. Stačiakampės koordinačių sistemos pradžios tašką parinkime taške D ir sakykime, kad kvadrato viršūnės C ir A yra atitinkamai Ox ir Oy ašyse (6 pav.). Tuomet $D(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(1, 1)$, $C(1, 0)$. Kadangi lygiakraščio trikampio, kurio kraštinės ilgis lygus 1, aukštinės ilgis lygus $\frac{\sqrt{3}}{2}$, tai taško E koordinatės $E(\frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$. Apie trikampį apibrėžto apskritimo centras yra trikampio kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas, todėl reikia parašyti kraštinių DC ir DE vidurio statmenų lygtis. Akivaizdu, kad kraštinės CD vidurio statmens lygtis $x = \frac{1}{2}$. Parašome kraštinės ED lygtį: $\frac{x-0}{\frac{1}{2}-0} = \frac{y-0}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$, taigi turime $ED: (2 + \sqrt{3})x - y = 0$. Atkarpos ED vidurio taškas

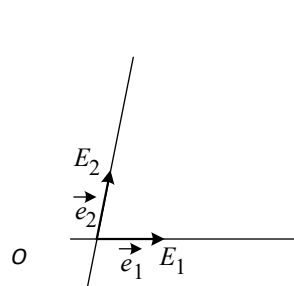
$F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, todėl atkarpos ED vidurio statmens lygtis yra $1\left(x - \frac{1}{4}\right) + (2 + \sqrt{3})\left(y - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 0$, t.y. $x + (2 + \sqrt{3})y - 2 - \sqrt{3} = 0$. Iš sistemos $\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ x + (2 + \sqrt{3})y - 2 - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$ randame apie trikampį apibrėžto apskritimo centro koordinatas $O\left(\frac{1}{2}, \frac{3+2\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})}\right)$. Tuomet ieškomasis spindulys lygus atkarpos OD ilgiui: $OD^2 = \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})} - 0\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{21+1\sqrt{3}}{4(7+4\sqrt{3})} = \frac{1}{4} + \frac{3(7+4\sqrt{3})}{4(7+4\sqrt{3})} = 1$. Taigi ieškomojo apskritimo spindulys lygus 1.



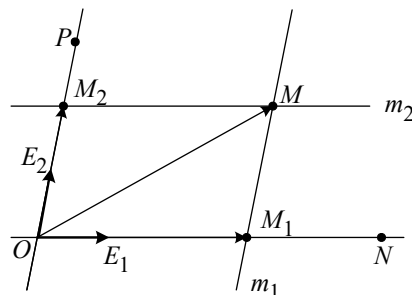
6 pav.

Iki šiol nagrinėjome taip vadinamas stačiakampes Dekarto koordinatinių sistemas, taip pavadintas žymaus prancūzų matematiko ir filosofo Rene Dekarto (Rene Descartes, 1596 – 1650) garbei. Bet plokštumos koordinatinių sistemas gali būti apibrėžiamos įvairiais būdais. Nustatyti plokštumos koordinatinių sistemą – tai nurodyti tokią taisyklę, kuria bet kuriam plokštumos taškui M vienareikšmiškai priskiriama realiųjų skaičių pora (x, y) – taško M koordinatės. Panagrinėsime vieną iš tokių plokštumos koordinatinių sistemų – afiniąją koordinatinių sistemą, kurios atskiras atvejis yra stačiakampė Dekarto koordinatinių sistema.

Plokštumos *afiniąją koordinatinių sistemą* arba *afiniuoju reperiu* vadiname plokštumos taškų, nepriklausančių vienai tiesei, trejetą (O, E_1, E_2) . Taškas O vadinamas *koordinatinių sistemos pradžios tašku*, tiesės OE_1 ir OE_2 vadinamos *koordinatinių ašimis* (atitinkamai *abscisių* ir *ordinatinių ašimis*) (7 pav.) Vektoriai $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ ir $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ vadinami šios koordinatinių sistemos *baziniais* (arba *vienetiniiais*) *vektoriais*. Išsiaiškinsime, kaip šioje koordinatinių sistemoje nustatomos plokštumos taško M koordinatės. Nubrėžiame vektorių $\overrightarrow{OM}$, iš taško M brėžiame tieses m_1 ir m_2 , lygiagrečias atitinkamai su koordinatinių ašimis OE_2 ir OE_1 (8 pav.). Sakykime, kad tiesės OE_1 ir m_1 kertasi taške M_1 , o tiesės OE_2 ir m_2 – taške M_2 . Kadangi taškai O, E_1 ir M_1 yra vienoje tiesėje, tai vektoriai $\overrightarrow{OE_1}$ ir $\overrightarrow{OM_1}$ yra kolinearieji, todėl egzistuoja skaičius x , kad $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{e}_1$. Analogiškai vektoriai $\overrightarrow{OE_2}$ ir $\overrightarrow{OM_2}$ yra kolinearieji, todėl egzistuoja skaičius y , kad $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{e}_2$. Pagal vektorių sudėties lygiagretinio taisyklę $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, taigi $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Skaičiai (x, y) yra taško M



7 pav.



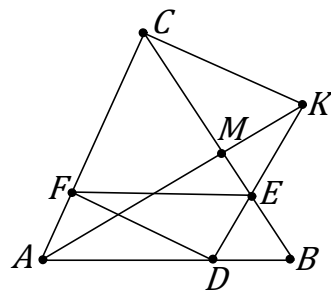
8 pav.

koordinatės koordinačių sistemoje (O, E_1, E_2) , žymima $M(x, y)$. Akivaizdu, kad $O(0, 0)$, $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$. Jei taškas N yra abscisių ašyje, tai $N(x, 0)$, o jei taškas P yra ordinačių ašyje, tai $P(0, y)$, abscisių ašies OE_1 lygtis yra $y = 0$, o ordinačių ašies OE_2 lygtis $x = 0$.

Pastebėkime, kad tiesės per du taškus lygtis ir afiniosiose koordinatėse užrašoma tokiu pačiu pavidalu, kaip ir dekartinėse koordinatėse, lygiagretumo sąlyga irgi yra tokia pati. Bet statmenumo sąlygos, atstumo tarp dviejų taškų ir atstumo nuo taško iki tiesės formulės afiniosiose koordinatėse yra gerokai sudėtingesnės. Todėl afiniosios koordinačių sistemos tinka taikyti tais atvejais, kai nereikia skaičiuoti atstumų ir kampų didumų.

5 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinėse AB, BC, AC atitinkamai pažymėti taškai D, E, F taip, kad keturkampis $ADEF$ yra lygiagretainis. Taškas M yra kraštinės BC vidurio taškas, tiesės AM ir DE susikerta taške K . Įrodysime, kad keturkampis $CFDK$ yra lygiagretainis.

Sprendimas. Sakykime, kad (A, B, C) – afinioji koordinačių sistema, tuomet $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ (9 pav.). Kadangi taškas M yra atkarpos BC vidurys, tai jo koordinatės $x = \frac{1}{2}(1 + 0)$, $y = \frac{1}{2}(0 + 1)$, taigi $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Kadangi taškas D yra abscisių ašyje, tai $D(d, 0)$, o kadangi taškas F yra ordinačių ašyje, tai $F(0, f)$. Kadangi

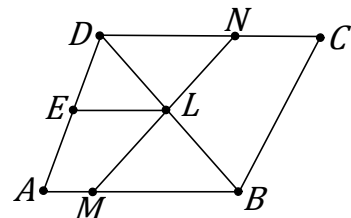


9 pav.

keturkampis $ADEF$ yra lygiagretainis, tai $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$, todėl $E(d, f)$. Tiesės BC lygtis $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1}{0-1}$, taigi $CB: x + y - 1 = 0$. Kadangi taškas E yra tiesėje BC , tai jo koordinatės tenkina tiesės BC lygtį, taigi teisinga lygybė $d + f = 1$. Tiesės AM lygtis $\frac{x-0}{\frac{1}{2}-0} = \frac{y-0}{\frac{1}{2}-0}$, taigi $AM: y = x$. Tiesė DE yra lygiagreti su ordinačių ašimi, todėl jos lygtis $DE: x = d$. Taško K koordinatės rasime iš sistemos $\begin{cases} y = x, \\ x = d \end{cases}$ todėl $K(d, d)$. Kadangi keturkampio $CKDF$ kraštinės CF ir KD yra lygiagrečios, tai beliko įrodyti, kad ir $CK \parallel FD$. Tuo tikslu parašome šių tiesių lygtis. $CK: \frac{x-0}{d-0} = \frac{y-1}{d-1}$, taigi $CK: (d-1)x - dy + d = 0$; $FD: \frac{x-0}{d-0} = \frac{y-f}{0-f}$, $FD: fx + dy - df = 0$, arba įrašius $f = 1 - d$ turime $FD: (1-d)x + dy - d(1-d) = 0$. Tiesių CK ir FD lygčių koeficientai prie kintamųjų x ir y yra proporcingi, nes $\frac{d-1}{1-d} = \frac{-d}{d}$, todėl šios tiesės yra lygiagrečios, taigi keturkampis $CKDF$ yra lygiagretainis.

6 pavyzdys. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse AB ir CD duoti taškai M ir N , kad $AM : MB = 1 : 4$, $CN : ND = 2 : 3$. Tiesė MN kerta įstrižainę BD taške L . Rasime santykį $BL : LD$.

Sprendimas. Sakykime, kad trejetas (A, B, D) yra pokštumos afinioji koordinačių sistema (10 pav.), tuomet $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $D(0, 1)$, $C(1, 1)$. Kadangi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, tai $M(\frac{1}{5}, 0)$. Kadangi $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD} + \frac{3}{5}\overrightarrow{DC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, tai $N(\frac{3}{5}, 1)$. Tiesės BD lygtis $\frac{x-0}{0-0} = \frac{y-1}{1-0}$, taigi $BD: x + y - 1 = 0$. Tiesės MN lygtis



10 pav.

$\frac{x-\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}-\frac{1}{5}} = \frac{y-0}{1-0}$, t. y. $MN: 5x - 2y - 1 = 0$. Iš sistemos $\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 5x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$

randame taško L koordinatės $L(\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$. Nubrėžiame tiesę $LE \parallel AB$, $E \in AD$, tuomet pagal Talio teoremą $BL : LD = AE : ED$. Kadangi $E(0, \frac{4}{7})$, tai $AE : EB = 4 : 3$. Taigi $BL : LD = 4 : 3$.

ŠEŠTOJI UŽDUOTIS

1. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 8, taškas O yra jo įstrižainių sankirtos taškas. Kvadrato $BEFG$ kraštinės ilgis lygus 3, viršūnė E yra kraštinėje BC , o viršūnės F ir G yra kvadrato $ABCD$ išorėje, Raskite trikampio OCF plotą.
2. Stačiojo trikampio ABC statinių ilgiai $CA = 6$, $CB = 8$, atkarpa CH yra jo aukštinė, taškas D yra šios aukštinės vidurio taškas, tiesė AD kerta statinį CB taške E . Raskite atkarpų CE ir EB ilgius.
3. Apskritimo ir rombo centras yra tas pats taškas. Įrodykite, kad atstumų nuo bet kurio apskritimo taško iki rombo viršūnių kvadratų suma yra vienoda visiems apskritimo taškams.
4. Įrodykite, kad atstumų nuo kvadrato viršūnių iki tiesės, einančios per kvadrato centrą kvadratų suma nepriklauso nuo tiesės parinkimo.
5. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 4, taškas K yra kraštinės AB vidurio taškas, taškas L yra atkarpos AK vidurio taškas, atkarpos DK ir CL kertasi taške M . Raskite keturkampio $ADML$ plotą.
6. Tiesė eina per trikampio ABC viršūnę A ir pusiauakraštinės BD vidurio tašką, ji kerta kraštinę BC taške N . Raskite santykį $BN : NC$.
7. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse BC ir CD yra taškai K ir L tokie, kad $BK : KC = 2 : 3$, $CL : LD = 5 : 3$. Atkarpos DK ir BL kertasi taške M . Raskite, kokių santykiu taškas M dalija atkarpas DK ir BL .
8. Duoti du lygiagretainiai $ABCD$ ir $AMNP$ tokie, kad taškas M yra kraštinėje AB , o taškas P – kraštinėje AD . Įrodykite, kad tiesės MD , BP ir NC kertasi viename taške.
9. Taškas P yra trikampio ABC pusiauakraštinėje CD , tiesės AP ir BC susikerta taške K , o tiesės BP ir AC susikerta taške M . Įrodykite, kad tiesės MK ir AB yra lygiagrečios.
10. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse DC ir CB yra taškai M ir N . Tiesė, einanti per atkarpų DM ir AB vidurio taškus ir tiesė, einanti per atkarpų AD ir BN vidurio taškus, kertasi taške S . Įrodykite, kad tiesė AS eina per atkarpos MN vidurio tašką.

VII. ŽAIDIMAI IR TURNYRAI

Teorinę medžiagą parengė ir septintąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Romualdas Kašuba

1. Futbolo turnyro pogrupyje dalyvauja 4 komandos, kurios po vieną kartą sužaidžia su kiekviena kita pogrupio komanda. Už laimėtas rungtynes komanda gauna 3 taškus, už lygiosiomis pasibaigusias rungtynes – 1 tašką, o už pralaimėtas rungtynes komanda taškų negauna. Sakoma, kad komanda pasirodo fantastiškai, jeigu ji pagal surinktus taškus užima vieną iš dviejų pirmųjų vietų. Klausimas, kurį mes dabar nagrinėsime bus toks: su keliais mažiausiais taškais komanda gali pasirodyti fantastiškai?

Sprendimas. Išnagrinėsime iš eilės visas galimybes.

Jeigu komanda surenka 0 taškų, tai ji pralaimi visas trejas rungtynes „padovanodama“ visoms trimis savo varžovėmis po 3 taškus ir lieka paskutinėje vietoje ir, aišku, fantastiškai pasirodyti negali.

Toliau, jeigu komanda surenka 1 tašką, tai ji, aišku, sužaidžia vienerias rungtynes lygiosiomis ir dvi rungtynes pralaimi „padovanodama“ dviem komandoms po 3 taškus ir jos ją atlenks ir, aišku, kad komanda su 1 vienu tašku galutinėje rikiuotėje fantastiškai pasirodyti negali.

O surinkus 2 taškus komandai fantastiškai pasirodyti – arba, kitaip, užimti kurią nors iš dviejų pirmųjų vietų yra įmanoma. Taip nutinka tada, kai komanda, užėmusi pirmąją vietą laimi visas savo sužaistas rungtynes, o visos kitos komandos savas rungtynes baigia lygiosiomis. Tada turnyrinė lentelė atrodo taip:

	A	B	C	D	Taškai	Vieta
A	X	3	3	3	9	I
B	0	X	1	1	2	II
C	0	1	X	1	2	III
D	0	1	1	X	2	IV

Taigi tikrai matome, kad viena iš trijų komandų - B, C arba D, surinkusi tik 2 taškus, gali pasirodyti fantastiškai, tai yra, užimti vieną iš dviejų pirmųjų vietų.

2. Buvo sužaistas archainis futbolo turnyras, kuriame kiekviena komanda sužaidė po vienerias rungtynes su kiekviena kita dalyvavusia komanda ir kur už pergalę tebuvo skiriami du taškai, už rungtynes, pasibaigusias lygiosiomis – 1 taškas, o už pralaimėtas rungtynes komanda taškų iš viso negaudavo. Po to turnyro paaiškėjo, kad visos komandos surinko po skirtingą taškų skaičių. Kiek taškų gali surinkti turnyrą laimėjusi komanda?

(A) 8 (B) 8, 7 (C) 8, 6 (D) 8, 7, 6 (E) 8, 7, 6, 5

Sprendimas. Pirmiausiai įrodysime, kad turnyrą laimėjusi komanda 5 taškų surinkti negali, jeigu visos komandos surenka skirtingą taškų skaičių. Tikrai, tada antrą vietą užėmusi komanda surenka daugiausiai 4 taškus, užėmusi trečią vietą gauna daugiausiai 3 taškus, užėmusi ketvirtą vietą surenka mažiausiai 2 taškus ir užėmusi penktąją paskutinę vietą – daugiausiai 1 tašką. Taškus. Taigi tada visos dalyvavusios komandos surenka daugiausiai $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$

taškų, tačiau taip negali būti, nes penkių komandų turnyre įvyksta 10 rungtynių ir todėl yra išžaidžiama 20 taškų.

O surinkti 6 taškus ir užimti pirmą vietą visoms komandoms renkant po skirtingą taškų skaičių yra įmanoma – tai įrodo tokia galima turnyrinė lentelė:

	A	B	C	D	E	Taškai	Vieta
A	X	1	1	2	2	6	I
B	1	X	0	2	2	5	II
C	1	2	X	0	1	4	III
D	0	0	2	X	1	3	IV
E	0	0	1	1	X	2	V

Galima pirmajai komandai surinkti ir 7 arba 8 taškus (renkant visoms komandoms po skirtingą taškų skaičių) – tai rodo žemiau pateikiamos dvi lentelės: viena

	A	B	C	D	E	Taškai	Vieta
A	X	1	2	2	2	7	I
B	1	X	1	2	2	6	II
C	0	1	X	1	2	4	III
D	0	0	1	X	1	2	IV
E	0	0	0	1	X	1	V

ir kita:

	A	B	C	D	E	Taškai
A	X	2	2	2	2	8
B	0	X	2	2	2	6
C	0	0	X	2	2	4
D	0	0	0	X	2	2
E	0	0	0	0	X	2

3. Vieno rato turnyre, kur kiekviena komanda sužaidžia po vienerias rungtynes su kiekviena kita komanda, ir kur už pergalę skiriami 2 taškai, už lygiąsias – 1 taškas ir už pralaimėjimą taškų įj viso neduodama, rungtyniavo 6 komandos. Ar galėjo ten nutikti taip, kad kokios nors trys komandos kartu surinko 4 taškais daugiau, negu trys likusios komandos?

Sprendimas. Taip, taip galėjo nutikti ir mes pateiksime tokios turnyrinės lentelės pavyzdį, kur pirmos trys komandos (A, B ir C) surenka 17, o likusios trys komandos (D, E ir F)– 13 taškų.

	A	B	C	D	E	F	Suma
A	X	2	2	2	2	2	10
B	0	X	2	2	1	1	6
C	0	0	X	0	0	1	1
D	0	0	2	X	2	2	6
E	0	1	2	0	X	2	5
F	0	1	1	0	0	X	2

4. Klasės lentoje buvo užrašytas reiškiny

$$*1*2*3*4*5*6*7*8.$$

Jonas ir Andrius žaidžia tokį žaidimą. Jie pakaitomis – pradeda Jonas – savo ėjimu pakeičia kokią nori žvaigždutę vienu kuriuo nors iš ženklų „+“ arba „-“, (pliusu arba minusu). Jonas stengiasi, kad gautasis skaičius nesidalintų iš 3, o Andrius, atvirkščiai, stengiasi, kad tas skaičius dalintųsi iš 3. Kuris iš jų laimės, jeigu abu žais geriausiu įmanomu būdu.

Sprendimas. Andrius laimės. Sujunkime tuos skaičius į poras tokiu būdu: (1;2), (4;5), (7; 8) ir (3; 6).

Tam, kad laimėtų Andrius turi laikytis tokios strategijos: jeigu Jonas savo ėjimu įrašo kokią nors ženklą „+“ arba „-“, prie kokio nors skaičiaus, tai Andrius savo atsakomuoju ėjimu įrašo tokį patį ženklą prie kito tos pačios poros skaičiaus. Kadangi kiekvienos poros skaičių suma dalosi iš 3, tai ir žaidimo pabaigoje atsiradęs skaičius taip pat dalinsis iš 3.

5. Tinklinio turnyre dalyvavo 6 komandos. Kiekviena komanda sužaidė po vienerias rungtynes su kiekviena kita komanda. Per kiekvienas rungtynes už iškovotą pergalę komanda gauna po vieną tašką, o už pralaimėtą – 0 taškų (lygiųjų tinklinyje nebūna). Turnyro pabaigoje paaiškėjo, kad komandos užėmusios pirmąsias dvi vietas kartu surinko 3 kartus daugiau taškų, negu trys komandos, užėmusios 4, 5 ir 6-tą vietas.

Nustatykite, kaip pasibaigė rungtynės tarp komandų, užėmusių 3-ią ir 5-tą vietas. (Jeigu kelios komandos surenka vienodą taškų skaičių, tai komandų vietos kiekvienos tokios grupės viduje nustatomos burtų keliu).

Sprendimas. Kadangi kiekvienose rungtynėse buvo „išžaidžiamas“ tik vienas taškas, o šešių komandų turnyre, kur kiekviena komanda po vieną kartą sužaidžia su kiekviena kita komanda, įvyksta 15 rungtynių, tai buvo paskirstyta 15 taškų. Akivaizdu, kad didžiausias taškų skaičius, kurį gali surinkti viena komanda, yra 5, o mažiausias – 0.

Tegu komandos, užėmusios 4-tą, 5-tą ir 6-tą vietą kartu surinko x taškų. Tada pagal sąlygą komandos užėmusios pirmąsias dvi vietas kartu surinko $3x$ taškų, todėl jeigu komanda, užėmusi trečią vietą, surinko y taškų, tai $3x + y + x = 15$, arba $4x + y = 15$. Kadangi visos galimos y reikšmės imamos iš skaičių 0, 1, 2, 3, 4, 5, tai įstatydami jas paeiliui į paskutinę lygybę, gauname, kad tik kai $y = 3$ jai tinka sveikoji reikšmė $x = 3$.

Vadinasi, komandos, užėmusios pirmąsias dvi vietas kartu surinko $3x = 3 \cdot 3 = 9$ taškus. Tai yra įmanoma tik tada, jeigu pirmąją vietą užėmusi komanda surenka 5, o užėmusi antrąją vietą – 4 taškus. Kitaip sakant, jeigu abi tos komandos laimi visas rungtynes su komandomis, užėmusiomis 3, 4, 5 ir 6-tą vietas. Vadinasi, komanda, užėmusi 3-ią vietą rungtynėse su komandomis, užėmusiomis pirmąsias dvi vietas surenka 0 taškų, o su trimis komandomis, užėmusiomis 4-tą, 5-tą ir 6-tą vietas surenka 3 taškus, tai yra ji laimi su visomis trimis tomis komandomis.

Atsakymas. Komanda, užėmusi 3-čią vietą, laimi prieš 5-tą vietą užėmusią komandą.

6. Aivaras per pratybas lentoje parašo visus sveikuosius skaičius nuo 1 iki 10. Jo studentai tada žaidžia tokį žaidimą. Pirmasis studentas ištrina bet kuriuos du lentoje esančius skaičius ir lentoje užrašo jų sumą sumažintą vienu vienetu. Tada kitas studentas ištrina bet kuriuos du skaičius, kurie yra tuo metu lentoje ir tada vietoje to užrašo jų sumą sumažintą vienu vienetu. Žaidimas tęsiasi tol, kol lentoje belieka vienintelis skaičius. Koks yra tas paskutinis lentoje likęs skaičius?

(A) Mažesnis kaip 11 (B) 11 (C) 46 (D) Tarp 11 ir 46 (E) Didesnis kaip 46.

Sprendimas. Po kiekvieno studento dalyvavimo lentoje liks vienu skaičiumi mažiau. Po to, kai 9 studentai sudalyvaus žaidime, lentoje liks vienintelis skaičius. Tas skaičius bus 9 mažesnis negu visų sveikų skaičių nuo 1 iki 10 suma, kadangi kiekvienas studentas atėmė po 1. Todėl lentoje liks skaičius 46.

Atsakymas. (C) arba 46.

7. Prie upės atėjo Tėvas, Motina ir du vaikai V1 ir V2. Jie nori persikelti į kitą upės pusę. Jie randa ten valtį, kuri gali paimti tik daugiausiai 2 vaikus arba vieną kurį iš tėvų. Kaip jiems persikelti (ir su kuo mažiausiai plaukimų) į kitą upės pusę?

Sprendimas. Aišku, kad visas manevravimas bus susijęs su abiem vaikais.

1 plaukimas (arba valtės panaudojimas). Į kitą pusę keliasi abu vaikai.

2 plaukimas. Vienas vaikas pasilieka kitoje pusėje, o kitas vaikas grąžina valtį atgal į tą pusę, kur yra abu jo tėvai.

3 plaukimas. Motina persikelia į kitą pusę.

4 plaukimas. Vaikas iš kitos upės pusės grįžta atgal.

5 plaukimas. Iš kitos upės pusės grįžęs vaikas paėmęs kitą grįžta atgal.

6 plaukimas. Vienas vaikas pasilieka perkeltas, o kitas grįžta atgal.

7 plaukimas. Dabar jau ir tėvas persikelia į kitą upės pusę.

8 plaukimas. Kitas perkeltas vaikas grįžta atgal (kad paimtų kitą).

9 plaukimas. Abu vaikai persikelia į kitą upės pusę, kur jų jau nekantriai laukia abu tėvai.

8. Per nuotykingas atostogas penki vaikai A, B, C, D ir E sudalyvavo penkiose varžybose V, W, X, Y, Z. Kiekvienose varžybose įvertinimai 5, 4, 3, 2, 1 yra skiriami atitinkamai už užimtas 1-ą, 2-ą, 3-ą, 4-ą ir 5-ą vietas. Nėra jokių vienos vietos dalybų. Vaikas A surenka iš viso 24 taškus, vaikas C surenka tiek pat taškų per ketverias varžybas, vaikas D surenka 4 taškus per rungtynes V, o vaikas E gauna 5 taškus rungtyje W ir 3 taškus rungtyje X. Nuostabiu būdu jų bendroji taškų suma yra išsidėsčiusi abėcėlės eile ir kad čia egzistuoja lygiai 1 sprendimas. Nurodykite taškus, kuriuos kiekvienas vaikas gavo atskirose varžybose užpildydami šią varžybų lentelę.

	V	W	X	Y	Z	Bendroji suma
A						
B						
C						
D						
E						

Sprendimas. Vaikas A surenka 24 taškus, taigi jis laimi keturias varžybas ir penktose lieka antroje vietoje. Bendra visų varžybų „išžaistų“ taškų suma yra $5 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 5 \cdot 15 = 75$, taigi B, C, D ir E pasidalina tarpusavyje $75 - 24 = 51$ tašką. Vaikas E iš dviejų varžybų turi 8 taškus, todėl jis iš viso surenka mažiausiai 11 taškų. Tada B, C ir D surenka mažiausiai 14, 13 ir 12 taškų. Tačiau tada $14 + 13 + 12 + 11 = 50$, iš kur mes matome, kad galutinės B, C, D ir E sumos turi būti B:15; C:13, B:12 ir E:11. Vaikas C negali būti laimėjęs jokios rungties, taigi jis negalėjo surinkti 13 taškų gaudamas 1 arba 2 taškus kiekvienoje iš 4 rungties, taigi vaikas C gavo 4 rungtyse po 3 taškus ir vienoje rungtyje 1 tašką. Tos rungtys, kur vaikas C gavo 3 taškus yra V, W, Y ir Z, nes mes žinome, kad vaikas E gavo 3 taškus rungtyje X. Vaikas E turi iš dviejų rungties turi 8 taškus, todėl jis uždirba po 1 tašką rungtyse V, Y ir Z. Vaikas D turi 4 taškus už rungtynes V ir iš viso 12 taškų, todėl jis gauna po 2 taškus iš kiekvienos iš rungties W, X, Y ir Z. Mes dabar žinome kiekvieno vaiko gautus taškus atskirose rungtyse, išskyrus vaiką B, todėl mes galime padaryti išvadą, kad B gavo atitinkamai 2, 1, 4, 4, 4 taškus rungtyse V, W, X, Y ir Z, kas duoda vaikui B iš viso 15 taškų, kas jau anksčiau ir buvo pasakyta. Galutinė lentelė atrodo taip:

	V	W	X	Y	Z	Galutinė suma
A	5	4	5	5	5	24
B	2	1	4	4	4	15
C	3	3	1	3	3	13
D	4	2	2	2	2	12
E	1	5	3	1	1	11

9. Krūvelėje yra 64 degtukai. Du žaidėjai pakaitomis daro ėjimus. Vienu ėjimu iš krūvelės galima paimti bet kurį nelyginį už 16 mažesnių degtukų skaičių ir, be to, negalima kartoti jau padarytų ėjimų (tai yra jeigu kuris nors iš žaidėjų paėmė kokį nors degtukų skaičių, tai vėliau nei jis, nei jo priešininkas imti tokį patį degtukų skaičių jau nebegali). Laimi tas, kuris paima paskutinį degtuką. Kuris iš žaidėjų gali laimėti kad ir kaip bežaistų jo priešininkas: ar tas, kuris pradeda ar jo varžovas? Kaip tada reikėtų žaisti?

Sprendimas. Pagal žaidimo taisykles yra lygiai 8 leistini ėjimai, tai yra galima paimti arba 1, arba 3, arba 5, arba 7, arba 9, arba 11, arba 13, arba 15 degtukų. Pastebėjime, kad $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 64$. Todėl, nepaisant to, kaip besiklostytų žaidimas, jis baigsis tada kai po vieną bus padaryti visi leistini ėjimai. Kadangi jų yra 8, tai paskutiniu eis antrasis varžovas. Jis ir laimės.

Atsakymas. Laimės tas, kuris eis antrasis.

SEPTINTOJI UŽDUOTIS

1. 4 komandų pogrupyje kiekviena komanda sužaidžia po vienerias rungtynes su kiekviena kita to pogrupio komanda. Už laimėtas rungtynes komanda gauna 3 taškus, už sužaistas lygiosiomis – po 1 tašką, o už pralaimėtas rungtynes taškų apskritai negauna. Laikoma, kad komanda pasirodo tragiškai, jeigu ji galutinėje rikiuotėje pagal surinktus taškus užima vieną iš dviejų paskutinių, tai yra, trečiąją arba ketvirtąją vietas. Su kiek daugiausiai taškų komanda gali pasirodyti tragiškai?
 2. Tarpzoniniame šachmatų turnyre dalyvauja 5 šachmatininkai, kurie sužaidžia po vieną partiją su kiekvienu kitu varžovu, ir kuriame pusė sužaistų partijų baigėsi lygiosiomis ir kuriame už pergalę skiriamas 1 taškas, už partiją pabaigtą lygiosiomis – pusė taško, o už pralaimėtą partiją – 0 taškų. Vienas dalyvis pralaimėjo visas savo žaistas partijas. Kiek taškų surinko šachmatininkas, užėmęs turnyre priešpaskutinę vietą?
 3. Vieno rato turnyre, kur kiekviena komanda sužaidžia po vienerias rungtynes su kiekviena kita komanda, kur žaidžiama be lygiųjų (pavyzdžiui, tinklinyje) ir kur už pergalę skiriami 2 taškai, o už pralaimėjimą taškų iš viso neduodama, dalyvauja 6 komandos. Ar gali ten nutikti taip, kad kurios nors trys komandos, pavyzdžiui, A, B ir C surenka 4 taškais daugiau už likusias tris komandas, pavyzdžiui, D, E ir F.
 4. Klasės lentoje užrašyta išraiška $*1*2*3*4*5*6*7*8$. Jūratė ir Kastytis žaidžia tokį žaidimą – jie iš eilės – pradeda Jūratė – pakaitomis kiekvienas savo ėjimu pakeičia kokią nori žvaigždutę koku nori „+“ arba „-“, ženklu. Pradėjusi Jūratė stengiasi, kad skaičius, kuris atsiras, kai jie visas žvaigždutes pakeis plusais arba minusais, nesidalintų iš 9, o Kastytis, atvirkščiai stengiasi, kad tas žaidimo pabaigoje atsirasiantis skaičius dalintųsi be liekanos iš 9. Kuris iš jų laimės, jeigu jie abudu žais geriausiu įmanomu būdu?
 5. Tinklinio turnyre dalyvavo 8 komandos ir kiekviena komanda sužaidė po vienerias rungtynes su kiekviena kita komanda. Už pergalę kiekviena komanda gauna po 1 tašką, o už pralaimėjimą – 0 taškų (lygiųjų tinklinyje nebūna). Turnyrui pasibaigus paaiškėjo, kad trys komandos, užėmusios pirmąsias tris vietas, kartu su rinko 3 kartus daugiau taškų negu komandos užėmusios 5-tą, 6-tą, 7-tą ir 8-tą vietas kartu.
- Nustatykite, kas laimėjo rungtynes tarp komandų užėmusių 4-tą ir 6-tą vietas. (Jeigu pasibaigus turnyrui kelios komandos surenka vienodą taškų skaičių, tai vietos tarp jų nustatomos burtų keliu).
6. Tenisininkas Kęstutis skaičiuoja visų savo laimėtų rungtynių procentą nuo visų sužaistų rungtynių. Prieš paskutinį turnyrą, kuriame jis laimėjo visas savo sužaistas rungtynes, tas procentas buvo 25, o po turnyro jis pasidarė lygus 75. Nustatykite, kiek kartų Kęstučio sužaistų per paskutinį turnyrą rungtynių skaičius buvo didesnis už jo visų iki to turnyro sužaistų (laimėtų ir pralaimėtų) rungtynių skaičių.
 7. Penki berniukai – Andrius, Balys, Celestinas, Donatas ir Evaldas – pravedė stalo teniso turnyrą, žaisdami poromis vieni su kitais tokiu būdu, kad kiekviena pora, kokia tik galima iš jų

sudaryti, prieš kiekvieną kitą galimą porą sužaidė po vieną kartą. Po turnyro paaiškėjo, kad Andrius laimėjo iš viso 10 žaidimų, o Balys – 8 žaidimus; Celestinas pralaimėjo 9 žaidimus, o Donatas – 7 (lygiųjų tenise nebūna). Kiek žaidimų laimėjo ir kiek žaidimų pralaimėjo Evaldas?

8. Dvi mokyklos žaidžia viena prieš kitą stalo teniso varžybas. Kiekvienai mokyklai atstovauja 5 mokiniai. Kiekvienas žaidimas yra dvejetų žaidimas ir kiekviena pora iš kiekvienos mokyklos turi sužaisti vieną kartą prieš kiekvieną galimą kitos mokyklos porą. Kiek žaidimų sužais kiekvienas mokinytis?

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 50

9. Andrius, Balys, Celestinas ir Donatas suorganizavo šachmatų turnyrą, kuriame kiekvienas sužaidžia prieš kitą po vieną kartą. Tas, kuris laimi, gauna 3 taškus, už žaidimą pasibaigusį lygiosiomis, kiekvienam skiriama po $\frac{1}{2}$ taško, o už pralaimėtą partiją taškų neduodama. Turnyrui pasibaigus Andrius turėjo 7 taškus, Balys – 4, o Celestinas su Donatu – po 3 taškus. Kuris iš teiginių yra garantuotai teisingas?

(A) Andrius laimėjo prieš Donatą; (B) Turnyre apskritai nebuvo lygiųjų; (C) Donatas laimėjo prieš Andrių; (D) Andrius su Donatu sužaidė lygiosiomis; (E) Nurodytasis taškų pasiskirstymas yra apskritai neįmanomas.

10. Žirgų lenktynėse hipodrome dalyvauja 5 žirgai A, B, C, D ir E. Kalbėdami apie jų išsidėstymo galimybes, patyrę ekspertai konstatavo, kad jie taip mažai pažįsta tuos žirgus, kad jiems bet kokios jų išsidėstymo atskirame bėgime galimybes atrodo vienodai galimos – tik su viena išimtimi – kad žirgas B neatbėgs anksčiau negu žirgas A. Kiek žirgų išsidėstymo atskirame bėgime galimybių esant šitam apribojimui esama, jeigu tarsime, kad kiekvienas žirgas bėgime užtrunka skirtingą laiką.

VIII. SVEIKŲJŲ SKAIČIŲ LAIPSNIAI

Teorinę medžiagą parengė bei aštuntąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Aivaras Novikas

Sveikųjų skaičių laipsnius a^n (su natūraliuoju rodikliu n) ir reiškinius su šiais laipsniais nagrinėsime jų dalumo savybių požiūriu. Lygybė $(-a)^n = (-1)^n \cdot a^n$ parodo, kad daugeliu atveju pakanka nagrinėti natūraliojo skaičiaus a atvejį.

Dalyba su liekana. Nagrinėkime bet kokius sveikąjį skaičių a ir natūralųjį skaičių b . Iš a atimant arba prie a pridedant b bet kiek kartų, gaunami visi įmanomi skaičiai $a - bk$, kur skaičius k sveikasis. Į intervalą $[0; b)$ visada patenka lygiai vienas toks skaičius $r = a - bq$. Šio r bei atitinkamo sveikąjo skaičiaus q radimas vadinamas **skaičiaus a dalyba iš skaičiaus b su liekana**. Skaičius q vadinamas šios dalybos **dalmeniu**, o skaičius r – jos **liekana**. Turime lygybę $a = bq + r$, kur r yra vienas iš skaičių $0, 1, 2, \dots, b - 1$. Pavyzdžiui, jei $a = 775$ ir $b = 11$, tai intervale $[0; 11)$ atsidursime, $q = 70$ kartų iš a atėmę b . Taigi padalijus 775 iš 11 su liekana, gaunamas dalmuo $q = 70$ ir liekana $r = 775 - 11 \cdot 70 = 5$. Jei vietoj 775 imsime $a = -775$, tai prie a turėsime 71 kartą pridėti b , kad gautume liekaną $r = (-775) - 11 \cdot (-71) = 6$ (ir dalmenį $q = -71$). Bendruoju atveju pasirinkus bet kurią reikšmę $r = 0, 1, 2, \dots, b - 1$, visi skaičiai $bq + r$, kur skaičius k sveikasis, dalijasi iš b su ta pačia liekana r . Kai sveikieji skaičiai skiriasi per natūraliojo b kartotinį, tai dalijasi iš b su ta pačia liekana. Pavyzdžiui, iš 11 su liekana 6 dalijasi skaičiai $\dots, -27, -16, -5, 6, 17, 28, 39, 50, 61, \dots$

Sveikųjų skaičių a_1 ir a_2 sumoje pakeitę skaičių a_1 į jo dalybos iš natūraliojo b liekaną $r_1 = a_1 - bq_1$, pakeisime sumą per b kartotinį bq_1 , taigi nepakeisime sumos dalybos iš b liekanos. Tą patį galima pasakyti apie sveikųjų skaičių skirtumą: norint rasti $a_1 - a_2$ dalybos iš b liekaną, tiek a_1 , tiek a_2 galima pakeisti jų atitinkamomis liekanomis. Lygybė $(bq_1 + r_1)a_2 = b \cdot (q_1a_2) + r_1a_2$ panašiai parodo, kad sveikuosius skaičius galima keisti jų dalybos iš b liekanomis, nagrinėjant sandaugą. Pavyzdžiui, dalijant skaičių $a = 1250^2 \cdot 547 + 7426 - 617^3$ iš 13 su liekana, pakanka iš 13 su liekana padalyti skaičius 1250, 547, 7426, 617 ir juos pakeisti atitinkamomis liekanomis:

$$1250 = 13 \cdot 96 + 2, \quad 547 = 13 \cdot 42 + 1, \quad 7426 = 13 \cdot 571 + 3, \quad 617 = 13 \cdot 47 + 6;$$

$$1250^2 \cdot 547 + 7426 - 617^3 \equiv 2^2 \cdot 1 + 3 - 6^3 \pmod{13}.$$

Čia užrašas $u \equiv v \pmod{m}$ – **lyginys moduliu m** – reiškia, kad u ir v dalijasi iš m su ta pačia liekana (skiriasi per m kartotinį). Jį skaitome „ **u lygsta v moduliu m** “. Kaip ir lygybių atveju, galima rašyti nenutrūkstamą lyginių moduliu m seką:

$$2^2 \cdot 1 + 3 - 6^3 \equiv -209 \equiv (-1) \cdot (13 \cdot 16 + 1) \equiv (-1) \cdot 1 \equiv -1 \equiv 12 \pmod{13}.$$

Taigi pradinis skaičius a , kaip ir skaičiai, kuriais jį pakeitėme, dalijasi iš 13 su liekana 12.

1 pavyzdys. Raskime trečiąją mažiausią natūralųjį x , kuriam skaičius $784\,565^{565\,487} + x$ dalijasi iš 12. Tam raskime $a = 784\,565^{565\,487}$ dalybos iš 12 liekaną:

$$784\,565 = 12 \cdot 65\,380 + 5, \quad a \equiv 5^{565\,487} \pmod{12}.$$

Čia laipsnio pagrindą 784 565 galime suprastinti moduliu 12, nes kėlimas laipsniu reiškia kartotinę daugybą: turime 565 487-is dauginamuosius, lygius 784 565, kurių kiekvieną galime pakeisti dalybos liekana 5. Tačiau taip pat suprastinti rodiklį 565 487 būtų klaida. Vietoj to pastebėkime, kad $5^2 \equiv 1 \pmod{12}$ ir todėl $a \equiv (5^2)^{282\,743} \cdot 5 \equiv 1^{282\,743} \cdot 5 \equiv 5 \pmod{12}$. Vadinasi, $a + x$ dalijasi iš 12 (su liekana 0) tada ir tik tada, kai iš 12 dalijasi $5 + x_0$, kur x_0 yra x dalybos iš 12 liekana. Tinka tik $x_0 = 7$. Trys tokie mažiausi natūralieji skaičiai x yra 7, $7 + 12 = 19$ ir $7 + 12 \cdot 2 = 31$.

Atsakymas. $x = 31$.

2 pavyzdys. Raskime didžiausią natūralųjį triženklį x , kuriam $74^{44^{30}} - x$ dalijasi iš 27. Pažymėkime $a = 74^{44^{30}}$. Tada $74 \equiv 20 \pmod{27}$ ir $a \equiv 20^{44^{30}} \equiv (-7)^{44^{30}} \equiv 7^{44^{30}} \pmod{27}$. Čia 20 verta pakeisti su šia liekana iš 27 besidalijančiu skaičiumi $20 - 27 = -7$, nes $7 < 20$. Minusas prie 7 prapuola, nes laipsnio rodiklis 44^{30} yra lyginis. Toliau iš eilės tikrinkime septyneto laipsnių $7, 7^2, 7^3, \dots$ dalybos iš 27 liekanas. Čia, pavyzdžiui, nustačius, kad $7^4 \equiv 25 \pmod{27}$, tiesiogiai apskaičiuoti 7^5 reikšmę ir dalyti ją iš 27 nebūtina. Vietoj to turime

$$7^5 \equiv 7^4 \cdot 7 \equiv 25 \cdot 7 \equiv (-2) \cdot 7 \equiv -14 \equiv 13 \pmod{27},$$

toliau analogiškai $7^6 \equiv 7^5 \cdot 7 \equiv 13 \cdot 7 \equiv 91 \equiv 10 \pmod{27}$, ir t. t.

Taip gauname, kad $7^9 \equiv 1 \pmod{27}$ (tęsdami parodytus veiksmus, patikrinkite savarankiškai!). Jei rodiklis 44^{30} dalytųsi iš 9, tai iš karto gautume $a \equiv (7^9)^{\dots} \equiv 1^{\dots} \equiv 1 \pmod{27}$. Nors situacija

sudėtingesnė, vis tiek mėginkime pasiremti gauta parankia skaičiaus 7^9 liekana 1. Tam raskime rodiklio 44^{30} dalybos iš rodiklio 9 liekaną: $44 \equiv -1 \pmod{9}$, todėl $44^{30} \equiv (-1)^{30} \equiv 1 \pmod{9}$. Tegu $44^{30} = 9k + 1$ (skaičius k natūralusis). Tada $a \equiv 7^{9k+1} \equiv (7^9)^k \cdot 7 \equiv 1^k \cdot 7 \equiv 7 \pmod{27}$. Taigi vietoj $a - x$ galime nagrinėti $7 - x_0$, ir čia x dalybos iš 27 liekana x_0 turi būti lygi 7. Didžiausias triženklis skaičius 999 dalijasi iš 27 su liekana 0. Vadinasi, su liekana 7 iš 27 dalijasi skaičius 1006, o didžiausias toks triženklis skaičius yra $1006 - 27 = 979$.

Pabrėžkime, kad $74^{44^{30}} = 74^{(44^{30})} \neq (74^{44})^{30} = 74^{1320}$. Jei čia nagrinėtume $(74^{44})^{30} - x$, tai sprendime gautume $1320 \equiv 6 \pmod{9}$, o tada $a \equiv 7^6 \equiv 10 \pmod{27}$ bei atsakymą $x = 982$.

Atsakymas. $x = 979$.

Laipsniai ir dalybos liekana 1. Išnagrinėtame 2 pavyzdyje buvo svarbu rasti skaičiaus 7 laipsnį, kuris dalytųsi iš 27 su liekana 1. Jį radome tikrindami visus skaičiaus 7 laipsnius (su natūraliaisiais rodikliais). Mums pasisekė, kad tiko jau 7^9 ir neteko tikrinti ilgiau. Ar galima tikrinimo išvengti? Kodėl apskritai galime būti tikri, kad liekaną 1 įmanoma gauti? Čia padeda teoremos, kurios nusako natūralųjį n , kuriam duoto tinkamo sveikąjo skaičiaus a laipsnis a^n garantuotai dalijasi iš duoto natūraliojo m su liekana 1. Pirmoji iš jų nusako atvejį, kai skaičius m pirminis.

1 teiginys. Tarkime, kad sveikasis skaičius a nesidalija iš pirminio skaičiaus p . Tada $a^{p-1} - 1$ dalijasi iš p .

Įrodymas. Kadangi joks iš skaičių 1, 2, 3, ..., $p - 1$ nesidalija iš p , kaip ir skaičius a , tai ir aritmetinėje progresijoje $a, 2a, 3a, \dots, (p - 1)a$ joks narys nesidalija iš p . Analogiškai iš p nesidalija ir jokių dviejų progresijos narių ia ir ja , kur $i \neq j$, skirtumas $(i - j)a$, nes tai yra a sandauga su skaičiumi $i - j$, kuris lygus vienam iš skaičių $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm(p - 2)$. Todėl dalijant nagrinėjamos progresijos narius iš p , visos gaunamos atitinkamos liekanos $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}$ yra nenulinės ir skirtingos. Nenulinių dalybos iš p liekanų tėra $p - 1$, todėl liekanos $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}$ turi būti tam tikra tvarka surašytos visos galimos nenulinės liekanos 1, 2, 3, ..., $p - 1$. Vadinasi,

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p - 1)a \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \dots \cdot r_{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p - 1) \pmod{p},$$

$a^{p-1}(p - 1)! \equiv (p - 1)! \pmod{p}$, $a^{p-1}(p - 1)! - (p - 1)! = (p - 1)!(a^{p-1} - 1)$ dalijasi iš p . Vėlgi, skaičiai 1, 2, 3, ..., $p - 1$ nesidalija iš p , todėl nesidalija ir jų sandauga $(p - 1)!$. Skaičius $a^{p-1} - 1$ dalijasi iš p , nes priešingu atveju iš p nesidalytų sandauga $(p - 1)!(a^{p-1} - 1)$. Tai ir reikėjo įrodyti. ■

Įrodytas teiginys vadinamas **Mažąja Ferma teorema** (prancūzų matematikas Pierre de Fermat, 1601–1665; yra ir kita jo vardo teorema, vadinama didžiąja arba paskutiniąja). Dažnai naudojama jos alternatyvi formulė, pašalinant sąlygą, kad a dalijasi iš p : jei skaičius p pirminis, tai $a^p - a$ dalijasi iš p kiekvienam sveikajam a (net nesidalijančiam $p -$ juk iš p visada dalijasi vienas iš sandaugos $a \cdot (a^{p-1} - 1)$ dauginamųjų).

Sąlyga, kad p yra pirminis skaičius, teoremoje esminė. Įrodyme ja rėmėmės, kelis kartus pasinaudoję tokia pirminių skaičių **savybe**, skiriančia juos nuo kitų natūraliųjų skaičių: jei keli sveikieji skaičiai nesidalija iš pirminio p , tai nesidalija ir jų sandauga. Ši savybė taip pat formuluojama dviem ar keliems skaičiams „atbulu“ būdu: jei sveikųjų skaičių sandauga dalijasi iš p , tai dalijasi bent vienas iš dauginamųjų. Ji vadinama **Euklido lema** (senovės graikų matematikas Euklidas Aleksandrietis, apie 300 m. pr. Kr.) ir yra stipriai susijusi su dar vienu teiginiu – **Pagrindine aritmetikos teorema**: kiekvienas natūralusis skaičius $n > 1$ užrašomas pirminių skaičių sandauga lygiai vienu būdu (nekreipiant dėmesio į dauginamųjų tvarką). Čia pirminiai skaičiai sandaugoje nebūtinai skirtingi. Be to, leidžiamos sandaugos iš vieno pirminio dauginamojo (lygios jam pačiam).

Du sveikieji skaičiai, neturintys bendro daliklio, didesnio už 1, vadinami **tarpusavyje pirminiais**. Tarkime, kad kiekvienas iš natūraliųjų skaičių $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$, išskyrus nebent b_1 , yra tarpusavyje pirminis su natūraliuoju m . Tarkime, kad m ir sandauga $B = b_1 b_2 b_3 \dots b_k$ turi bendrą daliklį $d > 1$ (taigi nėra tarpusavyje pirminiai). Tada $b_1 b_2 b_3 \dots b_k = dc$ (skaičius c natūralusis). Abiejose lygybės pusėse vietoj kiekvieno dauginamojo galima įrašyti jam lygią pirminių skaičių sandaugą arba skaičių 1, ir tada abiejose lygybės pusėse turi būti tie patys pirminiai skaičiai, gali skirtis nebent jų tvarka (Pagrindinė aritmetikos teorema). Pirminiai skaičiai, įrašyti vietoj d , yra skaičiaus m dalikliai, todėl gali būti nebent vietoj b_1 įrašytoje išraiškoje. Tada b_1 dalijasi iš d , tad nėra tarpusavyje pirminis su m . Jei atskiru atveju $d = m$ (t. y. B dalijasi iš m), tai b_1 dalijasi iš m . **Vadinasi**, jei natūraliųjų skaičių sandaugos kiekvienas dauginamasis, nebent išskyrus vieną, yra

tarpusavyje pirminis su duotu natūraliuoju m , o tas likęs dauginamasis nesidalija iš m , tai ir visa sandauga iš m nesidalija. **Be to**, jei ir tas likęs dauginamasis yra tarpusavyje pirminis su m , tai tokia yra visa sandauga. Šias išvadas lengva apibendrinti sveikiesiems (nebūtinai natūraliesiems) skaičiams. Jas vietoj Euklido lemos naudojant Mažosios Ferma teoremos įrodyme, gaunamas teoremos apibendrinimas, kai vietoj pirminio p imamas natūralusis m .

Iš tiesų, tarkime, kad $m > 1$ ir a yra tarpusavyje pirminiai sveikieji skaičiai. Mažosios Ferma teoremos įrodyme iš a padauginame ne $1, 2, 3, \dots, p-1$, o natūraliuosius skaičius nuo 1 iki m , tarpusavyje pirminius su m . Juos pažymėkime $t_1, t_2, t_3, \dots, t_k$. Tada kiekviena gautoji sandauga $t_i a$ yra tarpusavyje pirminė su m . Tokia yra ir $t_i a$ dalybos iš m liekana r_i (pamąstykite kodėl!). Toliau kaip ankstesniame įrodyme pastebime, kad dviejų skirtingų sandaugų skirtumas $(t_i - t_j)a$ nesidalija iš m ir todėl liekanos r_i yra skirtingos bei tiesiog yra tam tikra tvarka surašyti pradiniai skaičiai $t_1, t_2, t_3, \dots, t_k$. Pagaliau analogiškai nagrinėdami sandaugų $t_i a$ sandaugą moduliu m , gauname: $t_1 t_2 t_3 \dots t_k (a^k - 1)$, taigi ir $a^k - 1$ dalijasi iš m .

Kiekvienam natūraliajam m atitinkamą k – su m tarpusavyje pirminių natūraliųjų skaičių nuo 1 iki m kiekį – pažymėkime $\varphi(m)$. Mažiausioms m reikšmėms skaičių t_i aibės iš eilės lygios $\{1\}, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 5, 7\}, \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, \{1, 3, 7, 9\}, \dots$. Taigi turime reikšmes $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = \varphi(4) = \varphi(6) = 2$, $\varphi(5) = \varphi(8) = \varphi(10) = 4$, $\varphi(7) = \varphi(9) = 6$, Visose aibėse yra skaičius 1 , tad kiekvienam natūraliajam m priskiriama reikšmė $\varphi(m)$ natūralioji. Gauname funkciją $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, vadinamą **Oilerio funkcija** (šveicarų matematikas Leonhard Euler, 1707–1783). Pagaliau galime suformuluoti **Oilerio teorema** – Mažosios Ferma teoremos apibendrinimą, kurio įrodymą aptarėme.

2 teiginys. Tarkime, kad $m \geq 1$ ir a yra tarpusavyje pirminiai sveikieji skaičiai. Tada skaičius $a^{\varphi(m)} - 1$ dalijasi iš m .

Ši teorema teisinga ne tik aptartu atveju $m > 1$, bet ir trivialiu atveju $m = 1$. Jei skaičius $m = p$ pirminis, tai su juo tarpusavyje pirminiai visi sveikieji skaičiai, nesidalijantys iš p (prisiminkime pirminio skaičiaus apibrėžimą). Nuo 1 iki m tai skaičiai $\{t_1, t_2, t_3, \dots, t_k\} = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$, taigi šiuo atveju $\varphi(m) = p-1$, ir gauname Mažąją Ferma teorema kaip atskirą Oilerio teoremos atvejį.

Oilerio teoremoje sąlyga, kad a ir m yra tarpusavyje pirminiai, esminė: priešingu atveju jie turi bendrą daliklį $d > 1$, iš kurio dalijasi visi a laipsniai $a, a^2, a^3, \dots$. Tada joks skaičius $a-1, a^2-1, a^3-1, \dots$ nesidalija nei iš d , nei tuo labiau iš d kartotinio m . Vadinas, sekoje $a, a^2, a^3, \dots$ iš m su liekana 1 nesidalija ne tik $a^{\varphi(m)}$, bet ir apskritai joks narys. Tuo tarpu jei a yra tarpusavyje pirminis su m , tai tinkamų sekos narių esama be galo daug: tai ne tik $a^{\varphi(m)}$, bet ir $a^{2\varphi(m)}, a^{3\varphi(m)}, \dots$. Net ir $a^{\varphi(m)}$ neprivalo būti pirmasis toks narys: 2 pavyzdyje matėme, kad tinka a^9 , kai $a = 7, m = 27$, nors Oilerio teorema mums nurodo, kad tinka $a^{\varphi(27)} = a^{18}$.

Jei bendruoju atveju $a^k \equiv 1 \pmod{m}$ (skaičiai m ir k natūralieji, skaičius a sveikasis), tai $a^i \equiv a^{i+k} \equiv a^{i+2k} \equiv \dots \pmod{m}$ kiekvienam sveikajam $i \geq 0$. Gauname **išvadą**: jei sekoje $a, a^2, a^3, \dots$ narių a^i ir a^j rodikliai skiriasi per natūraliojo skaičiaus k kartotinį (t. y. i ir j dalijasi iš k su ta pačia liekana), kur $a^k \equiv 1 \pmod{m}$, tai a^i ir a^j dalijasi iš m su ta pačia liekana. Atskiru atveju a^i dalybos iš m liekana nepakinta, pakeičiant natūralųjį i jo dalybos iš tokio k liekana.

3 pavyzdys. Nustatykime, su kokia liekana skaičius $6^{559^{2025^{955}}} + 26^{5^{732}}$ dalijasi iš 29 . Atskirai nagrinėkime $a_1 = 6^{559^{2025^{955}}}$ ir $a_2 = 26^{5^{732}}$. Skaičius 29 pirminis, o skaičiai 6 ir 26 iš jo nesidalija. Todėl $6^{28} \equiv 26^{28} \equiv 1 \pmod{29}$, ir rodiklius $b_1 = 559^{2025^{955}}$ ir $b_2 = 5^{732}$ galima prastinti moduliu 28 , t. y. pakeisti jų dalybos iš 28 liekanomis. Suprastinti b_1 gana lengva:

$559 \equiv 27 \equiv -1 \pmod{28}$, $b_1 \equiv (-1)^{2025^{955}} \equiv -1 \equiv 27 \pmod{28}$, $a_1 \equiv 6^{27} \pmod{29}$. Toliau skaičių 6^{27} galima suprastinti moduliu 29 , keliais veiksmams mažinant laipsnio rodiklį:

$$a_1 \equiv 6^{27} \equiv 216^9 \equiv 13^9 \equiv 169^4 \cdot 13 \equiv 24^4 \cdot 13 \equiv (-5)^4 \cdot 13 \equiv 8125 \equiv 5 \pmod{29}.$$

Prastindami rodiklį b_2 pasinaudokime tuo, kad laipsnio 5^{732} pagrindas 5 yra tarpusavyje pirminis su $28 = 2^2 \cdot 7$ (nesidalija nei iš 2 , nei iš 7). Galioja Oilerio teorema: nuo 1 iki 28 yra 12 natūraliųjų skaičių, kurie nesidalija nei iš 2 , nei iš 7 , todėl $\varphi(28) = 12$ ir $5^{12} \equiv 1 \pmod{28}$. Turime

$$732 \equiv 0 \pmod{12}, \quad b_2 \equiv 5^0 \equiv 1 \pmod{28}, \quad a_2 \equiv 26^1 \equiv 26 \pmod{29}.$$

Vadinas, $a_1 + a_2 \equiv 5 + 26 \equiv 31 \equiv 2 \pmod{29}$.

Atsakymas. 2.

4 pavyzdys. Nustatykite, su kokia liekana $3126^{559^{7201}} + 17^{2809^{289}} + 20^{2^{736}}$ dalijasi iš 81. Su $81 = 3^4$ tarpusavyje pirminiai yra tie sveikieji skaičiai, kurie nesidalija iš 3. Nuo 1 iki 81 iš 3 dalijasi kas trečias natūralusis skaičius, todėl tokių skaičių yra $81:3 = 27$. Taigi $\varphi(81) = 81 - 27 = 54$.

3126 dalijasi iš 3, tad skaičiui $a_1 = 3126^{559^{7201}}$ Oilerio teoremos nepritaikysime. To ir nereikia: laipsnio pagrindas dalus iš 3, todėl a_1 dalijasi iš trejeto didelio laipsnio (iš $3^{559^{7201}}$), tuo labiau iš 3^4 .

Skaičius 17 iš 3 nesidalija, todėl taikome Oilerio teoremą laipsniui $a_2 = 17^{2809^{289}}$:

$$2809 \equiv 1 \pmod{54}, \quad 2809^{289} \equiv 1^{289} \equiv 1 \pmod{54}, \quad 17^{2809^{289}} \equiv 17^1 \equiv 17 \pmod{81}.$$

Skaičius 20 iš 3 nesidalija, todėl pagal Oilerio teoremą laipsnio $a_3 = 20^{2^{736}}$ rodiklį 2^{736} galime suprastinti moduliu 54. Laipsniui 2^{736} vėl būtų galima taikyti Oilerio teoremą, tačiau jo pagrindas 2 nėra tarpusavyje pirminis su $54 = 2 \cdot 27$. Visgi jis yra tarpusavyje pirminis su 27. Analogiškai kaip $\varphi(81)$ reikšmę, gauname $\varphi(27) = 27 - 9 = 18$. Tada $736 \equiv 16 \pmod{18}$, $2^{736} \equiv 2^{16} \pmod{27}$. Toliau gauname $2^{16} \equiv 32^3 \cdot 2 \equiv 5^3 \cdot 2 \equiv 250 \equiv 7 \pmod{27}$. Taigi skaičius 2^{736} dalijasi iš 27 su liekana 7 ir priklauso progresijai $7, 7 + 27, 7 + 2 \cdot 27, \dots$, kurią galima išskaidyti į dvi progresijas pagal dalumą iš 54: nelyginiai skaičiai $7, 7 + 2 \cdot 27, 7 + 4 \cdot 27, \dots$ dalijasi iš 54 su liekana 7, o lyginiai skaičiai $34, 34 + 2 \cdot 27, 34 + 4 \cdot 27, \dots$ dalijasi iš 54 su liekana 34. Skaičius 2^{736} lyginis, todėl $2^{736} \equiv 34 \pmod{54}$, $a_3 \equiv 20^{34} \equiv 400^{17} \equiv 76^{17} \equiv (-5)^{17} \pmod{81}$ ir

$$a_3 \equiv (-25) \cdot 3125^3 \equiv (-25) \cdot 47^3 \equiv (-1) \cdot 2\,595\,575 \equiv -11 \equiv 70 \pmod{81}.$$

Tada $a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0 + 17 + 70 \equiv 87 \equiv 6 \pmod{81}$.

Atsakymas. 6.

Oilerio funkcija. Remiantis Pagrindine aritmetikos teorema, kiekvienas natūralusis $m > 1$ užrašomas išraiška $p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_k^{a_k}$, kur $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ (čia $k \geq 1$) yra skirtingi pirminiai skaičiai, o rodikliai $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ yra natūralieji. Be to, tokią išraišką – **skaidinį pirminiais daugikliais** – skaičius m turi vienintelę (nekreipiant dėmesio į dauginamųjų tvarką). Skaičiai $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ yra visi pirminiai m dalikliai (kitų nėra pagal Euklido lemą). Jei sveikasis n yra tarpusavyje pirminis su tokiu skaičiumi m , tai nesidalija iš jokio p_i . Kita vertus, jei n nėra tarpusavyje pirminis su m , tai jie turi bendrą daliklį $d > 1$, kuris (būdamas pirminių skaičių sandauga) turi pirminį daliklį p , iš kurio tada dalijasi m ir n . Kadangi iš p dalijasi m , tai p sutampa su vienu iš p_i . **Vadinasi**, sveikieji skaičiai, tarpusavyje pirminiai su natūraliuoju m , yra visi sveikieji skaičiai, nesidalijantys iš jokio pirminio skaičiaus, kuris yra m skaidinyje pirminiais daugikliais. Šia išvada jau nejučia naudojomes pavyzdžiuose: skaičiai, tarpusavyje pirminiai su $28 = 2^2 \cdot 7$ arba su $81 = 3^4$, – tai skaičiai, nesidalijantys atitinkamai iš 2 ir 7 arba iš 3. Šis pastebėjimas pravers, gaunant Oilerio funkcijos formulę, leidžiančią tiesiogiai neskaičiuoti, keli skaičiai nuo 1 iki m yra tarpusavyje pirminiai su m .

5 pavyzdys. Nustatykite, kaip susijusios reikšmės $\varphi(m)$ ir $\varphi(5m)$, kai $m > 1$ yra bet koks natūralusis skaičius. Nuo 1 iki m yra $\varphi(m)$ natūraliųjų skaičių, tarpusavyje pirminių su m , t. y. tokių, kurie nesidalija iš pirminių skaičių, esančių skaičiaus m skaidinyje pirminiais daugikliais (trumpinsime – SPD). Nuo 1 iki $5m$ analogiškai yra $\varphi(5m)$ natūraliųjų skaičių, kurie nesidalija iš pirminių skaičių, esančių skaičiaus $5m$ SPD. Natūraliuosius skaičius nuo 1 iki $5m$ išskaidykime į 5 aibes: nuo 1 iki m , nuo $m + 1$ iki $2m$, nuo $2m + 1$ iki $3m$, nuo $3m + 1$ iki $4m$, nuo $4m + 1$ iki $5m$. Pasirinkus bet kurį skaičių r iš pirmosios aibės, skaičiai $r, r + m, r + 2m, r + 3m, r + 4m$ arba visi turi pirminį daliklį iš m SPD, arba visi neturi. Todėl penkiose aibėse yra po $\varphi(m)$ skaičių, tarpusavyje pirminių su m , o iš viso jų gauname $5\varphi(m)$. Toliau yra dvi galimybės: arba pirminis skaičius 5 yra skaičiaus m SPD skaidinyje, arba nėra. Pirmuoju atveju su m ir su $5m$ tarpusavyje pirminiai yra tie patys skaičiai, ir $\varphi(5m) = 5\varphi(m)$. Skaičiuodami $\varphi(5m)$ antruoju atveju, dar turime papildomai atmesti tuos iš skaičių $5, 5 \cdot 2, 5 \cdot 3, \dots, 5m$, kurie yra tarpusavyje pirminiai su m (bet ne su $5m$, nes dalijasi iš 5). Tai tie skaičiai $5a$, kur $a = 1, 2, 3, \dots, m$ yra tarpusavyje pirminis su m . Tokių a yra $\varphi(m)$, todėl šiuo atveju $\varphi(5m) = 5\varphi(m) - \varphi(m) = 4\varphi(m)$. Taigi žinodami, kad $\varphi(28) = 12$, gauname $\varphi(140) = 4 \cdot 12 = 48$, $\varphi(700) = 5 \cdot 48 = 240$, $\varphi(3500) = 5 \cdot 240 = 1200$ ir apskritai $\varphi(28 \cdot 5^n) = 12 \cdot 4 \cdot 5^{n-1}$ (kiekvienam natūraliajam n).

Atsakymas. $\varphi(5m) = 5\varphi(m)$, kai m dalijasi iš 5, ir $\varphi(5m) = 4\varphi(m)$ priešingu atveju.

5 pavyzdyje vietoj $\varphi(5m)$ imdami $\varphi(pm)$, kur skaičius p – bet koks pirminis, analogiškai įrodytume, kad $\varphi(pm) = p\varphi(m)$, kai m dalijasi iš p , ir $\varphi(pm) = (p - 1)\varphi(m)$ priešingu atveju. Tada $\varphi(m \cdot p^n) = \varphi(m) \cdot (p - 1) \cdot p^{n-1} = \varphi(m) \cdot (p^n - p^{n-1})$ kiekvienam natūraliajam n , kai

natūralusis $m > 1$ nesidalija iš p . Be to, ši formulė teisinga, ir kai $m = 1$, pagal $\varphi(p) = p - 1$ ir $\varphi(p^n) = \varphi(p) \cdot p^{n-1} = p^n - p^{n-1}$ (kai $n > 1$). Taip gauname bendrąją Oilerio funkcijos formulę.

Išvada. Tarkime, kad natūraliojo $m > 1$ skaidinys pirminiais daugikliais yra $p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_k^{a_k}$. Tada $\varphi(m) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1})(p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1})(p_3^{a_3} - p_3^{a_3-1}) \dots (p_k^{a_k} - p_k^{a_k-1})$.

Taigi, pavyzdžiui, $\varphi(2^2 \cdot 7) = (2^2 - 2)(7 - 1) = 12$, $\varphi(7^4) = 7^4 - 7^3 = 2058$, $\varphi(3 \cdot 73) = (3 - 1)(73 - 1) = 144$, $\varphi(7^3 \cdot 11^2 \cdot 29) = (7^3 - 7^2)(11^2 - 11)(29 - 1) = 905\,520$, Bet $\varphi(9^4) \neq 9^4 - 9^3$ ir $\varphi(3 \cdot 91) \neq (3 - 1)(91 - 1)$ (skaičiai 9 ir 91 ne pirminiai). Iš tiesų $\varphi(9^4) = 3^8 - 3^7$ ir $\varphi(3 \cdot 91) = (3 - 1)(7 - 1)(13 - 1)$. Taip pat $\varphi(3^2 \cdot 3^5) \neq (3^2 - 3)(3^5 - 3^4)$ (SPD pirminiai skaičiai p_i turi būti skirtingi). Taikant Oilerio funkcijos formulę, reikia gauti m SPD.

6 pavyzdys. Apskaičiuokime a) visas galimas $\varphi(75m) : \varphi(m)$ reikšmes; b) $\varphi(579\,768)$.

a) Kadangi $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$, tai $\varphi(75m)$ gauname iš $\varphi(m)$, daugindami iš 2 arba 3 (priklausomai nuo to, ar m dalijasi iš 3), tada iš $4 \cdot 5 = 20$ arba $5 \cdot 5 = 25$ (priklausomai nuo to, ar m dalijasi iš 5).

b) Išskaidykime skaičių $m = 579\,768$ pirminiais daugikliais, vis dalydami iš pirminių skaičių 2, 3, 5, ... (jei dalijasi be liekanos). Pirmiausiai kartotinai dalykime iš 2, kol tai įmanoma, tada iš 3, ir t. t.: $579\,768 : 2 = 289\,884$, $289\,884 : 2 = 144\,942$, $144\,942 : 2 = 72\,471$ (nesidalija iš 2), $72\,471 : 3 = 24\,157$ (nesidalija iš 3, iš 5), $24\,157 : 7 = 3\,451$, $3\,451 : 7 = 493$ (nesidalija iš 7, iš 11, iš 13), $493 : 17 = 29$ (gautas skaičius pirminis). Vadinasi, $m = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 17 \cdot 29$ ir $\varphi(m) = 4 \cdot 2 \cdot 42 \cdot 16 \cdot 28 = 150\,528$.

Atsakymas. a) 40, 50, 60, 75; b) 150 528.

Primityvioji šaknis. Tarkime, kad sveikasis skaičius a nesidalija iš pirminio skaičiaus p . Seką $a, a^2, a^3, \dots$ nagrinėkime modulių p , t. y. dalybos iš p liekanų požiūriu. Jei dvi liekanos sutampa, t. y. jei $a^i \equiv a^j \pmod{p}$, $i < j$, tai $a^j - a^i = a^i(a^{j-i} - 1)$ dalijasi iš p . Tada iš p dalijasi $a^{j-i} - 1$, o a^{j-i} dalijasi iš p su liekana 1. Čia $j - i < j$, todėl kol sekoje $a, a^2, a^3, \dots$ negausime liekanos 1, jos narių dalybos iš p liekanos negali sutapti. Tegu k yra mažiausias natūralusis skaičius, kuriam $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ (egzistuoja pagal Mažąją Ferma teoremą). Jis vadinamas **skaičiaus a eilės modulių p** . Tada skaičių $a, a^2, a^3, \dots, a^k$ dalybos iš p liekanos yra k skirtingų skaičių. Toliau liekanos periodiškai kartojasi: $a^{k+1} \equiv a \cdot a^k \equiv a \cdot 1 \equiv a \pmod{p}$, panašiai $a^{k+2} \equiv a^2 \pmod{p}$, $a^{k+3} \equiv a^3 \pmod{p}$, ir t. t. Negausime kitų liekanų nei skaičių $a, a^2, a^3, \dots, a^k$ liekanos. **Vadinasi**, skaičiaus a laipsniai modulių p generuoja tiek skirtingų liekanų, kokia yra a eilė modulių p . Su liekana 1 iš p dalijasi tik laipsniai $a^k, a^{2k}, a^{3k}, \dots$ (čia rodikliai yra k kartotiniai). Tarp jų yra a^{p-1} (Mažoji Ferma teorema). **Vadinasi**, skaičiaus eilė k modulių p visada yra skaičiaus $p - 1$ daliklis, ir $k \leq p - 1$. Pavyzdžiui, skaičiaus 3 laipsniai iš eilės generuoja dalybos iš 11 liekanas 3, 9, 5, 4, 1, 3, 9, 5, 4, 1, ... (čia, pvz., $3^4 \equiv 3^3 \cdot 3 \equiv 5 \cdot 3 \equiv 15 \equiv 4 \pmod{11}$). Taigi skaičiaus 3 eilė modulių 11 yra 5. Nors ji nesutampa su $11 - 1 = 10$, bet yra 10 daliklis. Žinoma, tada eilė modulių 11 lygi 5 ir skaičiams $3 + 11 = 14$, $14 + 11 = 25$, $3 - 11 = -8$ ir t. t. Tuo tarpu skaičiaus 2 (tuo pačiu skaičių 24, -9 ir t. t.) eilė modulių 11 lygi 10 (yra maksimali). Skaičius 55 eilės modulių 11 apskritai neturi (dalijasi iš 11), o jo eilė modulių 13 yra tokia pati kaip skaičiaus $55 - 4 \cdot 13 = 3$ (ši eilė lygi 3).

Pastaba. Vietoj pirminio p imant bet koki natūralųjį m , analogiškai apibrėžiama eilė modulių m kiekvienam sveikajam a , tarpusavyje pirminiam su m . Ji yra skaičiaus $\varphi(m)$ daliklis ir vėlgi parodo, kiek skirtingų dalybos iš m liekanų generuoja laipsniai $a, a^2, a^3, \dots$. Dar 2 pavyzdyje matėme, kad skaičiaus 7 eilė modulių 27 lygi 9. Atitinkamos 9 liekanos yra 7, 22, 19, 25, 13, 10, 16, 4, 1.

Yra įrodyta, kad kiekvienam pirminiam p egzistuoja toks sveikasis skaičius g , nedalus iš p , kurio eilė modulių p lygi $p - 1$. Kiekvienas toks g vadinamas **primityviaja šaknimi modulių p** . Tokio g laipsniai $g, g^2, g^3, \dots, g^{p-1}$ nesidalija iš p ir generuoja $p - 1$ liekaną, tad g yra visų galimų nenulinių liekanų 1, 2, 3, ..., $p - 1$ generatorius (todėl jį ir žymime g). T. y. $g, g^2, g^3, \dots, g^{p-1}$ dalybos iš p liekanos yra tam tikra tvarka surašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., $p - 1$.

7 pavyzdys. Nustatykime, kurie iš skaičių 2, 87, -109 , 12 569 yra primitiviosios šaknys modulių 19.

Pradėkime nuo skaičiaus 2. Reikia nustatyti, ar jo eilė yra $19 - 1 = 18$, ar mažesnė. Iš Mažosios Ferma teoremos žinome, kad $2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$, to netikrinkime. Reikia patikrinti, ar kuris iš skaičių $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{18}$ lygsta 1 modulių 19. Skaičius 18 yra gana mažas, tad būtų galima tiesiogiai patikrinti visus šiuos dvejetainius laipsnius. Tačiau žinome, kad skaičiaus eilė yra 18 daliklis, todėl lieka

tikrinti $2^1, 2^2, 2^3, 2^6, 2^9$. Be to, jei $2^9 \equiv (2^3)^3 \not\equiv 1 \pmod{19}$, tai $2^3 \not\equiv 1 \pmod{19}$, todėl nebūtina tikrinti 2^3 ir analogiškai $2^1, 2^2$. Taigi kadangi $2^6 \equiv 7 \not\equiv 1 \pmod{19}$ ir $2^9 \equiv 16^2 \cdot 2 \equiv (-3)^2 \cdot 2 \not\equiv 1 \pmod{19}$, tai skaičiaus 2 eilė moduliui 19 lygi 18, o pats skaičius 2 yra primityvioji šaknis.

Skaiciaus 87 eilė moduliui 19 yra tokia pati kaip skaičiaus $87 - 19 \cdot 4 = 11$. Analogiškai kaip skaičiui 2, pakanka tikrinti laipsnius 11^6 ir 11^9 . Kadangi $11^6 \equiv 121^3 \equiv 7^3 \equiv 343 \equiv 1 \pmod{19}$, tai 11^9 galime netikrinti: skaičių 11 ir 87 eilė moduliui 19 yra ne didesnė nei 6, todėl tai nėra primityviosios šaknys moduliui 19.

Skaičius -109 nėra primityvioji šaknis moduliui 19, o skaičius 12569 yra, nes $(-109)^9 \equiv 5^9 \equiv 125^3 \equiv 11^3 \equiv 1 \pmod{19}$, $12\,569 \equiv 10 \pmod{19}$, $10^6 \equiv 11 \pmod{19}$, $10^9 \equiv 18 \pmod{19}$.

Atsakymas. 2 ir 12569.

Apibendrinkime pavyzdžio pastebėjimus. Jei sveikasis a nesidalija iš pirminio p ir reikia nustatyti, ar a yra primityvioji šaknis moduliui p , tai pakanka patikrinti laipsnius a^d , kur $d < p - 1$ yra teigiamas skaičiaus $p - 1$ daliklis. Dar daugiau, pakanka patikrinti tik $a^{\frac{p-1}{q}}$ kiekvienam skaičiaus $p - 1$ pirminiam dalikliui q , nes skaičių $\frac{p-1}{q}$ teigiami dalikliai yra visos galimos d reikšmės. Jei nė vienas toks laipsnis $a^{\frac{p-1}{q}}$ nesidalija iš p su liekana 1, tai a yra primityvioji šaknis moduliui p . Žinoma, priešingu atveju a nėra primityvioji šaknis moduliui p .

8 pavyzdys. Galima patikrinti, kad mažiausia natūralioji primityvioji šaknis moduliui 41 yra 6. Iš tiesų, $1^1 \equiv 2^{20} \equiv 3^8 \equiv 4^{20} \equiv 5^{20} \equiv 1 \pmod{41}$, bet $6^8 \equiv 10 \pmod{41}$, $6^{20} \equiv 40 \pmod{41}$. Nustatykite skaičių $6^{22}, 6^{23}, 6^{25}, 6^{30}$ eilę moduliui 41. Taigi, kokiems natūraliesiems k skaičius $(6^{22})^k - 1 \equiv 6^{22k} - 1$ dalijasi iš 41? Kadangi 6 yra primityvioji šaknis, tai tiems ir tik tiems k , kuriems rodiklis $22k$ dalijasi iš $41 - 1 = 40$, taigi kuriems k dalijasi iš 20. Mažiausias toks k yra 20. Jis ir yra skaičiaus 6^{22} eilė. Analogiškai mažiausias k , kuriam $23k, 25k, 30k$ dalijasi iš 40, yra atitinkamai 40, 8, 4. Skaičiai $6^{22}, 6^{23}, 6^{25}, 6^{30}$ dalijasi iš 41 atitinkamai su liekana 5, 30, 14, 9. Taigi tuo pačiu nustatėme ir skaičių 5, 30, 14, 9 eiles moduliui 41. Jos yra atitinkamai 20, 40, 8, 4.

Atsakymas. 20, 40, 8, 4.

9 pavyzdys. Žinodami, kad 2 yra primityvioji šaknis moduliui 19, nustatykite, kurios iš lygčių

$$x^6 = 19y + 5, \quad x^6 = 19y + 11, \quad x^5 = 19y + 5$$

turi sveikąjį sprendinį (x, y) . Toms lygtims, kurios turi tokį sprendinį, nustatykite visas galimas reikšmes $n = 1, 2, 3, \dots, 18$, kurioms lygtis turi sveikąjį sprendinį $(x, y) = (2^n, y)$.

Pirmoji lygtis turi sveikąjį sprendinį (x, y) tada ir tik tada, kai sveikąjį sprendinį x turi lyginys $x^6 \equiv 5 \pmod{19}$. Čia x negali dalytis iš 19, nes priešingu atveju $x^6 \equiv 0 \pmod{19}$. Taigi x dalijasi iš 19 su viena iš liekanų 1, 2, 3, ..., 18 – su ta pačia liekana kaip vienas iš skaičių 2^n , kur $n = 1, 2, 3, \dots, 18$. Tada $x^6 \equiv 2^{6n} \equiv 64^n \equiv 7^n \pmod{19}$. Tačiau laipsniai 7^n dalijasi iš 19 tik su liekanomis 7, $11 (\equiv 7^2)$ ir $1 (\equiv 7^3)$. Vadinasi, x^6 negali dalytis iš 19 su liekana 5, o lygtis sprendinių neturi.

Panašiai nagrinėjame antrąją lygtį: lyginyje $x^6 \equiv 11 \pmod{19}$ vietoj x įrašome tokį laipsnį 2^n , kad $x \equiv 2^n \pmod{19}$, ir gauname $7^n \equiv 11 \pmod{19}$. Čia $n = 1, 2, 3, \dots, 18$. Jau nustatėme, kad tinka $n = 2$, o kadangi skaičiaus 7 eilė moduliui 19 yra 3, tai dar tinka $n = 2 + 3, 2 + 6, 2 + 9, \dots$. Vadinasi, nuo 1 iki 18 tinka reikšmės $n = 2, 5, 8, 11, 14, 17$.

Trečioji lygtis analogiškai suvedama į lyginį $x \equiv 2^n \pmod{19}$ ir $13^n \equiv 5 \pmod{19}$. Čia vietoj 7 turime 13, nes $2^{5n} \equiv 32^n \equiv 13^n \pmod{19}$. Vieną po kitos rašykime skaičiaus 13 laipsnių dalybos iš 19 liekanas: 13, 17, 12, 4, 14, 11, 10, 16, 18, Čia, pavyzdžiui, $13^7 \equiv 13^6 \cdot 13 \equiv 11 \cdot 13 \equiv 10 \pmod{19}$. Gavę 9-ąją liekaną $18 \equiv (-1) + 19$, likusias 9 liekanas galime gauti greičiau pagal $13^{9+i} \equiv (-1) \cdot 13^i \pmod{19}$. Pavyzdžiui, $13^{12} \equiv -13^3 \equiv -12 \equiv 7 \pmod{19}$. Jų galime ir nerašyti: svarbu, kad iš penktosios liekanos 14 ir tik iš jos gauname (5 + 9)-ąją liekaną $19 - 14 = 5$. Vadinasi, yra lygiai viena tinkama n reikšmė: $13^n \equiv 5 \pmod{19}$, kai $n = 14$.

Atsakymas. Pirmoji lygtis sveikųjų sprendinių neturi; antroji turi, tinka $n = 2, 5, 8, 11, 14, 17$; trečioji turi, tinka $n = 14$.

Pabaigai paminėsime, kad skaičių laipsnių prastinimas moduliui m , Oilerio funkcija ir teorema yra svarbūs **RSA kriptosistemoje** – duomenų šifravimo ir iššifravimo sistemoje, kuri plačiai naudojama, užtikrinant saugų duomenų perdavimą internetu. Ji taikoma, pasirinkus tam tikrus parametrus – skaičius, vadinamus raktais. Kai kurie iš jų turi būti labai dideli, kad sistema iš tiesų

būtų saugi, t. y. kad užšifruotų duomenų vagis, neturintis visų raktų, nepajėgtų jų iššifruoti. 10 uždavinyje pateiktas RSA kriptosistemos taikymo pavyzdys su (ne bet kaip parinktais) mažais raktais 391, 31, 159.

AŠTUNTOJI UŽDUOTIS

1. Nustatykite: a) kurie du iš 12-os skaičių $19, 19^2, 19^3, \dots, 19^{12}$ dalijasi iš 39 su mažiausiomis liekanomis; b) 13-ąjį mažiausią natūralųjį skaičių x , kuriam $19^{296\,684} + x$ dalijasi iš 39.
2. Nustatykite: a) mažiausią natūralųjį n , kuriam $138\,847^n$ dalijasi iš 49 su liekana 1; b) mažiausią keturženklį natūralųjį skaičių x , kuriam $138\,847^{300\,011^{263\,741^2\,711}} - x$ dalijasi iš 49.
3. Nustatykite $16\,353^{2^{601}} + 83^{681^{78}} + 2^{29^{542}}$ dalybos iš 23 liekaną.
4. Apskaičiuokite a) $\varphi(61) + \varphi(63) + \varphi(625) + \varphi(627)$; b) $\varphi(119\,304\,306)$.
5. Nustatykite visas galimas $\varphi(2250m) : \varphi(m)$ reikšmes (čia skaičius m natūralusis).
6. Nustatykite skaičiaus $917^{457} + 13^{42^{57}}$ dalybos iš 100 liekaną (taigi paskutinius du skaitmenis).
7. Nustatykite $11\,173^{97^{83^{457}}} + 2^{457^{83^{97}}}$ dalybos iš 363 liekaną.
Užuomina. Kelis kartus pritaikius Oilerio teorema, dviejų dėmenų prastinimą galima tęsti naudojantis tokiais lyginiais kaip $283^7 \equiv -53 \pmod{363}$ ir $2^{36} \equiv 97 \pmod{363}$.
8. a) Nustatykite, kurie iš skaičių 7, -38 , 187, 3829 yra primityviosios šaknys moduli 43.
b) Duota, kad $g = 2$ yra primityvioji šaknis moduli 13. Nustatykite, kurių iš 12 skaičių $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{12}$ eilė moduli 13 yra 3, o kurių 4. Tuo remdamiesi nustatykite, kurių iš 12 skaičių 1, 2, 3, ..., 12 eilė moduli 13 yra 3, o kurių 4.
9. Duota, kad 3 yra primityvioji šaknis moduli 31. Įrodykite, kad viena iš lygčių

$$x^{10} = 31y + 25, \quad x^7 = 31y + 10, \quad x^{10} = 31y + 13$$
neturi sveikųjų sprendinių (x, y) . Kitoms dviem lygtims nustatykite visas galimas reikšmes $n = 1, 2, 3, \dots, 30$, su kuriomis lygtis turi sveikąjį sprendinį $(x, y) = (3^n, y)$.
10. Skaičius $a < 391$ natūralusis ir tarpusavyje pirminis su 391. Padalijus skaičių a^{31} iš 391 su liekana, gauta liekana b – **pranešimo a šifras**. Padalijus skaičių b^{159} iš 391, gauta liekana c . Įrodykite, kad $c = a$, t. y. kad skaičių a , užšifruotą skaičiumi b , nurodytu būdu galima iššifruoti.
Užuomina. Raskite $\varphi(391)$.

BAIGIAMOJI UŽDUOTIS

1. Raskite funkcijos

$$f(x) = -x^2 + 3x + 5$$

didžiausią ir mažiausią reikšmes intervale $[-1; 2]$.

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = -1, \\ 7x + 6y + 5z = 5, \\ 5x + 4y + 3z = 2. \end{cases}$$

3. Išspręskite nelygybę

$$2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leq 9.$$

4. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėje AD pažymėtas toks taškas M , kad $AM : MD = 5 : 3$, o kraštinėje BC – toks taškas N , kad $BN : NC = 1 : 3$. Vektorių $\overrightarrow{MN}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$.

STOJAMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Apskaičiuokite parabolės $y = 3x^2 + 6x$ ir tiesės $y = 6 - x$ susikirtimo taškų koordinates.

Sprendimas. Parabolės $y = 3x^2 + 6x$ ir tiesės $y = 6 - x$ susikirtimo taškų M ir N koordinatėms rasti reikia išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} y = 3x^2 + 6x, \\ y = 6 - x. \end{cases}$$

Spręsdami gauname $3x^2 + 6x = 6 - x \Rightarrow 3x^2 + 7x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{2} = \frac{-7 \pm 11}{2} \Rightarrow$

$x = -3$, arba $x = \frac{2}{3}$. Vadinasi $y = 6 - (-3) = 9$, jei $x = -3$, ir $y = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$, jei $x = \frac{2}{3}$.

Taško M koordinatės yra $(-3, 9)$, o taško N koordinatės yra $(\frac{2}{3}, \frac{16}{3})$.

Atsakymas: $(-3, 9)$ ir $(\frac{2}{3}, \frac{16}{3})$.

2. Raskite du natūraliuosius skaičius, vienas iš kurių būtų 5 kartus didesnis už kitą, o jų sandauga dalytųsi iš 498.

Sprendimas. Tegul m yra mažesnis, o n – didesnis ieškomasis skaičius. Pagal sąlygą $n = 5m$, ir $n + m = 498k$, k – natūralusis skaičius.

Spręsdami lygčių sistemą

$$\begin{cases} n = 5m, \\ n + m = 498k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

gauname $5m + m = 498k \Rightarrow 6m = 498k \Rightarrow m = 83k$ ir $n = 5 \cdot 83k = 415k$, $k \in \mathbb{N}$.

Matome, kad yra be galo daug uždavinio sąlygą tenkinančių natūraliųjų skaičių m ir n porų (m, n) . Jas galima užrašyti taip: $(83k, 415k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Atsakymas: $(83k, 415k)$, $k \in \mathbb{N}$.

3. Išspręskite nelygybę

$$\frac{9}{(x+1)^2} \geq 1.$$

Sprendimas.

$$\frac{9}{(x+1)^2} \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2 \leq 9, \\ x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2 - 9 \leq 0, \\ x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 2, \\ x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow x \in [-4, -1) \cup (-1, 2].$$

Atsakymas: $[-4, -1) \cup (-1, 2]$.

4. Raskite visus triženklus natūraliuosius skaičius, tenkinančius šias sąlygas:

- a) pirmas skaitmuo tris kartus mažesnis už trečią skaitmenį;
b) šio skaičiaus suma su skaičiumi, gautu sukeitus antrą skaitmenį su trečiu, dalijasi iš 8.

Sprendimas. Tegul $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ yra ieškomas triženklis skaičius (aišku, $a \neq 0$). Pagal sąlygą $c = 3a$, $\overline{abc} + \overline{acb} = 8k$, $k \in \mathbb{N}$. Iš pirmos sąlygos gauname, kad $a \in \{1, 2, 3\}$. Nagrinėdami antrą sąlygą gauname

$$100a + 10b + c + 100a + 10c + b = 8k,$$

$$200a + 11(b + c) = 8k,$$

$$200a + 11(b + 3a) = 8k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Kadangi 200 dalijasi iš 8, tai $b + 3a$ turi dalytis iš 8. Tiesiogiai tikrindami gauname, kad

$$a = 1 \Rightarrow b = 5,$$

$$a = 2 \Rightarrow b = 2,$$

$$a = 3 \Rightarrow b = 7.$$

Taigi yra trys triženkliai skaičiai, kurie tenkina uždavinio sąlygą – 153, 226, 379.

Atsakymas: 153, 226, 379.

5. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^3y - y^3x = 6. \end{cases}$$

Sprendimas.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^3y - y^3x = 6 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ xy(x^2 - y^2) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x = -2, y = -1, \text{ arba} \\ x = 2, y = 1. \end{aligned}$$

Atsakymas: $(-2, -1), (2, 1)$.

6. Apskaičiuokite $x^4 + \frac{1}{x^4}$, jei $x + \frac{1}{x} = 4$.

Sprendimas. Kadangi $(a + \frac{1}{a})^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$, tai $x + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 = 16 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 14 \Rightarrow (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 = 196 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 194$.

Atsakymas: 194.

7. Kiek yra natūraliųjų skaičių porų (m, n) , kurioms $1 \leq m < n \leq 100$, o sandauga mn dalijasi iš 7?

Sprendimas. Iš viso galima sudaryti $\frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$ porų (m, n) , $m, n \in \{1, 2, \dots, 100\}$, $m < n$. Kad sandauga mn dalytųsi iš 7, nors vienas iš skaičių m ir n turi dalytis iš 7. Ieškomam porų skaičiui rasti pakanka suskaičiuoti, kiek yra porų (m, n) , $m < n$, kurių skaičių sandauga nesidalija iš 7, ir atimti gautą skaičių iš 4950.

Tarp skaičių 1, 2, ..., 100 yra 14, kurie dalijasi iš 7, o kiti 86 nesidalija iš 7. Vadinasi yra $\frac{86 \cdot 87}{2} = 3655$ poros (m, n) , $m < n$, $m, n \in \{1, 2, \dots, 100\}$, kurių skaičių sandauga $m \cdot n$ nesidalija iš 7. Taigi ieškomas porų skaičius yra $4950 - 3655 = 1295$.

Atsakymas: 1295.

8. Inde buvo 20% koncentracijos druskos rūgšties tirpalo. Iš pradžių iš jo nupylė 1 litrą tirpalo ir įpylė 1 litrą vandens. Paskui vėl nupylė 1 litrą tirpalo ir įpylė 1 litrą vandens. Taip susidarė 5% koncentracijos druskos rūgšties tirpalas. Apskaičiuokite, kiek litrų tirpalo buvo inde.

Sprendimas. Tarkime, kad iš pradžių inde buvo $a, a > 1$ litrų tirpalo. Pagal sąlygą šiame tirpalo kiekyje buvo $0,2a$ litrų druskos rūgšties. Po pirmo nupylimo druskos rūgšties inde liko $0,2a - 0,2 = 0,2(a - 1)$ litrų, o po antro –

$$0,2(a - 1) - \frac{0,2(a - 1)}{a} = \frac{0,2(a - 1)^2}{a}$$

litrų. Iš uždavinio sąlygos išplaukia, kad

$$\frac{0,2(a - 1)^2}{a} = 0,05a.$$

Išsprendę šią kvadratinę lygtį gauname, jog $a = 2$.

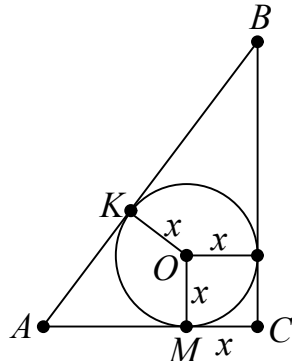
Atsakymas: 2 litrai.

9. Trikampio kraštinių santykis lygus $3 : 4 : 5$. Raskite atkarpų, į kurias įbrėžto į šį trikampį apskritimo lietimosi su trikampio kraštinėmis taškai dalija trikampio kraštines, santykius.

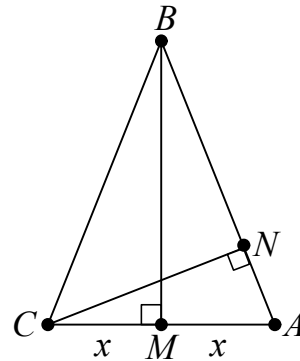
Sprendimas. Žymėkime trikampio ABC kraštines $AC = 3x$, $BC = 4x$, $AB = 5x$. Kadangi $AB^2 = AC^2 + BC^2$, tai trikampis ABC yra statusis, kampas C yra statusis (1 pav.).

Sakykime, kad taškas O yra įbrėžto į trikampį apskritimo centras, taškuose K, L, M šis apskritimas liečia atitinkamai trikampio kraštines AB, BC, AC , o apskritimo spindulys $OK = OL = OM = x$. Keturkampis $OMCL$ yra kvadratas, todėl $CM = CL = OM = OL = x$. Tuomet $AM = AK = AC - CM = 2x$, $BL = BK = BC - LC = 3x$, taigi $AM : MC = 2 : 1$, $AK : KB = 2 : 3$, $BL : LC = 3 : 1$.

Atsakymas: $AM : MC = 2 : 1$, $AK : KB = 2 : 3$, $BL : LC = 3 : 1$.



1 pav.



2 pav.

10. Lygiašonio trikampio ABC , $AB = BC$, aukštinės, $BM = 5$, $CN = 8$. Raskite kraštinių AB ir AC ilgius.

Sprendimas. Sakykime, kad $AC = 2x$, tuomet $AM = MC = x$. Trikampio ABC plotas $S = \frac{1}{2}AB \cdot CN = \frac{1}{2}AC \cdot BM$ (2 pav.), todėl $AB = \frac{2x \cdot 5}{8} = \frac{5}{4}x$. Kita vertus iš stačiojo trikampio ABM randame $AB^2 = AM^2 + BM^2 = x^2 + 5^2$. Iš lygties $\frac{25x^2}{16} = x^2 + 25$ randame, kad $x^2 = \frac{16 \cdot 25}{9}$, todėl $x = \frac{20}{3}$. Taigi $AC = 2x = \frac{40}{3}$, $AB = \frac{5}{4}x = \frac{25}{3}$.

Atsakymas: $AC = \frac{40}{3}$, $AB = \frac{25}{3}$.

PIRMOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

Geometrinio turinio tekstinių uždavinių sprendimas turi savo specifiką. Visų pirma daugeliu atvejų tikslingas situacijos sąlygą ir jos duomenų proporcijas atitinkantis iliustracinis brėžinys. Jis atskleidžia ir problemos sprendimo idėją ir schemą. Bet ne visada. Kartu reikalingas teiginių pagrindimas ir net įrodymas. Galimi sprendimo apipavidalinimo geometrinis ir aiškinamasis būdai. Pirmuoju atveju operuojame daugiau geometrine simbolika, antruoju – tekstu.

1. Lygiašonio trikampio aukštinė, nubrėžta į pagrindą lygi 12 cm, o tas pagrindas yra trumpesnis už aukštinę 16,(6)%. Apskaičiuokite šio trikampio plotą ir perimetrą.

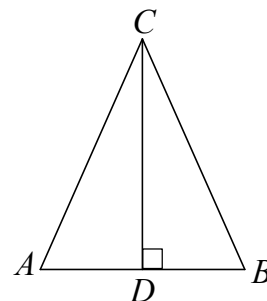
Sprendimas. Nusibraižome iliustracinį brėžinį taip, kad $AC = BC$ ir $CD \perp AB$.

I būdas.

Duota:

$\triangle ABC$ ($AC = BC$), $CD \perp AB$, $CD = 12$ cm, $AB = CD \cdot (100 - 16,(6))\%$.

Rasti: $S_{\triangle ABC}$; $P_{\triangle ABC}$.



12 cm — 100 %		1 % — $\frac{12}{100}$ cm				
AB cm — $83\frac{1}{3}$ %	$\Rightarrow$	1 % — $\frac{AB}{83\frac{1}{3}}$ cm	$\Rightarrow$	$\frac{12}{100} = \frac{AB}{83\frac{1}{3}}$	$\Rightarrow$	$AB = \frac{12 \cdot 83\frac{1}{3}}{100} = 10$ (cm)

Kadangi $\triangle ABC$ ($AC = BC$) ir $CD \perp AB$, tai $\angle ACD = \angle BCD$ ir $AD = DB = 5$ cm.

$$\triangle ACD (\angle ADC = 90^\circ) \Rightarrow AD^2 + CD^2 = AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ (cm)}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60 \text{ (cm}^2\text{)}, \quad P_{\triangle ABC} = AC + BC + AB = 13 + 13 + 10 = 36 \text{ (cm)}.$$

II būdas.

Tegul $CD = 12$ cm, tai AB sudaro $100\% - 16,(6)\% = 83,(3)\% = 83\frac{1}{3}\%$ atkarpos CD , t. y.

$$12 \cdot \frac{83\frac{1}{3}}{100} = 12 \cdot \frac{250}{3 \cdot 100} = 10 \text{ (cm)}.$$

Kadangi lygiašonio trikampio aukštinė, nubrėžta į pagrindą, yra ir pusiaukampinė ir pusiaukraštinė, tai $AD = DB = 5$ cm. Trikampis ACD – statusis, tai pagal Pitagoro teoremą:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2, \quad AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \quad \text{ir} \quad AC = BC = 13 \text{ cm}.$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD, \quad \text{tai} \quad S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$P = AC + BC + AB = 13 + 13 + 10 = 36 \text{ (cm)}.$$

Ats.: 60 cm²; 36 cm.

2. Stačiojo trikampio įžambinė yra 10 m, o statinių ilgių suma lygi 14 m. Raskite šio trikampio plotą.

Sprendimas. Tegul vieno statinio ilgis x m ($x > 0$), o kito – $(14 - x)$ m. Pagal Pitagoro teoremą:

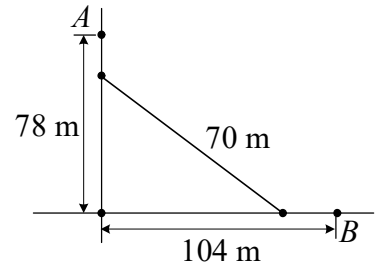
$$x^2 + (14 - x)^2 = 10^2, \quad x^2 + 196 - 28x + x^2 = 100, \quad x^2 - 14x - 48 = 0, \quad x_1 = 6, \quad x_2 = 8.$$

Vieno statinio ilgis 6 m, o kito 8 m. Trikampio plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ (m}^2\text{)}$.

Ats.: 24 m^2 .

3. Dviem stačiojo kampo kraštinėmis juda kūnai A ir B . Tam tikru momentu kūnas A , kurio greitis 6 m/s , nuo stataus kampo viršūnės buvo nutolęs per 78 m , o kūnas B , kurio greitis 8 m/s , – 104 m . Po kiek laiko nuo to momento atstumas tarp kūnų buvo 70 m ?

Sprendimas. Sakysime po t sekundžių atstumas tarp kūnų A ir B buvo 70 m . Per tą laiką kūnas A pasislinko $6t$ metrų ir iki stataus kampo viršūnės yra $|78 - 6t|$ metrų, o kūnas B pasislinko $8t$ metrų ir iki stataus kampo viršūnės jam liko $|104 - 8t|$ metrų.



Pagal Pitagoro teoremą: $(78 - 6t)^2 + (104 - 8t)^2 = 70^2$. Kad išvengtume sudėtingų skaičiavimų pakėlus kvadratu ir atskliautus, pastebime, jog

$$(6(13 - t))^2 + (8(13 - t))^2 = 70^2, \quad 36(13 - t)^2 + 64(13 - t)^2 = 70 \cdot 70, \quad 100(13 - t)^2 = 7 \cdot 7 \cdot 100, \\ (13 - t)^2 = 49 \text{ ir } |13 - t| = 7, \quad t = 6 \text{ arba } t = 20.$$

Vadinasi, po 6 s arba 20 s atstumas tarp kūnų A ir B buvo 70 m .

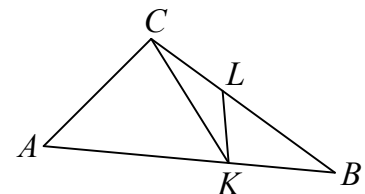
Ats.: 6 s arba 20 s .

Pastaba. Po 6 s atstumas tarp kūnų tampa 70 metrų, abiem kūnams artėjant prie stačiojo kampo viršūnės; po 20 s atstumas tarp kūnų vėl tampa 70 metrų, kūnams nesustojant kampo viršūnėje ir toliau judant kampo kraštinių tęsiniais. Kūnams judant kitaip (pvz., kai pradžioje kūnas A tolsta nuo stačiojo kampo viršūnės, o kūnas B artėja link jos), sprendinių negauname – tuo siūlome įsitikinti savarankiškai.

4. Trikampio ABC kraštinėse AB ir BC pažymėti atitinkamai taškai K ir L taip, kad $AK : KB = 2 : 1$, o $BL : LC = 3 : 2$. Kiek procentų trikampio BKL plotas sudaro keturkampio $AKLC$ ploto?

Sprendimas. Tegul ΔABC plotas yra x . Kadangi $AK : KB = 2 : 1$, tai $S_{\Delta AKC} = \frac{2x}{3}$, o $S_{\Delta BCK} = \frac{x}{3}$.

Kadangi $BL : LC = 3 : 2$, tai $S_{\Delta CKL} = \frac{2}{5} S_{\Delta BCK} = \frac{2}{5} \cdot \frac{x}{3} = \frac{2x}{15}$, o $S_{\Delta BKL} = \frac{3}{5} S_{\Delta BCK} = \frac{3}{5} \cdot \frac{x}{3} = \frac{3x}{15} = \frac{x}{5}$.



Keturkampį $AKLC$ sudaro du trikampiai AKC ir CKL arba trikampių ABC ir BKL skirtumas, tai

$$S_{AKLC} = \frac{2x}{3} + \frac{2x}{15} = \frac{12x}{15} = \frac{4x}{5} \text{ arba } S_{AKLC} = x - \frac{3x}{15} = x - \frac{x}{5} = \frac{4x}{5}.$$

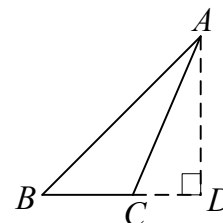
Vadinasi, trikampio BKL plotas sudaro keturkampio $AKLC$ ploto $\left(\frac{x}{5} : \frac{4x}{5}\right) \cdot 100\% = \frac{x \cdot 5}{5 \cdot 4x} \cdot 100\% = 25\%$.

Ats.: 25% .

5. Trikampio ABC kraštinių ilgiai yra atitinkamai 18 , 20 ir 34 ilgio vienetai. Nustatykite trikampio rūšį kampų atžvilgiu ir apskaičiuokite didžiausio kampo sinusą bei aukštinės, nubrėžtos į trumpiausią kraštinę, ilgį.

Sprendimas. Kadangi ilgiausios kraštinės kvadratas $c^2 = 34^2 = 1156$, o $a^2 + b^2 = 18^2 + 20^2 = 324 + 400 = 724$ ir $1156 > 724$, t. y. $c^2 > a^2 + b^2$. Vadinasi, trikampis bukas.

Trikampio plotą galime apskaičiuoti įvairiai. Kadangi pagal užduotį reikia apskaičiuoti aukštinės, nubrėžtos į trumpiausią kraštinę, ilgį, tai trikampio pagrindu patogu pasirinkti trumpiausią kraštinę BC , t. y. $a = 18$. Trikampis bukasis, tai aukštinė, nubrėžta į trumpiausią kraštinę, yra trikampio išorėje.



Nubrėžiame $AD \perp BC$. Turime du stačiuosius trikampius ACD ir ABD . Jeigu $CD = x$, $x > 0$, tai $BD = 18 + x$. Pagal Pitagoro teoremą:

$$AD^2 = AC^2 - CD^2 = 20^2 - x^2 \text{ ir } AD^2 = AB^2 - BD^2 = 34^2 - (18 + x)^2.$$

Vadinasi, $20^2 - x^2 = 34^2 - (18 + x)^2$. Turime $400 - x^2 = 1156 - 324 - 36x - x^2$, $36x = 432$, $x = 12$. Taigi $AD^2 = AC^2 - x^2 = 20^2 - 12^2 = 256$ ir $AD = 16$. Aukštinės, nubrėžtos į trumpiausią kraštinę, ilgis yra 16 ilgio vienetų, o trikampio plotas $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 16 = 144$ (ploto vienetų).

Didžiausio kampo sinusą apskaičiuojame pagal trigonometrinę ploto formulę. Didžiausias kampas yra prieš ilgiausią kraštinę c , t. y. kampas C :

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin C; \quad 144 = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 20 \cdot \sin C, \quad \sin C = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Ats.: bukasis trikampis; $\sin C = 0,8$; $h_{BC} = 16$ ilg. vnt.

6. Trikampio plotas lygus $6\sqrt{3}$ cm², o dviejų kraštinių ilgiai yra 3 cm ir 7 cm. Raskite trečiosios kraštinės ilgį.

Sprendimas. Duota: $S_{\triangle} = 6\sqrt{3}$ cm², $a = 3$ cm, $b = 7$ cm.

Rasti: c ($c > 0$).

Pagal trikampio nelygybę $4 \text{ cm} < c < 10 \text{ cm}$.

Trikampio perimetras $P = 3 + 7 + c = 10 + c$ (cm), $p = 5 + \frac{c}{2}$ (cm).

Pagal Herono formulę:

$$6\sqrt{3} = \sqrt{\left(5 + \frac{c}{2}\right)\left(5 + \frac{c}{2} - 3\right)\left(5 + \frac{c}{2} - 7\right)\left(5 + \frac{c}{2} - c\right)}, \quad 6\sqrt{3} = \sqrt{\left(5 + \frac{c}{2}\right)\left(2 + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2} - 2\right)\left(5 - \frac{c}{2}\right)},$$

$$36 \cdot 3 = \left(5 - \frac{c}{2}\right)\left(5 + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2} - 2\right)\left(\frac{c}{2} + 2\right), \quad 108 = \left(25 - \frac{c^2}{4}\right)\left(\frac{c^2}{4} - 4\right), \quad 108 = \frac{100 - c^2}{4} \cdot \frac{c^2 - 16}{4} \cdot 16$$

$$1728 = 100c^2 - c^4 - 1600 + 16c^2, \quad c^4 - 116c^2 + 3328 = 0, \quad c^2 = 58 \pm 6.$$

Vadinasi, $c = 8$ arba $c = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Ats.: $2\sqrt{13}$ cm, 8 cm.

7. Trikampio kraštinių ilgių santykiai $17:10:9$, o plotas lygus 144 cm². Raskite trikampio perimetrą.

Sprendimas. Kadangi trikampio kraštinių santykiai yra $17:10:9$, tai jo kraštinių ilgiai: $17x$ cm, $10x$ cm ir $9x$ cm. Todėl perimetras $P = 17x + 10x + 9x = 36x$, o $p = 18x$ cm.

Pagal Herono formulę:

$\sqrt{18x \cdot (18x - 17x)(18x - 10x)(18x - 9x)} = 144$, $\sqrt{18x \cdot x \cdot 8x \cdot 9x} = 144$, $36x^2 = 144$, $x = 2$. Kraštinių ilgiai $17 \cdot 2 = 34$ (cm), $10 \cdot 2 = 20$ (cm) ir $9 \cdot 2 = 18$ (cm), o perimetras $P = 34 + 20 + 18 = 72$ (cm).

Ats.: 72 cm.

8. Stačiakampio formos kambario grindų ploto (m^2) skaičius yra vienetu mažesnis už šio kambario grindų perimetro (m) skaičių. Raskite kambario grindų matmenis metrais, jei žinoma, kad jie yra sveikieji metrų skaičiai.

Sprendimas. Sakysime stačiakampio ilgis x m ($x \in \mathbb{N}$), o plotis y m ($y \in \mathbb{N}$). Pagal sąlygą:

$$xy = 2(x + y) - 1, \quad xy = 2x + 2y - 1, \quad xy - 2y = 2x - 1, \quad y(x - 2) = 2x - 1, \quad y = \frac{2x - 1}{x - 2}.$$

Išskiriame trupmeninio reiškinio sveikąją dalį:

$$y = \frac{2x - 1}{x - 2} = \frac{2x - 4 + 4 - 1}{x - 2} = \frac{2(x - 2) + 3}{x - 2} = \frac{2(x - 2)}{x - 2} + \frac{3}{x - 2} = 2 + \frac{3}{x - 2}.$$

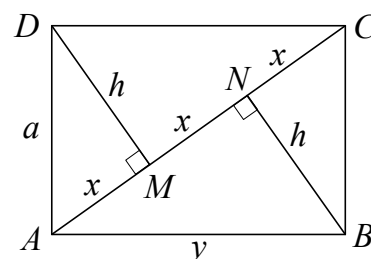
Akivaizdu, kad y yra sveikasis skaičius, kai $x = 3$ arba $x = 5$. Jei $x = 3$, tai $y = 2 + \frac{3}{3 - 2} = 5$,

o jei $x = 5$, tai $y = 2 + \frac{3}{5 - 2} = 3$. Vadinasi, kambario ilgis 5 m, o plotis 3 m.

Ats.: 5 m $\times$ 3 m.

9. Iš stačiakampio dviejų priešingų viršūnių nubrėžti statmenys įstrižainei dalija ją į tris lygias dalis. Raskite stačiakampio ilgesniosios kraštinės ilgį, jei trumpesnioji yra a ($a > 0$).

Sprendimas. Pažymėkime $AM = MN = NC = x$, $DM = BN = h$, o $AB = y$ ($y > 0$). Iš stačiųjų trikampių ADM , ABN ir ABC , pagal Pitagoro teoremą turime:



$$\begin{cases} x^2 + h^2 = a^2, \\ h^2 + (2x)^2 = y^2, \\ a^2 + y^2 = (3x)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + h^2 = a^2, \\ 4x^2 + h^2 = y^2, \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = y^2 - a^2, \\ a^2 + y^2 = 9x^2; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 = 3y^2 - 3a^2, \\ a^2 + y^2 = 9x^2; \end{cases} \Rightarrow a^2 + y^2 = 3y^2 - 3a^2, \quad 2y^2 = 4a^2, \quad y^2 = 2a^2, \quad y = a\sqrt{2}.$$

Taigi stačiakampio ilgesnioji kraštinė yra $a\sqrt{2}$.

Ats.: $y = a\sqrt{2}$.

10. Taisyklingasis daugiakampis iš viso turi 90 įstrižainių. Kam lygus šio daugiakampio vieno kampo dydis?

Sprendimas. Kadangi n -kampis turi $\frac{1}{2}n(n-3)$ įstrižainių, tai $\frac{1}{2}n(n-3) = 90$,

$n^2 - 3n - 180 = 0$, $n = 15$ ($n > 0$). Vadinasi, turime taisyklingąjį 15-kampį.

Taisyklingojo daugiakampio vidaus kampų sumą galima apskaičiuoti įvairiai.

I būdas.

Iš viršūnės išvedamos $15 - 2 = 13$ įstrižainių. Jos daugiakampį dalija į 13 trikampių, kurių kiekvieno kampų suma yra 180° , o daugiakampio visų vidaus kampų suma lygi $180^\circ \cdot 13 = 2340^\circ$.

II būdas.

Daugiakampio vidinėje srityje paėmę tašką ir jį sujungę su visomis viršūnėmis turime 15 trikampių. Jų visų kampų suma yra $180^\circ \cdot 15 = 2700^\circ$. Kadangi pilnutinis kampas apie pasirinktą tašką nėra taisyklingojo daugiakampio vidaus kampų kampų, tai turime $2700^\circ - 360^\circ = 2340^\circ$.

Taigi taisyklingojo 15-kampio vieno vidaus kampo dydis yra $2340^\circ : 15 = 156^\circ$.

Ats.: 156° .

ANTROSIOJOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Dviejų teigiamų sveikųjų skaičių suma lygi 161, o 7 yra didžiausias jų bendras daliklis. Tarp šias sąlygas tenkinančių skaičių raskite du skaičius, kurių sandauga yra didžiausia.

Sprendimas. Tegų x ir y yra ieškomi teigiami sveikieji skaičiai. Pagal sąlygą, $x = 7m$, $y = 7n$ ir $x + y = 161$ (čia $m, n \in \mathbb{N}$), todėl

$$x + y = 161 \Rightarrow 7m + 7n = 161 \Rightarrow m + n = 23 \Rightarrow m = 23 - n.$$

Tada $xy = 49mn = 49(23 - n)n$, $n \in \{1; 2; \dots; 22\}$. Taikydami perrankos metodą, gauname, kad didžiausią reikšmę, lygią 6468, sandauga xy įgyja, kai $n = 11$ ir $n = 12$. O tada $m = 12$ (kai $n = 11$) arba $m = 11$ (kai $n = 12$).

Vadinasi, ieškomi skaičiai yra 77 ir 84.

Ats.: 77 ir 84.

2. Raskite didžiausią sandaugos $x \cdot y$ reikšmę, jeigu $3x + 4y = 12$.

Sprendimas. Iš lygybės $3x + 4y = 12$ gauname, kad $y = \frac{12 - 3x}{4} = \frac{3}{4}(4 - x)$, todėl

$$xy = x \cdot \frac{3}{4}(4 - x) = \frac{3}{4}(4x - x^2) = \frac{3}{4}(4 - (x - 2)^2).$$

Aišku, kad $4 - (x - 2)^2 \leq 4$, o reikšmę 4 skirtumas $4 - (x - 2)^2$ įgyja tik kai $x = 2$ (tada $y = \frac{3}{2}$).

Vadinasi, $\max(xy) = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$, jeigu $3x + 4y = 12$.

Ats.: 3.

3. Raskite mažiausią sumos $x^2 + y^2$ reikšmę, jeigu $8x + 4y = 1$.

Sprendimas. Iš lygybės $8x + 4y = 1$ gauname, kad $y = \frac{1 - 8x}{4} = \frac{1}{4} - 2x$, todėl

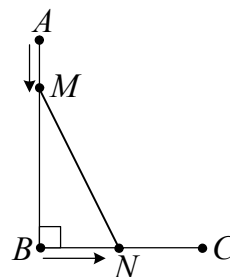
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + \left(\frac{1}{4} - 2x\right)^2 = x^2 + \frac{1}{16} - x + 4x^2 = 5x^2 - x + \frac{1}{16} = \\ &= \left(\sqrt{5} \cdot x - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{1}{16} - \frac{1}{20} = \left(\sqrt{5} \cdot x - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{1}{80} \geq \frac{1}{80}. \end{aligned}$$

Lygybė čia galioja tik kai $\sqrt{5} \cdot x - \frac{1}{2\sqrt{5}} = 0$, taigi tik kai $x = \frac{1}{10}$ (tada $y = \frac{1}{20}$).

Vadinasi, $\min(x^2 + y^2) = \frac{1}{80}$, jeigu $8x + 4y = 1$.

Ats.: $\frac{1}{80}$,

4. Tuo pačiu metu iš miesto A į miestą B išvažiuoja dviratininkas, kurio greitis 30 km/h, o iš miesto B į miestą C – dviratininkas, kurio greitis 10 km/h. Keliai AB ir BC yra tiesūs, o mieste B susikerta stačiu kampu. Nustatykite, po kurio laiko atstumas tarp dviratininkų bus mažiausias, jei miestas B yra už 120 km nuo miesto A , o miestas C yra už 40 km nuo miesto B .



Sprendimas. Pagal sąlygą, laiko momentu t , $t > 0$, pirmas dviratininkas bus nuvažiavęs $30t$, o antras dviratininkas – $10t$ kilometrų.

Tegu M yra pirmo dviratininko vieta kelyje AB , o N – antro dviratininko vieta kelyje BC laiko momentu t . Atstumas tarp dviratininkų yra atkarpos MN ilgis:

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{BM^2 + BN^2} = \sqrt{(120 - 30t)^2 + (10t)^2} = 10 \cdot \sqrt{(12 - 3t)^2 + t^2} = 10\sqrt{10t^2 - 72t + 144} = \\ &= 10\sqrt{\left(\sqrt{10}t - \frac{36}{\sqrt{10}}\right)^2 + 144 - \frac{36^2}{10}} = 10\sqrt{\left(\sqrt{10}t - \frac{36}{\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{144}{10}} \geq 10\sqrt{\frac{144}{10}} = 10 \cdot \frac{12}{\sqrt{10}} = 12\sqrt{10}. \end{aligned}$$

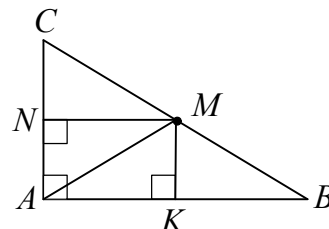
Aišku, kad lygybė $MN = 12\sqrt{10}$ galioja tik kai $\sqrt{10}t - \frac{36}{\sqrt{10}} = 0$; taigi tik kai $t = 3,6$ (h).

Vadinasi, $\min MN = 12\sqrt{10}$ km po 3 h 36 min nuo kelionės pradžios.

Ats.: 3 h 36 min.

5. Taškas M yra stačiojo trikampio ABC ($\angle A = 90^\circ$) įžambinėje BC . Atkarpa AM yra įbrėžto į šį trikampį stačiakampio įstrižainė. Nustatykite, kokių santykiu didžiausio ploto stačiakampio viršūnė M dalija trikampio įstrižainę BC , jei $AB = 50$ cm, $AC = 30$ cm.

Sprendimas. Tegu $AKMN$ yra įbrėžtas į statųjį trikampį ABC stačiakampis (žr. pav.), $AK = a$, $AN = b$. Iš trikampių KBM ir NMC panašumo gauname:



$$\begin{aligned} \frac{KB}{KM} &= \frac{NM}{NC} \Rightarrow \frac{50-a}{b} = \frac{a}{30-b} \Rightarrow 1500 - 30a - 50b + ab = ab \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1500 - 30a - 50b = 0 \Rightarrow b = 30 - 0,6a. \end{aligned}$$

Skaičiuodami stačiakampio plotą (pažym. S), gauname:

$$\begin{aligned} S &= a \cdot b = a(30 - 0,6a) = 30a - 0,6a^2 = -0,6(a^2 - 50a) = -0,6((a - 25)^2 - 625) = \\ &= 0,6 \cdot 625 - 0,6(a - 25)^2 \leq 375. \end{aligned}$$

Lygybė $S = 375$ gaunama tik kai $a = 25$ (tada $b = 15$). Taigi $\max S = 375$, kai $a = 25$, $b = 15$.

Iš trikampių KBM ir NMC panašumo gauname;

$$\frac{BM}{MC} = \frac{KM}{NC} \Rightarrow \frac{BM}{MC} = \frac{15}{15} = 1.$$

Ats.: $BM : MC = 1 : 1$.

6. Raskite funkcijos $f(x) = x^3 + 3x^2 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}$, $x > 0$, mažiausią reikšmę.

Sprendimas. Taikykime nelygybę $A_9 \geq S_9$:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} = 9 \cdot \frac{1}{9} \left(x^3 + x^2 + x^2 + x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right) \geq 9 \cdot \sqrt[9]{x^9 \cdot \frac{1}{x^9}} = 9.$$

Lygybė $f(x) = 9$ galioja tik kai $x^3 = x^2 = \frac{1}{x} = \frac{1}{x^3}$. Iš pastarosios lygybių sistemos gauname vienintelę x reikšmę: $x = 1$. Vadinasi,

$$\min f(x) = 9 = f(1), \text{ kai } x > 0.$$

Ats.: $\min f(x) = 9$, jei $x > 0$.

7. Raskite funkcijos $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 42}{x - 2}$, $x > 2$, mažiausią reikšmę.

Sprendimas. Funkcijos išraišką pertvarkykime taip:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 5x + 42}{x - 2} = \frac{(x^2 - 4x + 4) - (x - 2) + 36}{x - 2} = \frac{(x - 2)^2 + 36 - (x - 2)}{x - 2} = \\ &= \frac{(x - 2)^2}{x - 2} + \frac{36}{x - 2} - \frac{x - 2}{x - 2} = \left((x - 2) + \frac{36}{x - 2} \right) - 1. \end{aligned}$$

Kadangi $x > 2$, tai $x - 2 > 0$ ir $\frac{36}{x - 2} > 0$. Taikydami nelygybę $A_2 \geq G_2$ gauname:

$$(x - 2) + \frac{36}{x - 2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \left((x - 2) + \frac{36}{x - 2} \right) \geq 2 \cdot \sqrt{(x - 2) \cdot \frac{36}{x - 2}} = 12.$$

Lygybė čia galioja tik kai $x - 2 = \frac{36}{x - 2}$. Išsprendę šią lygtį, gauname, kad tinka tik $x = 8$. Vadinasi,

$$\min f(x) = \min \left(\left((x - 2) + \frac{36}{x - 2} \right) - 1 \right) = 12 - 1 = 11 = f(8).$$

Ats.: $\min f(x) = f(8) = 11$, jei $x > 2$.

8. Įrodykite, kad mažiausia reiškinio

$$f(x, y, z) = (x + 2y)(y + 2z)(z + 2x)$$

reikšmė lygi 27, jeigu $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ ir $xyz = 1$.

Įrodymas. Kadangi $x > 0$, $y > 0$ ir $z > 0$, tai

$$x + 2y = 3 \cdot \frac{x + y + y}{3} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{xy^2};$$

$$y + 2z = 3 \cdot \frac{y + z + z}{3} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{yz^2};$$

$$z + 2x = 3 \cdot \frac{z + x + x}{3} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{zx^2}.$$

Lygybės čia galioja tik kai $x = y = z$.

Tada

$$f(x, y, z) = (x + 2y)(y + 2z)(z + 2x) \geq 27 \cdot \sqrt[3]{xy^2} \cdot \sqrt[3]{yz^2} \cdot \sqrt[3]{zx^2} = 27 \cdot \sqrt[3]{x^3 y^3 z^3} = 27xyz.$$

Pagal sąlygą, $xyz = 1$, todėl

$$f(x, y, z) \geq 27xyz = 27,$$

o lygybė $x = y = z$ esant sąlygai $xyz = 1$ galioja tik kai $x = y = z = 1$.

Vadinasi, $\min f(x, y, z) = f(1, 1, 1) = 27$.

9. Raskite didžiausią reiškinio $f(a, b) = 1 - a^2 - 4b^2$ reikšmę, jeigu $a + 4b = 1$.

Sprendimas. Iš lygybės $a + 4b = 1$ gauname, kad $a = 1 - 4b$. Todėl

$$\begin{aligned} f(a, b) &= 1 - a^2 - 4b^2 = 1 - (1 - 4b)^2 - 4b^2 = 8b - 20b^2 = -4(5b^2 - 2b) = \\ &= -4 \left(\left((\sqrt{5}b)^2 - 2 \cdot \sqrt{5}b \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 \right) - \frac{1}{5} \right) = -4 \left(\sqrt{5}b - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 + \frac{4}{5} \leq \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Lygybė $f(a, b) = \frac{4}{5}$ galioja tik kai $\sqrt{5}b - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$; taigi tik kai $b = \frac{1}{5}$ (tada $a = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$).

Vadinasi, $\max f(a, b) = f\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

Ats.: $\max f(a, b) = f\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

10. Raskite mažiausią reiškinio

$$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) \left(\frac{1}{y} - 1\right) \left(\frac{1}{z} - 1\right)$$

reikšmę, jeigu $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ ir $x + y + z = 1$.

Sprendimas. Kadangi $x + y + z = 1$, tai

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - 1 &= \frac{x + y + z}{x} - 1 = 1 + \frac{y + z}{x} - 1 = \frac{y + z}{x}, \\ \frac{1}{y} - 1 &= \frac{x + y + z}{y} - 1 = \frac{x + z}{y} + 1 - 1 = \frac{x + z}{y}, \\ \frac{1}{z} - 1 &= \frac{x + y + z}{z} - 1 = \frac{x + y}{z}. \end{aligned}$$

Be to, esant sąlygai $x > 0$, $y > 0$ ir $z > 0$ galioja šios nelygybės:

$$y + z = 2 \cdot \frac{y + z}{2} \geq 2\sqrt{yz};$$

$$x + z = 2 \cdot \frac{x + z}{2} \geq 2\sqrt{xz};$$

$$x + y = 2 \cdot \frac{x + y}{2} \geq 2\sqrt{xy}.$$

Todėl

$$f(x, y, z) = \frac{y + z}{x} \cdot \frac{x + z}{y} \cdot \frac{x + y}{z} \geq 8 \cdot \frac{\sqrt{yz}}{x} \cdot \frac{\sqrt{xz}}{y} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{z} = 8,$$

o lygybė $f(x, y, z) = 8$ galioja tik kai $x = y = z$ ir $x + y + z = 1$; taigi tik kai $x = y = z = \frac{1}{3}$.

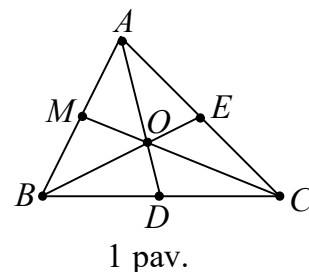
Vadinasi, $\min f(x, y, z) = f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 8$, jeigu $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ ir $x + y + z = 1$.

Ats.: 8.

TREČIOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Taškas M yra trikampio ABC kraštinės AB vidurio taškas, O – trikampio pusiaukraštinių sankirtos taškas. Vektorius $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{MO}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$.

Sprendimas. Kadangi taškas M yra trikampio kraštinės AB vidurio taškas (1 pav.), tai $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Atkarpos AD ir BE yra trikampio pusiaukraštinės, tai pagal trikampio pusiaukraštinių savybę $AO : OD = 2 : 1$, todėl $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Analogiškai $\overrightarrow{MO} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{3}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{2} - \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.



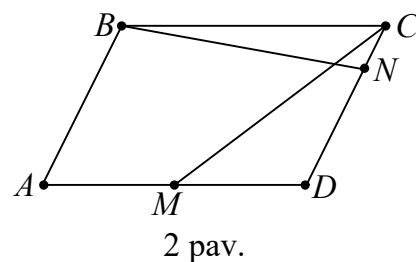
$$\text{Ats.: } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{MO} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

2. Taškas M yra lygiagretainio $ABCD$ kraštinės AD vidurys, o taškas N yra kraštinėje CD ir $CN : ND = 1 : 3$. Vektorius $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{CM}$ ir $\overrightarrow{BN}$.

Sprendimas. Akivaizdu, kad (2 pav.) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$, taigi $\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (*).

Analogiškai $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$, taigi $\overrightarrow{BN} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (**).

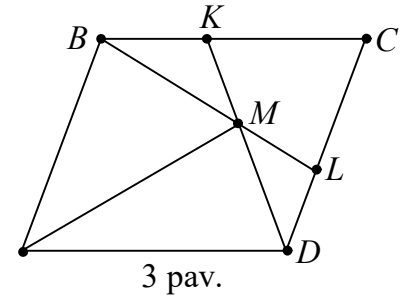
Lygybę (*) dauginame iš 2 ir sudedame su (**) lygybe: $2\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BN} = -\frac{9}{4}\overrightarrow{AB}$, taigi $\overrightarrow{AB} = -\frac{8}{9}\overrightarrow{CM} - \frac{4}{9}\overrightarrow{BN}$. Įrašę šią reikšmę į (**) lygybę randame, kad $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BN} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN} - \frac{2}{9}\overrightarrow{CM} - \frac{1}{9}\overrightarrow{BN} = -\frac{2}{9}\overrightarrow{CM} + \frac{8}{9}\overrightarrow{BN}$.



$$\text{Ats.: } \overrightarrow{AB} = -\frac{8}{9}\overrightarrow{CM} - \frac{4}{9}\overrightarrow{BN}, \quad \overrightarrow{AD} = -\frac{2}{9}\overrightarrow{CM} + \frac{8}{9}\overrightarrow{BN}.$$

3. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse BC ir CD yra taškai K ir L , be to, $BK : KC = 2 : 3$, $CL : LD = 5 : 3$. Tiesės DK ir BL kertasi taške M . Raskite kokių santykiu taškas M dalija atkarpas DK ir BL .

Sprendimas. Iš uždavinio sąlygos gauname, kad $\overrightarrow{BL} = \frac{3\overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{BD}}{8}$, $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ (3 pav.). Kadangi vektoriai $\overrightarrow{BM}$ ir $\overrightarrow{BL}$ yra kolinearieji, tai egzistuoja toks skaičius x , kad $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BL} = x \cdot \frac{3\overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{BD}}{8} = x \cdot \frac{3\overrightarrow{AD} + 5(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})}{8} = -\frac{5}{8}x\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$ (*).

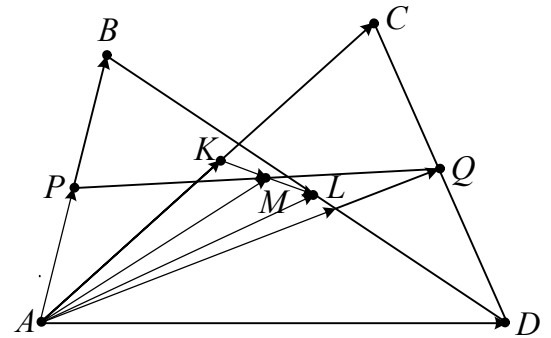


Analogiškai vektoriai $\overrightarrow{KM}$ ir $\overrightarrow{KD}$ irgi yra kolinearieji, todėl yra toks y , kad $\overrightarrow{KM} = y\overrightarrow{KD} = y(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BK}) = y((\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) - \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}) = -y\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}y\overrightarrow{AD}$, o iš lygybės $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KM}$ gauname, kad $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD} + (-y\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}y\overrightarrow{AD}) = -y\overrightarrow{AB} + \frac{2+3y}{5}\overrightarrow{AD}$ (**). Kadangi $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$ – nekolinearieji vektoriai, tai vektorius $\overrightarrow{BM}$ jais išreiškiamas vienareikšmiškai. Todėl teisingos lygybės $-\frac{5}{8}x = -y$, $x = \frac{2+3y}{5}$. Sprendžiam šią lygčių sistemą turime $\frac{8}{5}y = \frac{2+3y}{5}$, taigi $y = \frac{2}{5}$, $x = \frac{16}{25}$, todėl $BM : ML = 16 : 9$, $KM : MD = 2 : 3$.

Ats.: $BM : ML = 16 : 9$, $KM : MD = 2 : 3$.

4. Taškai P ir Q yra atitinkamai atkarpų AB ir CD vidurio taškai. Įrodykite, kad atkarpų AC , BD ir PQ vidurio taškai yra vienoje tiesėje.

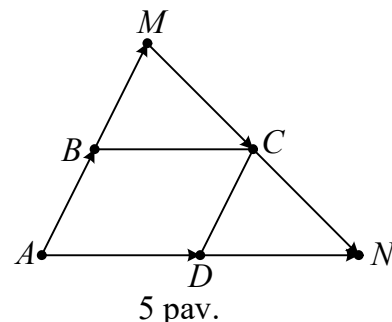
Įrodymas. Sakykime, kad taškai K, L, M yra atitinkamai atkarpų AC, BD, PQ vidurio taškai (4 pav.). Tuomet $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$. Iš čia gauname, kad $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$. Iš čia seka, kad $\overrightarrow{KL} = 2\overrightarrow{KM}$, taigi vektoriai $\overrightarrow{KL}$ ir $\overrightarrow{KM}$ yra kolinearieji, o tai reiškia, kad taškai K, L, M yra vienoje tiesėje.



5. Per lygiagretainio $ABCD$ viršūnę C nubrėžta tiesė d , kertanti tieses AB ir AD atitinkamai taškuose M ir N taip, kad $\overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC} = l\overrightarrow{AN}$. Raskite sumą $k + l$.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesė d nubrėžta taip, kad taškai M ir N yra lygiagrečio kraštinių tęsinuose, o taškas C yra tarp taškų M ir N (5 pav.), kitais atvejais sprendimas nesikeičia. Kadangi $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, o $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, tai iš uždavinio sąlygos turime, kad $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{l}\overrightarrow{AD}$. Todėl $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{k}\overrightarrow{AB} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{l}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{k}\overrightarrow{AB}$. Kadangi taškai M, C, N yra vienoje tiesėje, tai vektoriai $\overrightarrow{MC}$ ir $\overrightarrow{MN}$ yra kolinearieji. Taigi egzistuoja toks skaičius x , kad $\overrightarrow{MC} = x\overrightarrow{MN}$, t. y. $\left(1 - \frac{1}{k}\right)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = x\left(\frac{1}{l}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{k}\overrightarrow{AB}\right)$. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$ yra nekolinearieji, tai $1 - \frac{1}{k} = -\frac{x}{k}$, $1 = \frac{x}{l}$. Iš čia $x = l$, $1 - \frac{1}{k} = -\frac{l}{k}$, $k - 1 = -l$, todėl $k + l = 1$.

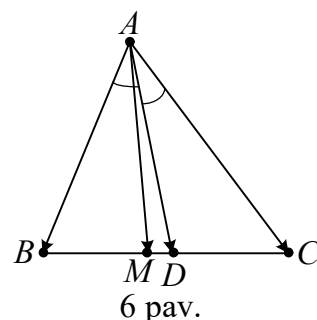
Ats.: 1.



6. Trikampio ABC kraštinių ilgių $AB = 4$, $AC = 5$, kampas A lygus 45° . Raskite trikampio pusiaukraštinės AM ir pusiaukampinės AD ilgius.

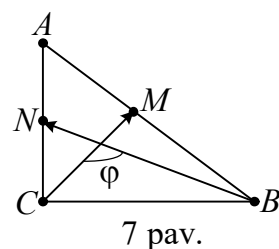
Sprendimas. Iš uždavinio sąlygos turime, kad $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = 16$, $\overrightarrow{AC}^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 = 25$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 45^\circ = 4 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$. Kadangi taškas M yra atkarpos BC vidurio taškas (6 pav.), tai $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, todėl trikampio pusiaukraštinės ilgis $AM = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\overrightarrow{AM}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 2 \cdot 10\sqrt{2} + 25} = \frac{\sqrt{41+20\sqrt{2}}}{2}$. Kadangi $BD : DC = AB : AC = 4 : 5$, tai $\overrightarrow{AD} = \frac{5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{4+5}$. Iš čia gauname, kad $AD = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{\overrightarrow{AD}^2} = \frac{1}{9}\sqrt{25\overrightarrow{AB}^2 + 40\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 16\overrightarrow{AC}^2} = \frac{1}{9}\sqrt{25 \cdot 16 + 40 \cdot 10\sqrt{2} + 16 \cdot 25} = \frac{1}{9}\sqrt{800 + 400\sqrt{2}} = \frac{20}{9}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Ats.: $AM = \frac{\sqrt{41+20\sqrt{2}}}{2}$, $AD = \frac{20}{9}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.



7. Stačiojo trikampio ABC statinių ilgių $CA = 6$, $CB = 8$. Raskite kampo tarp jo pusiaukampinių CM ir BN kosinusą.

Sprendimas. Iš trikampio pusiaukampinės savybių gauname, kad $AM : MB = CA : CB = 6 : 8 = 3 : 4$, todėl $\overrightarrow{CM} = \frac{4\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB}}{3+4}$ (7 pav.). Kadangi trikampio įžambinė $AB = \sqrt{CA^2 + CB^2} = 10$, tai $CN : NA = BC : BA = 8 : 10 = 4 : 5$, taigi $\overrightarrow{CN} = \frac{4}{9}\overrightarrow{CA}$. Iš čia $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{CB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{CA}$. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{CA}$ ir $\overrightarrow{CB}$ yra statmeni, tai $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$, todėl $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BN} = \frac{1}{7}(4\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB}) \cdot \left(-\overrightarrow{CB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{63}(16\overrightarrow{CA}^2 - 27\overrightarrow{CB}^2) =$



$$\frac{1}{63}(16 \cdot 36 - 27 \cdot 64) = -\frac{128}{7}, \quad |\overrightarrow{CM}| = \sqrt{\overrightarrow{CM}^2} = \frac{1}{7}\sqrt{16\overrightarrow{CA}^2 + 9\overrightarrow{CB}^2} = \frac{1}{7}\sqrt{16 \cdot 36 + 9 \cdot 64} = \frac{24}{7}\sqrt{2}, \quad |\overrightarrow{BN}| = \sqrt{\overrightarrow{BN}^2} = \frac{1}{9}\sqrt{81\overrightarrow{CB}^2 + 16\overrightarrow{CA}^2} = \frac{1}{9}\sqrt{81 \cdot 64 + 16 \cdot 36} = \frac{8}{3}\sqrt{10}.$$

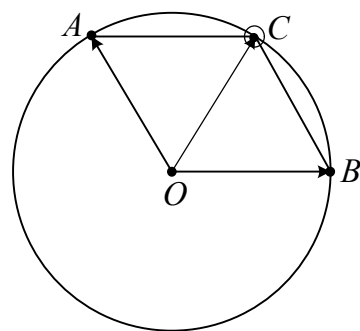
Taigi

ieškomojo kampo φ kosinusas $\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{CM}| \cdot |\overrightarrow{BN}|} = \frac{-\frac{128}{7}}{\frac{24\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{10}}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Kadangi kampo kosinusas yra neigiamas, tai čia mes radome bukojo kampo tarp pusiaukampinių kosinusą. Smailiojo kampo kosinusas pagal redukcijos formules $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

$$\text{Ats.: } -\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ (arba } \frac{1}{\sqrt{5}}).$$

8. Taškas O yra apskritimo centras, taškai A, B ir C yra tokie apskritimo taškai, kad $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Raskite kampo AOB didumą.

Sprendimas. 1 būdas. Lygybės $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ abi puses skalariškai pakeliame kvadratu (8 pav.): $\overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2$. Kadangi $OA = OB = OC = R$ – apskritimo spindulys, kampas AOB yra kampas tarp vektorių $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$, tai gautoji lygybė tampa tokia: $R^2 = R^2 + 2R^2 \cos \angle AOB + R^2$, iš čia $\cos \angle AOB = -\frac{1}{2}$, taigi $\angle AOB = 120^\circ$.



8 pav.

2 būdas. Iš lygybės $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ išplaukia, kad keturkampis $OACB$ yra lygiagretainis, o atkarpa OC yra jo įstrižainė (8 pav.). Kadangi $OA = OB = OC$, tai šis lygiagretainis yra rombas, o trikampiai OAC ir OBC yra lygiakraščiai. Todėl $\angle AOC = \angle BOC = 60^\circ$, taigi $\angle AOB = 120^\circ$.

$$\text{Ats.: } 120^\circ.$$

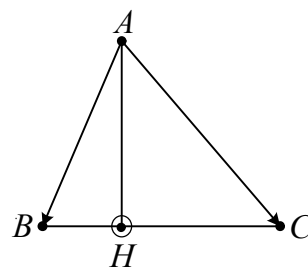
9. Duotos trikampio viršūnių koordinatės $A(3, 0)$, $B(2, 7)$, $C(5, 3)$. Raskite trikampio plotą ir aukštinės AH ilgį.

Sprendimas. Kadangi $\overrightarrow{AB} = (2 - 3)\vec{i} + (7 - 0)\vec{j} = -\vec{i} + 7\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = (5 - 3)\vec{i} + (3 - 0)\vec{j} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, tai $\overrightarrow{AB}^2 = (-1)^2 + 7^2 = 50$, $\overrightarrow{AC}^2 = 2^2 + 3^2 = 13$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 19$, tai trikampio plotas

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{50 \cdot 13 - 19^2} = \frac{1}{2}\sqrt{289} = \frac{17}{2}.$$

Kita vertus, trikampio plotas $S = \frac{1}{2}BC \cdot AH$ (9 pav.), todėl aukštinės ilgis $AH = \frac{2S}{BC}$. Kadangi $BC = |\overrightarrow{BC}|$, o $\overrightarrow{BC} = (5 - 2)\vec{i} + (3 - 7)\vec{j} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, tai $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, todėl $AH = \frac{17}{5}$.

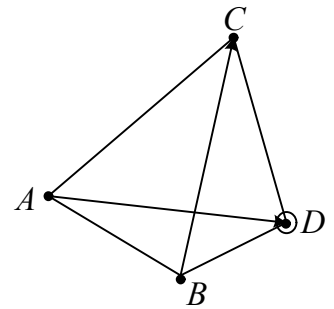
$$\text{Ats.: } S = \frac{17}{2}, \quad AH = \frac{17}{5}.$$



9 pav.

10. Taškai $(-6, -1)$, $(-4, -4)$, $(-1, 4)$, $(-3, -3)$ yra keturkampio viršūnės. Raskite jo plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad $A(-6, -1), B(-4, -4), C(-1, 4), D(-3, -3)$. Nustatysime, kurios atkarpos yra šio keturkampio įstrižainės. Randame $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$, $\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$. Rasime skaičius x ir y , su kuriais $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$, t. y. $5\vec{i} + 5\vec{j} = x(2\vec{i} - 3\vec{j}) + y(3\vec{i} - 2\vec{j})$. Iš čia $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ -3x - 2y = 5. \end{cases}$ Šios sistemos sprendinys $x = -5, y = 5$, taigi $x < 0$. Todėl atkarpa AC nėra keturkampio įstrižainė. Iš lygybės $\overrightarrow{AC} = -5\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AD}$ gauname, kad $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$. Kadangi šioje išraiškoje koeficientai prie vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ yra teigiami, tai atkarpos AD ir BC yra keturkampio įstrižainės (10 pav.). Kadangi $\overrightarrow{BC} = 3\vec{i} + 8\vec{j}$, tai $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 8 = -7$, todėl keturkampio plotas



10 pav.

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AD}|^2 \cdot |\overrightarrow{BC}|^2 - (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{13 \cdot 73 - (-7)^2} = 15.$$

Ats.: 15.

KETVIRTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + (\sqrt{5} - \sqrt{3})y = 1, \\ (\sqrt{6} + 2)x + (\sqrt{10} - \sqrt{6})y = 2. \end{cases} \quad (1)$$

Sprendimas. Kadangi

$$\begin{aligned} d &= \begin{vmatrix} \sqrt{2} + \sqrt{3} & \sqrt{5} - \sqrt{3} \\ \sqrt{6} + 2 & \sqrt{10} - \sqrt{6} \end{vmatrix} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{10} - \sqrt{6}) - (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{6} + 2) = \\ &= (\sqrt{20} - \sqrt{12} + \sqrt{30} - \sqrt{18}) - (\sqrt{30} - \sqrt{18} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{3}) = 0, \end{aligned}$$

belieka išaiškinti, ar (1) sistema turi be galo daug sprendinių (ir užrašyti jų aibę), ar neturi nė vieno sprendinio.

Antrą lygtį pakeiskime tiesiniu dariniu $L_2 + (-\sqrt{2})L_1$, gausime ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + (\sqrt{5} - \sqrt{3})y = 1, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 2 - \sqrt{2}, \end{cases}$$

kuri neturi nė vieno sprendinio.

Vadinasi, (1) sistema neturi nė vieno sprendinio.

Ats.: $\emptyset$.

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \sqrt{5} \cdot x + \sqrt{2} \cdot y = 6, \\ 5\sqrt{2} \cdot x + 2\sqrt{5} \cdot y = 6\sqrt{10}. \end{cases} \quad (2)$$

Sprendimas. Kadangi

$$d = \begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} & 2\sqrt{5} \end{vmatrix} = \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} - \sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 0,$$

$$d_x = \begin{vmatrix} 6 & \sqrt{2} \\ 6\sqrt{10} & 2\sqrt{5} \end{vmatrix} = 6 \cdot 2\sqrt{5} - \sqrt{2} \cdot 6\sqrt{10} = 0,$$

$$d_y = \begin{vmatrix} \sqrt{5} & 6 \\ 5\sqrt{2} & 6\sqrt{10} \end{vmatrix} = \sqrt{5} \cdot 6\sqrt{10} - 6 \cdot 5\sqrt{2} = 0,$$

tai (2) sistemą sudarančių lygčių

$$L_1: \sqrt{x} \cdot x + \sqrt{2} \cdot y = 6 \quad \text{ir} \quad L_2: 5\sqrt{2} \cdot x + 2\sqrt{5} \cdot y = 6\sqrt{10}$$

sprendinių aibės sutampa. Vadinasi, (2) sistema turi be galo daug sprendinių, kurie užrašomi formule

$$\left(r; \frac{6 - \sqrt{5} \cdot r}{\sqrt{2}} \right), \quad r \in \mathbb{R},$$

arba formule

$$\left(\frac{6 - \sqrt{2} \cdot r}{\sqrt{5}}; r \right), \quad r \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ats.: } \left(r; \frac{6 - \sqrt{5} \cdot r}{\sqrt{2}} \right), \quad r \in \mathbb{R}, \quad \text{arba} \quad \left(\frac{6 - \sqrt{2} \cdot r}{\sqrt{5}}; r \right), \quad r \in \mathbb{R}.$$

3. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} (\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)x + (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)y = 2\sqrt{2}, \\ (2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)x + (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)y = \sqrt{3}. \end{cases} \quad (3)$$

Sprendimas. Kadangi

$$d = \begin{vmatrix} \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1 & \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 \\ \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1 & 2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1 \end{vmatrix} = (\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1) - (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1) =$$

$$= 3\sqrt{6} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1,$$

$$d_x = \begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1 \end{vmatrix} = 2\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1) - (\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)\sqrt{3} = 3\sqrt{6} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1 = d,$$

$$d_y = \begin{vmatrix} \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = (\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)\sqrt{3} - 2\sqrt{2}(2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1) = -3\sqrt{6} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 1 = -d,$$

tai skaičių $x = \frac{d_x}{d} = 1$ ir $y = \frac{d_y}{d} = -1$ pora $(1; -1)$ yra vienintelis (3) sistemos sprendinys.

Ats.: $(1; -1)$.

4. Apskaičiuokite kvadratinės matricos

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 1 + \sqrt{2} & 1 + \sqrt{3} & 1 + \sqrt{5} \\ 2 + \sqrt{2} & 2 + \sqrt{3} & 2 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ determinantą.}$$

Sprendimas.

$$d = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ 1 + \sqrt{2} & 1 + \sqrt{3} & 1 + \sqrt{5} \\ 2 + \sqrt{2} & 2 + \sqrt{3} & 2 + \sqrt{5} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 + \sqrt{5} \\ 2 + \sqrt{3} & 2 + \sqrt{5} \end{vmatrix} - \sqrt{3} \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 + \sqrt{5} \\ 2 + \sqrt{2} & 2 + \sqrt{5} \end{vmatrix} + \sqrt{5} \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 + \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{2} & 2 + \sqrt{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{2}((1 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{5}) - (1 + \sqrt{5})(2 + \sqrt{3})) - \sqrt{3}((1 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{5}) - (1 + \sqrt{5})(2 + \sqrt{2})) +$$

$$+ \sqrt{5}((1 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{3}) - (1 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2})) =$$

$$= \sqrt{2}(-\sqrt{5} + \sqrt{3}) - \sqrt{3}(-\sqrt{5} + \sqrt{2}) + \sqrt{5}(-\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 0.$$

Ats.: 0.

5. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 8, \\ 3x - 2y - 3z = -3, \\ 2x + 5y + 8z = 27. \end{cases} \quad (4)$$

Sprendimas. Iš pradžių apskaičiuokime koeficientų matricos $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

determinantą d :

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 30 - 5 \cdot 19 = -2 - 90 - 95 = -187.$$

Kadangi $d \neq 0$, tai (4) sistema turi vienintelį sprendinį $\left(\frac{d_x}{d}; \frac{d_y}{d}; \frac{d_z}{d}\right)$; čia

$$d_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 & -5 \\ -3 & -2 & -3 \\ 27 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 27 & 8 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 27 & 5 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-1) - 3 \cdot 57 - 5 \cdot 39 = -8 - 171 - 195 = -374,$$

$$d_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 \\ 3 & -3 & -3 \\ 2 & 27 & 8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 27 & 8 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 27 \end{vmatrix} = 2 \cdot 57 - 8 \cdot 30 - 5 \cdot 87 = 114 - 240 - 435 = -561,$$

$$d_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 3 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & 27 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 27 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 27 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-39) - 3 \cdot 87 + 8 \cdot 19 = -78 - 261 + 152 = -187.$$

$$\text{Taigi, } x = \frac{-374}{-187} = 2, \quad y = \frac{-561}{-187} = 3, \quad z = \frac{-187}{-187} = 1.$$

Ats.: (2; 3; 1).

6. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x - 2y + 9z = -7, \\ -2x + y - 4z = 5, \\ 3x - 6y - 8z = 12. \end{cases} \quad (5)$$

Sprendimas. Sistemos lygčių koeficientų matrica yra

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 9 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -6 & -8 \end{pmatrix},$$

o jos determinantas

$$d = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 9 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -6 & -8 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-32) + 2 \cdot 28 + 9 \cdot 9 = -160 + 56 + 81 = -23$$

nelygus nuliui. Todėl tikslinga apskaičiuoti ir matricų

$$A_x = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 9 \\ 5 & 1 & -4 \\ 12 & -6 & -8 \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 9 \\ -2 & 5 & -4 \\ 3 & 12 & -8 \end{pmatrix}, \quad A_z = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -7 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 12 \end{pmatrix}$$

determinantus (atitinkamai d_x , d_y , d_z). Gausime

$$d_x = \begin{vmatrix} -7 & -2 & 9 \\ 5 & 1 & -4 \\ 12 & -6 & -8 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 12 & -8 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 12 & -6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-32) + 2 \cdot 8 + 9 \cdot (-42) = 224 + 16 - 378 = -138,$$

$$d_y = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 9 \\ -2 & 5 & -4 \\ 3 & 12 & -8 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 12 & -8 \end{vmatrix} - (-7) \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 + 7 \cdot 28 + 9 \cdot (-39) = 40 + 196 - 351 = -115,$$

$$d_z = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -7 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 12 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} + (-7) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 42 + 2 \cdot (-39) - 7 \cdot 9 = 210 - 78 - 63 = 69.$$

Skaičių

$$x = \frac{d_x}{d} = \frac{-138}{-23} = 6, \quad y = \frac{d_y}{d} = \frac{-115}{-23} = 5, \quad z = \frac{d_z}{d} = \frac{63}{-23} = -3$$

trejetas (6; 5; -3) yra vienintelis (5) sistemos sprendinys.

Ats.: (6; 5; -3).

7. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - 3y + z = 1, \\ 2x + y + 2z = 7. \end{cases} \quad (6)$$

Sprendimas. Skaičiuodami sistemos lygčių koeficientų matricos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

determinantą d , gauname:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 - 2 - 8 = -17.$$

Kadangi $d \neq 0$, apskaičiuokime kitus tris determinantus:

$$d_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -(-5) - 22 = -17,$$

$$d_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -5 - 12 = -17,$$

$$d_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -22 - 12 = -34.$$

Trejetas $(x; y; z)$,

$$x = \frac{d_x}{d} = \frac{-17}{-17} = 1, \quad y = \frac{d_y}{d} = \frac{-17}{-17} = 1, \quad z = \frac{d_z}{d} = \frac{-34}{-17} = 2$$

yra vienintelis (6) sistemos sprendinys.

Ats.: (1; 1; 2).

8. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2, \\ 3x - y + 2z = 10, \\ 2x - 3y + z = 9. \end{cases} \quad (7)$$

Sprendimas. Sistemos koeficientų matricos determinantas

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 - 2 \cdot (-1) - 7 = 0,$$

todėl (7) sistemos sprendimą tęskime eliminuodami nežinomuosius, nes rezultatas $d = 0$ reiškia, kad yra dvi galimybės – arba sistema turi be galo daug sprendinių, arba nė vieno.

Iš pradžių eliminuokime x iš antros lygties ir iš trečios lygties, antrą lygtį pakeisdami tiesiniu dariniu $L_2 + (-3)L_1$, o trečią lygtį – tiesiniu dariniu $L_3 + (-2)L_1$. Gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2, \\ 0 \cdot x - 7y - z = 4, \\ 0 \cdot x - 7y - z = 5, \end{cases}$$

kuri tikrai neturi sprendinių.

Vadinasi, (7) sistema sprendinių neturi.

Ats.: $\emptyset$.

9. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + y + z = 5, \\ 2x + 3y + 4z = 14, \\ x - y + 3z = 3, \\ x + 4y + z = 11. \end{cases} \quad (8)$$

Sprendimas. Lygčių sistema nėra kvadratinė, todėl taikykime nežinomųjų eliminavimo metodą.

Eliminuodami x iš antros, trečios ir ketvirtos lygties, antrą lygtį pakeiskime tiesiniu dariniu $L_2 + (-2)L_1$, trečią – tiesiniu dariniu $L_3 + (-1)L_1$, o ketvirtą lygtį – tiesiniu dariniu $L_4 + (-1)L_1$. Gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} x + y + z = 5, \\ y + 2z = 4, \\ -2y + 2z = -2, \\ 3y = 6. \end{cases} \quad (9)$$

Iš ketvirtos lygties gauname, kad $y = 2$. Tada iš trečios lygties išplaukia, jog $z = 1$, o iš pirmos lygties – $x = 5 - 2 - 1 = 2$. Gauname skaičių trejetą $(2; 2; 1)$, kuris tenkina ne tik pirmą, trečią ir ketvirtą lygtį, bet ir antrą lygtį $L_2 : 0 \cdot x + y + 2z = 4$.

Vadinasi, trejetas $(2; 2; 1)$ yra vienintelis (8) sistemos sprendinys.

Ats.: $(2; 2; 1)$.

10. Eliminudami nežinomuosius išspręskite lygčių sistemą su keturiais nežinomaisiais

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = -4. \end{cases} \quad (10)$$

Sprendimas. Iš pradžių trečią lygtį pakeiskime tiesiniu dariniu $L_3 + (-2)L_1$, o ketvirtą lygtį – tiesiniu dariniu $L_4 + (-1)L_1$. Gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 4, \\ x_2 + x_3 & = 5, \\ -2x_2 + x_3 + x_4 & = -5, \\ -2x_2 & + 2x_4 = -8. \end{cases}$$

Nežinomajam x_3 eliminuoti iš trečios lygties pakanka L_3 pakeisti tiesiniu dariniu $(-1)L_3 + L_2$. Gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 4, \\ x_2 + x_3 & = 5, \\ 3x_2 & - x_4 = 10, \\ -2x_2 & + 2x_4 = -8. \end{cases}$$

Siekdami eliminuoti x_4 iš ketvirtos lygties, pakeiskime L_4 tiesiniu dariniu $L_4 + 2L_3$. Gausime lengvai išsprendžiamą lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 4, \\ x_2 + x_3 & = 5, \\ 3x_2 & - x_4 = 10, \\ 4x_2 & = 12. \end{cases}$$

Iš L_4 išplaukia, kad $x_2 = 3$. Tada:

$$L_1 \Rightarrow x_1 = 4 - 3 = 1;$$

$$L_2 \Rightarrow x_3 = 5 - 3 = 2;$$

$$L_3 \Rightarrow x_4 = 3 \cdot 3 - 10 = -1.$$

Vadinasi, (10) sistema turi vienintelį sprendinį $(1; 3; 2; -1)$.

Ats.: $(1; 3; 2; -1)$.

PENKTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Išspręskite:

a) rodiklinę lygtį

$$4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x - 7 \cdot 3^{x+1} = 40;$$

b) rodiklinę nelygybę

$$0 < 4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x - 7 \cdot 3^{x+1} < 40.$$

Sprendimas. Iš pradžių pertvarkykime kairėje lygties pusėje esantį reiškinių:

$$4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x - 7 \cdot 3^{x+1} = 4 \cdot 3^x \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^x - 7 \cdot 3^x \cdot 3 = 36 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^x - 21 \cdot 3^x = 20 \cdot 3^x.$$

Tada lygtis įgis pavidalą

$$20 \cdot 3^x = 40, \quad (1)$$

o nelygybė – pavidalą

$$0 < 20 \cdot 3^x < 40. \quad (2)$$

Spręsdami (1) lygtį gausime:

$$20 \cdot 3^x = 40 \Rightarrow 3^x = 2 \Rightarrow x = \log_3 2.$$

Aišku, kad (2) nelygybę galima suvokti kaip nelygybių $20 \cdot 3^x < 40$ ir $20 \cdot 3^x > 0$ sistemą. Spręsdami ją gausime:

$$\begin{cases} 20 \cdot 3^x < 40, \\ 20 \cdot 3^x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x < 2, \\ 3^x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \log_3 2, \\ x \in (-\infty; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; \log_3 2).$$

Ats.: a) $\log_3 2$; b) $(-\infty; \log_3 2)$.

2. Išspręskite:

a) rodiklinę lygtį

$$(0,5)^x + (0,25)^x = (0,125)^x;$$

b) rodiklinę nelygybę

$$(0,5)^x + (0,25)^x > (0,125)^x.$$

Sprendimas. Pažymėkime $t = 0,5^x$. Tada:

$$\begin{aligned} \text{a) } 0,5^x + 0,25^x &= 0,125^x \Rightarrow \begin{cases} t + t^2 = t^3, \\ t = 0,5^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t(t^2 - t - 1) = 0, \\ t = 0,5^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - t - 1 = 0, \\ t = 0,5^x \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ t = 0,5^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \\ t = 0,5^x \end{cases} \Rightarrow 0,5^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \log_{0,5} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Taigi lygtis turi vienintelį sprendinį – realųjį skaičių $\log_{0,5} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } 0,5^x + 0,25^x &> 0,125^x \Rightarrow \begin{cases} t + t^2 > t^3, \\ t = 0,5^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t(t^2 - t - 1) < 0, \\ t = 0,5^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - t - 1 < 0, \\ t = 0,5^x \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < t < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \\ t = 0,5^x \end{cases} \Rightarrow 0 < 0,5^x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,5^x > 0, \\ 0,5^x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; +\infty), \\ x > \log_{0,5} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\log_{0,5} \frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right).$$

$$\text{Ats.: a) } \log_{0,5} \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \text{ b) } \left(\log_{0,5} \frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right).$$

3. Išspręskite rodiklinę nelybę

$$3^{x+1} < \frac{9^{4x^2}}{\sqrt{27}}.$$

Sprendimas.

$$3^{x+1} < \frac{9^{4x^2}}{\sqrt{27}} \Rightarrow 3^{x+1} < \frac{3^{8x^2}}{3^{1,5}} \Rightarrow 3^{x+1} < 3^{8x^2-1,5} \Rightarrow x+1 < 8x^2-1,5 \Rightarrow 8x^2-x-2,5 > 0.$$

Kvadratinės lygties $8x^2 - x - 2,5 = 0$ sprendiniai yra $-\frac{1}{2}$ ir $\frac{5}{8}$, todėl kvadratinės nelygės

$$8x^2 - x - 2,5 > 0 \text{ sprendinių aibė yra intervalų } \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \text{ ir } \left(\frac{5}{8}; +\infty\right) \text{ sąjunga } \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{8}; +\infty\right).$$

$$\text{Ats.: } \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{8}; +\infty\right).$$

4. Raskite natūraliųjų skaičių trejetą $(x; y; z)$, $x < y < z$, kuriam esant galioja lygybė:

a) $2^x + 2^y + 2^z = 328;$

b) $2^x + 2^y + 2^z = 172.$

Sprendimas.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2^x + 2^y + 2^z = 328 &\Rightarrow 2^x(1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}) = 2^3 \cdot 41 \Rightarrow 2^x = 2^3 \text{ ir } 1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 41 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = 3 \text{ ir } 2^{y-3} + 2^{z-3} = 40 \Rightarrow x = 3 \text{ ir } 2^y + 2^z = 320 \Rightarrow x = 3 \text{ ir } 2^y(1 + 2^{z-y}) = 2^6 \cdot 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = 3, 2^y = 2^6 \text{ ir } 1 + 2^{z-y} = 5 \Rightarrow x = 3, y = 6 \text{ ir } 2^{z-6} = 4 \Rightarrow x = 3, y = 6 \text{ ir } z = 8. \end{aligned}$$

Ieškomas natūraliųjų skaičių trejetas yra $(3; 6; 8)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } 2^x + 2^y + 2^z = 172 &\Rightarrow 2^x(1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}) = 2^2 \cdot 43 \Rightarrow x = 2 \text{ ir } 2^{y-2} + 2^{z-2} = 42 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = 2 \text{ ir } 2^y + 2^z = 168 \Rightarrow x = 2 \text{ ir } 2^y(1 + 2^{z-y}) = 2^3 \cdot 21 \Rightarrow x = 2, y = 3 \text{ ir } 2^{z-3} = 20 \Rightarrow \emptyset. \end{aligned}$$

Ats.: a) $(3; 6; 8)$; b) $\emptyset$.

5. Išspręskite rodiklinę lygtį

$$9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}.$$

Sprendimas.

$$9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1} \Rightarrow 9^x + \frac{1}{3} \cdot 9^x = 8\sqrt{2} \cdot 2^x + \sqrt{2} \cdot 2^x \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot 9^x = 9\sqrt{2} \cdot 2^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{27\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{27}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Ats.: 1,5.

6. Išspręskite rodiklinę lygtį

$$7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0.$$

Sprendimas. Padalykime lygtį iš 14^{x^2} ir taikykime keitinį $t = \left(\frac{2}{7}\right)^{x^2}$. Gausime:

$$7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0 \Rightarrow 7 \cdot \frac{4^{x^2}}{14^{x^2}} - 9 + 2 \cdot \frac{49^{x^2}}{14^{x^2}} = 0 \Rightarrow 7 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{x^2} - 9 + 2 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{2}{7}\right)^{x^2}, \\ 7t - 9 + \frac{2}{t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{2}{7}\right)^{x^2}, \\ 7t^2 - 9t + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{2}{7}\right)^{x^2}, \\ t = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{2}{7}\right)^{x^2}, \\ t = \frac{9 \pm 5}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{2}{7}\right)^{x^2}, \\ t = \frac{2}{7} \text{ arba } t = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^{x^2} = \frac{2}{7} \text{ arba } \left(\frac{2}{7}\right)^{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \text{ arba } x^2 = 0 \Rightarrow x \in \{-1; 1; 0\}.$$

Ats.: $\{-1; 1; 0\}$.

7. Išspręskite rodiklinę nelygybę

$$5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x \geq 7 \cdot 10^x.$$

Sprendimas.

$$5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x \geq 7 \cdot 10^x \Rightarrow 5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x \geq 0 \Rightarrow 4^x \left(5 + 2 \cdot \frac{25^x}{4^x} - 7 \cdot \frac{10^x}{4^x} \right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 + 2 \cdot (2,5)^{2x} - 7 \cdot (2,5)^x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} t = (2,5)^x, \\ 2t^2 - 7t + 5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = (2,5)^x, \\ 2t^2 - 7t + 5 = 0 \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} t = (2,5)^x, \\ 2t^2 - 7t + 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = (2,5)^x, \\ t = 1 \text{ arba } t = 2,5 \end{cases} \text{ arba } \begin{cases} t = (2,5)^x, \\ t < 1 \text{ arba } t > 2,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = (2,5)^x, \\ t \leq 1 \text{ arba } t \geq 2,5 \end{cases} \Rightarrow (2,5)^x \leq 1 \text{ arba } (2,5)^x \geq 2,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \leq 0 \text{ arba } x \geq 1 \Rightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty).$$

Ats.: $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

8. Išspręskite rodiklinę nelygybę

$$98 - 7^{x^2+5x-48} \geq 49^{x^2+5x-49}.$$

Sprendimas. Pažymėkime $t = 7^{x^2+5x-48}$. Tada $49^{x^2+5x-49} = 49^{x^2+5x-48} \cdot 49^{-1} = \frac{t^2}{49}$, todėl gauname kvadratinę nelygybę

$$\frac{t^2}{49} + t - 98 \leq 0. \quad (1)$$

Jos sprendinių aibei užrašyti reikia sužinoti lygties

$$\frac{t^2}{49} + t - 98 = 0$$

sprendinius. Gausime:

$$t = \frac{49(-1 \pm \sqrt{1+8})}{2} = \frac{49(-1 \pm 3)}{2} \Rightarrow t = -98 \text{ arba } t = 49.$$

Todėl (1) nelygybės sprendinių aibė (nekreipiant dėmesio į tai, kad žinome, jog $t > 0$) yra realiųjų skaičių intervalas $[-98; 49]$. Toliau:

$$\begin{cases} t \in [-98; 49], \\ t = 7^{x^2+5x-48} \end{cases} \Rightarrow 0 < 7^{x^2+5x-48} \leq 49 \Rightarrow x^2 + 5x - 48 \leq 2 \Rightarrow x^2 + 5x - 50 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+10) \leq 0 \Rightarrow -10 \leq x \leq 5.$$

Ats.: $[-10; 5]$.

9. Išspręskite:

a) rodiklinę lygtį

$$(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 14;$$

b) rodiklinę nelygybę

$$(3 + \sqrt{2})^x + (3 - \sqrt{2})^x < 6.$$

Sprendimas.

a) Kadangi $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$, tai natūralu taikyti keitinį

$$t = (2 + \sqrt{3})^x \text{ arba } t = (2 - \sqrt{3})^x.$$

Spręskime taip:

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 14 &\Rightarrow \begin{cases} t = (2 + \sqrt{3})^x, \\ t + \frac{1}{t} = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = (2 + \sqrt{3})^x, \\ t^2 - 14t + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = (2 + \sqrt{3})^x, \\ t = \frac{14 \pm \sqrt{192}}{2} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} t = (2 + \sqrt{3})^x, \\ t = \frac{14 \pm 8\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = (2 + \sqrt{3})^x, \\ t = 7 - 4\sqrt{3} \text{ arba } t = 7 + 4\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow (2 + \sqrt{3})^x = 7 - 4\sqrt{3} \text{ arba } (2 + \sqrt{3})^x = 7 + 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Kadangi $7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 = (2 + \sqrt{3})^{-2}$, $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$, tai $x = -2$ arba $x = 2$.

b) Bandytas taikyti keitinį

$$t = (3 + \sqrt{2})^x \text{ arba } t = (3 - \sqrt{2})^x$$

neduotų laukiamo rezultato, nes

$$(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 7 \neq 1.$$

Vis dėlto šią nelygybę išspręsti įmanoma ir neieškant kokio nors tinkamo keitinio. Skaičius $x = 1$ yra rodiklinės lygties

$$(3 + \sqrt{2})^x + (3 - \sqrt{2})^x = 6$$

sprendinys, $3 + \sqrt{2} > 1$ ir $3 - \sqrt{2} > 1$.

Vadinasi, jei $x > 1$, tai

$$(3 + \sqrt{2})^x > 3 + \sqrt{2} \text{ ir } (3 - \sqrt{2})^x > 3 - \sqrt{2} \Rightarrow (3 + \sqrt{2})^x + (3 - \sqrt{2})^x > 6.$$

O jei $x < 1$, tai $(3 + \sqrt{2})^x + (3 - \sqrt{2})^x < 6$, nes $(3 + \sqrt{2})^x < 3 + \sqrt{2}$ ir $(3 - \sqrt{2})^x < 3 - \sqrt{2}$.

Taigi ieškoma rodiklinės nelygybės sprendinių aibė yra realiųjų skaičių intervalas $(-\infty; 1)$.

Ats.: a) $-2; 2$; b) $(-\infty; 1)$.

10. Išspręskite rodiklinę lygtį

$$3^{x-1} + 5^{x-1} = 34.$$

Sprendimas. Skaičius 3 yra lygties sprendinys, nes

$$3^{3-1} + 5^{3-1} = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34.$$

Jei $x > 3$, tai $3^{x-1} > 9$ ir $5^{x-1} > 25$, todėl $3^{x-1} + 5^{x-1} > 34$.

Jei $x < 3$, tai $3^{x-1} < 9$ ir $5^{x-1} < 25$, todėl $3^{x-1} + 5^{x-1} < 34$.

Vadinasi, skaičius 3 yra vienintelis lygties sprendinys.

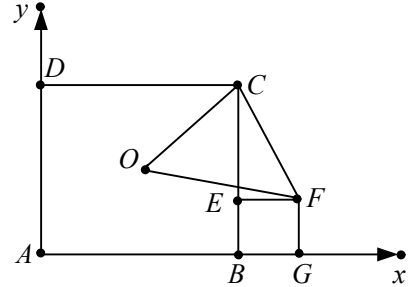
Ats.: 3.

ŠEŠTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 8, taškas O yra jo įstrižainių sankirtos taškas. Kvadrato $BEFG$ kraštinės ilgis lygus 3, viršūnė E yra kraštinėje BC , o viršūnės F ir G yra kvadrato $ABCD$ išorėje, Raskite trikampio OCF plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad taškas A yra stačiakampės koordinatinių sistemos pradžios taškas, taškai B ir D yra atitinkamai abscisių ir ordinačių ašyse (1 pav.). Tuomet $A(0,0)$, $B(8,0)$, $C(8,8)$, $D(0,8)$, $O(4,4)$, $E(8,3)$, $F(11,3)$, $G(11,0)$. Tiesės CF lygtis $CF: \frac{x-8}{11-8} = \frac{y-8}{3-8}$, taigi $CF: 5x + 3y - 64 = 0$, kraštinės CF ilgis $CF = \sqrt{(11-8)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{34}$, o aukštinės, nubrėžtos iš viršūnės O ilgis h lygus atstumui nuo taško O iki tiesės $CF: h = \frac{|5 \cdot 4 + 3 \cdot 4 - 64|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} = \frac{32}{\sqrt{34}}$. Taigi ieškomasis plotas $S = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{34} \cdot \frac{32}{\sqrt{34}} = 16$.

Ats.: 16.



1 pav.

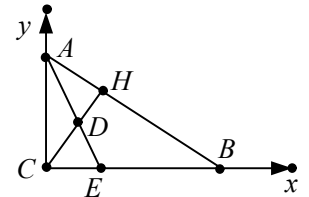
2. Stačiojo trikampio ABC statinių ilgiai $CA = 6$, $CB = 8$, atkarpa CH yra jo aukštinė, taškas D yra šios aukštinės vidurio taškas, tiesė AD kerta statinį CB taške E . Raskite atkarpų CE ir EB ilgius.

Sprendimas. Sakykime, kad stačiojo kampo viršūnė yra koordinatinių sistemos pradžios taškas, o viršūnės B ir A yra atitinkamai x ir y ašyse (2 pav.). Tuomet trikampio viršūnių koordinatės $A(0,6)$, $B(8,0)$, $C(0,0)$, tiesės AB lygtis $\frac{x-0}{8-0} = \frac{y-6}{0-6}$, taigi $AB: 3x + 4y - 24 = 0$. Jai statmenos tiesės CH lygtis $-4(x-0) + 3(y-0) = 0$, taigi $CH: 4x - 3y = 0$. Taško H koordinatės randame iš sistemos $\begin{cases} 3x + 4y - 24 = 0, \\ 4x - 3y = 0. \end{cases}$ Iš čia $H(\frac{72}{25}, \frac{96}{25})$.

Atkarpos CH vidurio taško D koordinatės $D(\frac{36}{25}, \frac{48}{25})$, tiesės AD lygtis $\frac{x-0}{\frac{36}{25}-0} = \frac{y-6}{\frac{48}{25}-6}$, t. y. $AD: 17x + 6y - 36 = 0$. Taško E koordinatės rasime iš sistemos $\begin{cases} 17x + 6y - 36 = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ todėl $E(\frac{36}{17}, 0)$.

Taigi $CE = \frac{36}{17}$, $EB = 8 - \frac{36}{17} = \frac{100}{17}$.

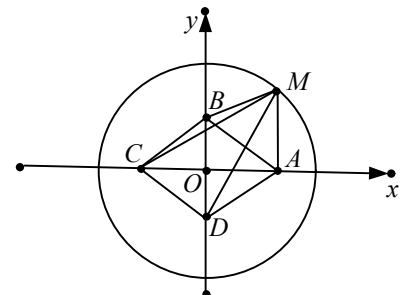
Ats.: $CE = \frac{36}{17}$, $EB = \frac{100}{17}$.



2 pav.

3. Apskritimo ir rombo centras yra tas pats taškas. Įrodykite, kad atstumų nuo bet kurio apskritimo taško iki rombo viršūnių kvadratų suma yra vienoda visiems apskritimo taškams.

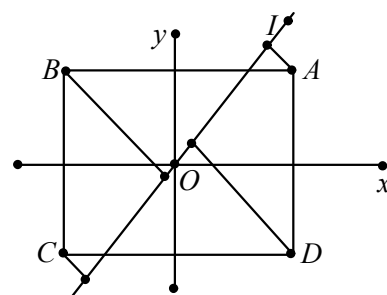
Irodymas. Sakykime, kad taškas O yra rombo $ABCD$ ir apskritimo, kurio spindulys lygus R , centras. Kadangi rombo įstrižainės yra statmenos, tai koordinatinių sistemą galime parinkti taip, kad taškas O būtų jos pradžios taškas, viršūnės A ir C būtų Ox ašyje, o viršūnės B ir D - Oy ašyje (3 pav.). Sakykime, kad rombo įstrižainių ilgiai $AC = 2m$, $BD = 2n$, tuomet rombo viršūnių koordinatės $A(m,0)$, $B(0,n)$, $C(-m,0)$, $D(0,-n)$. Sakykime, kad $M(a,b)$ yra bet kuris apskritimo taškas, tuomet $a^2 + b^2 = R^2$. Kadangi $MA^2 = (m-a)^2 + b^2$, $MB^2 = a^2 + (n-b)^2$, $MC^2 = (-m-a)^2 + b^2$, $MD^2 = a^2 + (-n-b)^2$, tai sudėję šias lygybes gauname $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2m^2 + 2n^2 + 4a^2 + 4b^2 = 2m^2 + 2n^2 + 4R^2$, taigi ši suma nepriklauso nuo apskritimo taško M parinkimo.



3 pav.

4. Įrodykite, kad atstumų nuo kvadrato viršūnių iki tiesės, einančios per kvadrato centrą kvadratų suma nepriklauso nuo tiesės parinkimo.

Irodymas. Sakysime, kad kvadrato kraštinės ilgis lygus $2a$, koordinačių sistemą Oxy parenkame taip, kad jos pradžios taškas sutaptų su kvadrato $ABCD$ įstrižainių susikirtimo tašku, o koordinačių ašys būtų lygiagrečios su kvadrato kraštinėmis (4 pav.). Tuomet kvadrato viršūnių koordinatės $A(a, a)$, $B(-a, a)$, $C(-a, -a)$, $D(a, -a)$, o per koordinačių pradžios tašką einančios tiesės l lygtį galima užrašyti $y = kx$. Randame atstumus nuo kvadrato viršūnių iki tiesės



4 pav.

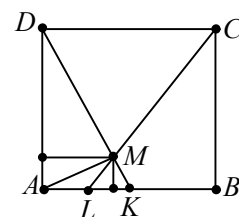
$$l: d_A = \frac{|ka-a|}{\sqrt{k^2+1}}, d_B = \frac{|-ka-a|}{\sqrt{k^2+1}}, d_C = \frac{|-ka+a|}{\sqrt{k^2+1}}, d_D = \frac{|ka+a|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Tuomet ieškomoji kvadratų suma $d_A^2 + d_B^2 + d_C^2 + d_D^2 = \frac{a^2}{k^2+1} ((k-1)^2 + (-k-1)^2 + (-k+1)^2 + (k+1)^2) = \frac{4a^2(k^2+1)}{k^2+1} = 4a^2$, taigi ieškomoji suma yra vienoda visoms per kvadrato centrą einančioms tiesėms.

5. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 4, taškas K yra kraštinės AB vidurio taškas, taškas L yra atkarpos AK vidurio taškas, atkarpos DK ir CL kertasi taške M . Raskite keturkampio $ADML$ plotą.

Sprendimas. Koordinačių sistemą parenkame taip, kad jos pradžios taškas yra taškas A , o kvadrato viršūnės B ir D būtų atitinkamai Ox ir Oy ašyse (5 pav.). Tuomet kvadrato viršūnių koordinatės $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,4)$, $D(0,4)$, taškų K ir L koordinatės $K(2,0)$, $L(1,0)$. Tiesės DK lygtis $\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-4}{0-4}$, taigi $DK: 2x + y - 4 = 0$.

Analogiškai tiesės CL lygtis $\frac{x-4}{1-4} = \frac{y-4}{0-4}$, taigi $CL: 4x - 3y - 4 = 0$. Iš sistemos $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ 4x - 3y - 4 = 0 \end{cases}$ randame taško M koordinatas $M(\frac{8}{5}, \frac{4}{5})$.



5 pav.

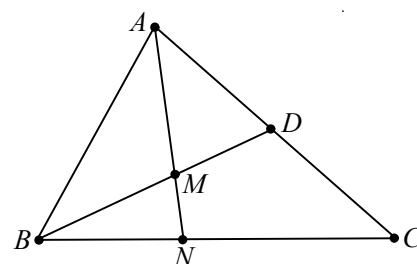
Keturkampį $ADML$ padalijame į du trikampius ADM ir AML . Kadangi trikampio ADM aukštinės iš viršūnės M ilgis lygus taško M abscisei $\frac{8}{5}$, tai trikampio ADM plotas $S_{\triangle ADM} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$. Trikampio AML kraštinės AL ilgis lygus 1, o į ją nubrėžtos aukštinės ilgis lygus taško M ordinatei $\frac{4}{5}$, todėl šio trikampio plotas $S_{\triangle AML} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$. Tuomet ieškomasis plotas $S = S_{\triangle ADM} + S_{\triangle AML} = \frac{16}{5} + \frac{2}{5} = \frac{18}{5}$.

Ats.: $\frac{18}{5}$.

6. Tiesė eina per trikampio ABC viršūnę A ir pusiauakraštinės BD vidurio tašką, ji kerta kraštinę BC taške N . Raskite santykį $BN : NC$.

Sprendimas. Sakysime, kad plokštumos afinioji koordinačių sistema yra (B, C, A) , taigi $B(0,0)$, $C(1,0)$, $A(0,1)$ (6 pav.). Kraštinės AC vidurio taškas $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, o pusiauakraštinės BD vidurio taškas $M(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Tiesės AM lygtis $\frac{x-0}{\frac{1}{4}-0} = \frac{y-1}{\frac{1}{4}-1}$, taigi $AM: 3x + y - 1 = 0$. Ši tiesė kerta tiesę $BC: y = 0$ taške $N(\frac{1}{3}, 0)$. Iš čia $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, todėl $\overrightarrow{NC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, taigi $BN : NC = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 1 : 2$.

Ats.: $1 : 2$.



6 pav.

7. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse BC ir CD yra taškai K ir L tokie, kad $BK : KC = 2 : 3$, $CL : LD = 5 : 3$. Atkarpos DK ir BL kertasi taške M . Raskite, kokių santykiu taškas M dalija atkarpas DK ir BL .

Sprendimas. Afinosios koordinatų sistemos pradžią parenkame taške C , abscisių ašį parenkame tiesėje CD , o ordinačių ašį – tiesėje CB (7 pav.), todėl $C(0,0)$, $D(1,0)$, $B(0,1)$.

Kadangi pagal sąlygą $CK : KB = 3 : 2$, tai $K(0, \frac{3}{5})$, analogiškai iš sąlygos $CL : LD = 5 : 3$

gauname, kad $L(\frac{5}{8}, 0)$. Užrašome tiesių DK ir BL

lygtis: $DK : \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{\frac{3}{5}-0}$, $BL : \frac{x-0}{\frac{5}{8}-0} = \frac{y-1}{0-1}$, taigi

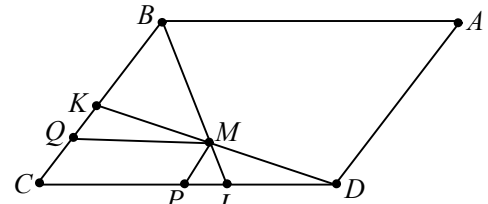
$DK : 3x + 5y - 3 = 0$, $BL : 8x + 5y - 5 = 0$. Iš

sistemos $\begin{cases} 3x + 5y - 3 = 0, \\ 8x + 5y - 5 = 0 \end{cases}$ randame taško M

koordinates $M(\frac{2}{5}, \frac{9}{25})$. Nubrėžiame $MP \parallel CB$, $P \in CD$, todėl $P(\frac{2}{5}, 0)$, ir pagal Talio teoremą

$KM : MD = CP : PD = 2 : 3$. Analogiškai nubrėžiame $MQ \parallel CD$, $Q \in CB$, todėl $Q(0, \frac{9}{25})$, tai pagal Talio teoremą $LM : MB = CQ : QB = 9 : 16$.

Ats.: $KM : MD = 2 : 3$, $LM : MB = 9 : 16$.



7 pav.

8. Duoti du lygiagretainiai $ABCD$ ir $AMNP$ tokie, kad taškas M yra kraštinėje AB , o taškas P – kraštinėje AD . Įrodykite, kad tiesės MD , BP ir NC kertasi viename taške.

Įrodymas. Sakysime, kad trejetas (A, B, D) yra afinioji plokštumos koordinatų sistema, tuomet $A(0,0)$, $B(1,0)$, $D(0,1)$, $C(1,1)$ (8 pav.).

Kadangi taškas M yra abscisių ašyje, tai $M(m,0)$, kadangi taškas P yra ordinačių ašyje, tai $P(0,p)$, o kadangi $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP}$, tai $N(m,p)$. Parašome tiesių MD , BP ir NC lygtis:

$$MD: \frac{x-0}{m-0} = \frac{y-1}{0-1}, \quad MD: x + my - m = 0.$$

$$BP: \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{p-0}, \quad BP: px + y - p = 0.$$

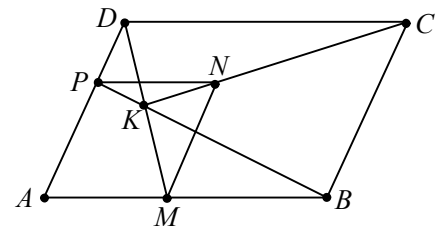
$$NC: \frac{x-1}{m-1} = \frac{y-1}{p-1}, \quad NC: (p-1)x - (m-1)y - p + m = 0.$$

Iš sistemos $\begin{cases} x + my - m = 0, \\ px + y - p = 0 \end{cases}$ randame tiesių MD ir BP susikirtimo taško K koordinates

$K(\frac{m-mp}{1-mp}, \frac{p-mp}{1-mp})$. Įrašę šias koordinates į tiesės NC lygtį turime

$$(p-1) \cdot \frac{m-mp}{1-mp} - (m-1) \cdot \frac{p-mp}{1-mp} - p + m = 0.$$

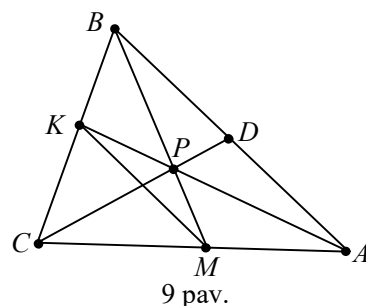
Padauginę abi puses iš $1-mp$ ir atlikę veiksmus, gauname: $mp - m - mp^2 + mp - mp + m^2p + p - mp - p + m + p^2m - m^2p = 0$, taigi $0 = 0$, todėl taškas K yra ir tiesėje NC . Taigi tiesės MD , BP , NC susikerta taške K .



8 pav.

9. Taškas P yra trikampio ABC pusiau kraštinėje CD , tiesės AP ir BC susikerta taške K , o tiesės BP ir AC susikerta taške M . Įrodykite, kad tiesės MK ir AB yra lygiagrečios.

Irodymas. Sakykime, kad (C, A, B) yra plokštumos afinioji koordinačių sistema, tuomet $C(0, 0), A(1, 0), B(0, 1)$ (9 pav.), tiesės AB lygtis $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1}{0-1}$, t. y. $AB: x + y - 1 = 0$. Taškas D yra kraštinės AB vidurio taškas, todėl $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, tiesės CD lygtis



$\frac{x-0}{\frac{1}{2}-0} = \frac{y-0}{\frac{1}{2}-0}$, taigi $CD: x = y$, todėl šios tiesės taško P koordinatės $P(p, p)$. Parašome tiesės AP lygtį $\frac{x-1}{p-1} = \frac{y-0}{p-0}$, taigi

$AP: px - (p-1)y - p = 0$, o tiesės BC ir AP sankirtos taškas K randamas iš sistemos

$\begin{cases} x = 0, \\ px - (p-1)y - p = 0 \end{cases}$, todėl $K(0, \frac{p}{1-p})$. Analogiškai tiesės BP lygtis

$\frac{x-0}{p-0} = \frac{y-1}{p-1}$, $BP: (p-1)x - py + p = 0$, taško M koordinatėms turime sistemą

$\begin{cases} y = 0, \\ (p-1)x - py + p = 0 \end{cases}$, iš kurios $M(\frac{p}{1-p}, 0)$. Todėl tiesės MK lygtis $\frac{x-0}{\frac{p}{1-p}-0} = \frac{y-\frac{p}{1-p}}{0-\frac{p}{1-p}}$, taigi

$MK: x + y - (\frac{p}{1-p})^2 = 0$, o ši tiesė yra lygiagreti su tiese AB .

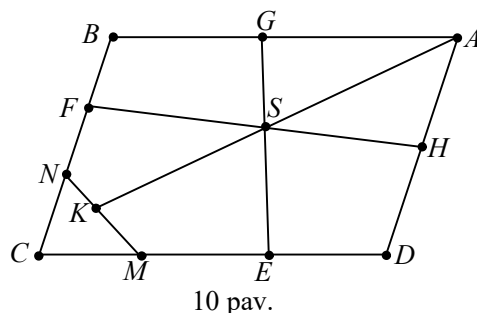
10. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse DC ir CB yra taškai M ir N . Tiesė, einanti per atkarpų DM ir AB vidurio taškus ir tiesė, einanti per atkarpų AD ir BN vidurio taškus, kertasi taške S . Įrodykite, kad tiesė AS eina per atkarpos MN vidurio tašką.

Irodymas. Sakykime, kad trejetas (C, D, B) yra plokštumos afinioji koordinačių sistema (10 pav.), tuomet $C(0, 0), D(1, 0), B(0, 1), A(1, 1)$. Kadangi taškas M yra abscisių ašyje, tai jo koordinatės $M(m, 0), m \in (0, 1)$, o atkarpos MD

vidurio taško koordinatės $E(\frac{m+1}{2}, 0)$. Analogiškai taškas N yra ordinačių ašyje, todėl $N(0, n), n \in (0, 1)$, o atkarpos BN vidurio taško koordinatės

$F(0, \frac{n+1}{2})$. Kadangi atkarpos AB vidurio taško koordinatės $G(\frac{1}{2}, 1)$, tai tiesės EG lygtis $\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{m+1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{0-1}$, taigi

$EG: 2x + my - m - 1 = 0$. Kadangi atkarpos AD vidurio taškas $H(1, \frac{1}{2})$, tai tiesės FH lygtis $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-\frac{n+1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{n+1}{2}}$, todėl $FH: nx + 2y - n - 1 = 0$.



Taško S koordinatės rasime iš sistemos $\begin{cases} 2x + my - m - 1 = 0, \\ nx + 2y - n - 1 = 0 \end{cases}$. Pirmąją lygtį padauginame iš $-\frac{n}{2}$ ir pridedame prie antrosios, tuomet gauname, kad $(-\frac{mn}{2} + 2)y + \frac{mn-n}{2} - 1 = 0$, taigi

$y = \frac{2+n-mn}{4-mn}$, todėl $x = \frac{1}{2}(1 + m - my) = \frac{1}{2}(1 + m - m \cdot \frac{2+n-mn}{4-mn}) = \frac{2+m-m}{4-mn}$. Gavome taško S koordinatės $S(\frac{2+m-m}{4-mn}, \frac{2+n-m}{4-mn})$. Atkarpos MN vidurio taškas $K(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})$, todėl tiesės AK lygtis $\frac{x-1}{\frac{m}{2}-1} = \frac{y-\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-1}$, t. y. $AK: (n-2)x - (m-2)y + m - n = 0$. Į šią lygtį įrašome taško S koordinatės:

$(n-2) \cdot \frac{2+m-m}{4-mn} - (m-2) \cdot \frac{2+n-m}{4-mn} + m - n = 0$. Padauginę abi lygybės puses iš $4 - mn$ ir atlikę veiksmus, gauname teisingą lygybę $2n - 4 + mn - 2m - mn^2 + 2mn - 2m + 4 - mn + 2n + m^2n - 2mn + 4m - 4n - m^2n + mn^2 = 0$, kuri ir įrodo, kad taškai A, S ir K yra vienoje tiesėje.

SEPTINTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. 4 komandų pogrupyje kiekviena komanda sužaidžia po vienerias rungtynes su kiekviena kita to pogrupio komanda. Už laimėtas rungtynes komanda gauna 3 taškus, už sužaistas lygiosiomis – po 1 tašką, o už pralaimėtas rungtynes taškų apskritai negauna. Laikoma, kad komanda pasirodo tragiškai, jeigu ji galutinėje rikiuotėje pagal surinktus taškus užima vieną iš dviejų paskutinių, tai yra, trečiąją arba ketvirtąją vietas. Su kiek daugiausiai taškų komanda gali pasirodyti tragiškai?

Sprendimas. Jeigu keturių komandų turnyre kiekviena komanda su kiekviena kita komanda sužaidžia po vienerias rungtynes, tai tas reiškia, kad iš viso tokiam vieno rato turnyre įvyksta iš viso šešerios rungtynes, per kurias iš viso gali išžaista daugiausiai 18 taškų (taip nutinka tada, kai visos šešerios rungtynės baigiasi vienos kurios nors komandos pergale). Todėl jeigu komanda surenka 7 arba daugiau taškų, tai ji tragiškai pasirodyti negali. Tikrai jeigu komanda, surinkusi 7 arba daugiau taškų galėtų pasirodyti tragiškai, tai ji su tai septyniais arba ir daugiau taškų atsidurtų trečioje arba ketvirtoje vietoje. Todėl tada komandos, užėmusios tame turnyre pirmąją ir antrąją vietas taip pat turėtų surinkti 7 arba daugiau taškų. Todėl komandos užėmusios pirmąją ir antrąją vietas kartu su ta komanda surinktų ne mažiau kaip $7 \cdot 3 = 21$ taškų, o tiek taškų keturių komandų vieno rato turnyre, kaip matėme, nėra.

Toliau pastebėsime, jog gali nutikti taip, jog komanda surinks 6 taškus ir pasirodys tragiškai, tai yra galutinėje rikiuotėje užims trečiąją vietą. Pateiksime tokios turnyrinės lentelės pavyzdį.

	A	B	C	D	Taškai	Vieta
A	X	3	0	3	6	
B	0	X	3	3	6	
C	3	0	X	3	6	
D	0	0	0	X	0	

Taigi mes matome, jog kaip bepasiskirstytų pirmosios trys vietos, vis tiek viena komanda surinkusi 6 taškus atsidurs trečioje vietoje, o tai reiškia, jog toji komanda su 6 taškais bus pasirodžiusi tragiškai.

ATSAKYMAS. Daugiausiai su 6 taškais komanda gali pasirodyti tragiškai.

2. Tarpzoniniame šachmatų turnyre dalyvauja 5 šachmatininkai, kurie sužaidžia po vieną partiją su kiekvienu kitu varžovu, ir kuriame pusė sužaistų partijų baigėsi lygiosiomis ir kuriame už pergalę skiriamas 1 taškas, už partiją pabaigtą lygiosiomis – pusė taško, o už pralaimėtą partiją – 0 taškų. Vienas dalyvis pralaimėjo visas savo žaistas partijas. Kiek taškų surinko šachmatininkas, užėmęs turnyre priešpaskutinę vietą?

Sprendimas. Jeigu šachmatų turnyre dalyvauja 5 šachmatininkai A, B, C, D ir E ir jie visi sužaidžia po vieną partiją su kiekvienu kitu varžovu, tai tokiam turnyre įvyksta iš viso 10 jų tarpusavio susitikimų arba susitikimai AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE ir DE. Taigi jeigu pusė susitikimų baigėsi lygiosiomis, tai lygiosiomis baigėsi 5 partijos. Jeigu vienas dalyvis pralaimėjo visas savo žaistas partijas, tai jis pralaimėjo 4 partijas. Nemažinant bendrumo galima sakyti, jog tas visas keturias savo žaistas partijas pralaimėjęs žaidėjas buvo žaidėjas E, tada tarp likusiųjų dalyvių bus viena rezultatyvi partija, o visos kitos bus pasibaigusios lygiosiomis. Tada tos tarp likusiųjų dalyvių

pasibaigusios rezultatyvios partijos laimėtojas bus užėmęs pirmąją vietą, o pralaimėjęs – ketvirtąją vietą. Taigi belieka užpildyti turnyrinę lentelę:

	A	B	C	D	E	Taškai	Vieta
A	X	1/2	1/2	1	1	3	1
B	1/2	X	1/2	1/2	1	2,5	2-3
C	1/2	1/2	X	1/2	1	2,5	2-3
D	0	1/2	1/2	X	1	2	4
E	0	0	0	0	X	0	5

Taigi žaidėjas užėmęs turnyre priešpaskutinę arba ketvirtąją vietą bus surinkęs 2 taškus.

Atsakymas. Priešpaskutinę vietą užėmęs dalyvis surinko 2 taškus.

3. Vieno rato turnyre, kur kiekviena komanda sužaidžia po vienerias rungtynes su kiekviena kita komanda, kur žaidžiama be lygiųjų (pavyzdžiui, tinklinyje) ir kur už pergalę skiriami 2 taškai, o už pralaimėjimą taškų iš viso neduodama, dalyvauja 6 komandos. Ar gali ten nutikti taip, kad kurios nors trys komandos, pavyzdžiui, A, B ir C surenka 4 taškais daugiau už likusias tris komandas, pavyzdžiui, D, E ir F.

Sprendimas. Jeigu turnyre dalyvauja 6 komandos, o kiekviena komanda sužaidžia po vienerias rungtynes su kiekviena kita komanda, tai tokiam turnyre įvyks 15 rungtynių. Tikrai, jeigu turnyre dalyvauja komandos A, B, C, D, E ir F, tai įvyks rungtynės AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF ir EF, taigi tikrai 15 rungtynių. Na o jeigu įvyks 15 rungtynių, tai pagal uždavinio sąlygą bus išžaisa $15 \cdot 2 = 30$ taškų. Todėl jeigu kokios nors 3 komandos, pavyzdžiui, A, B ir C surinks 4 taškais daugiau negu likusios trys komandos D, E ir F, tai tada turi galioti lygybė $X = Y + 4$, kur X yra komandų A, B ir C, o Y – komandų D, E ir F surinktų taškų skaičius. Tačiau dar turi galioti lygybė $X + Y = 30$, o iš čia seka, kad $Y + 4 + Y = 2Y + 4 = 30$ ir galutinai $Y = 13$. Tačiau Y yra 3 komandų kartu surinktų taškų skaičius, kuris niekaip negali būti nelyginis skaičius, nes atskiros komandos surinktų taškų suma pagal sąlygą yra lyginis skaičius.

Atsakymas. Taip nutikti negali.

4. Klasės lentoje užrašyta išraiška $*1*2*3*4*5*6*7*8$. Jūratė ir Kastytis žaidžia tokį žaidimą – jie iš eilės – pradeda Jūratė – pakaitomis kiekvienas savo ėjimu pakeičia kokią nors žvaigždutę koku nors „+“ arba „-“, ženklu. Pradėjusi Jūratė stengiasi, kad skaičius, kuris atsiras, kai jie visas žvaigžduotes pakeis plusais arba minusais, nesidalintų iš 9, o Kastytis, atvirkščiai stengiasi, kad tas žaidimo pabaigoje atsirasis skaičius dalintųsi be liekanos iš 9. Kuris iš jų laimės, jeigu jie abu žais geriausiu įmanomu būdu?

Sprendimas. Skaičius 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ir 8 suskirstome į poras (1, 8), (2, 7), (3, 6) ir (4, 5). Jeigu dabar Jūratė prie kokio nors skaičiaus prirašo kokį nors ženklą, tai tada Kastytis prie kito suskirstytos poros skaičiaus prirašo tokį patį ženklą, kokį prirašė Jūratė. Taip kiekvienu kartu atlikę veiksmus turėsime skaičių kuris dalinasi iš 9, nes visų mūsų porų skaičių suma dalinasi iš 9. Todėl ir pabaigoje atsirasis skaičius dalinsis be liekanos iš 9 ir todėl žaidimą laimės Kastytis.

Atsakymas. Kastytis gali laimėti, jeigu jis žais taip kaip nurodyta sprendime.

5. Tinklinio turnyre dalyvavo 8 komandos ir kiekviena komanda sužaidė po vienerias rungtynes su kiekviena kita komanda. Už pergalę kiekviena komanda gauna po 1 tašką, o už pralaimėjimą – 0 taškų (lygiųjų tinklinyje nebūna). Turnyrui pasibaigus paaiškėjo, kad trys komandos, užėmusios pirmąsias tris vietas, kartu su rinko 3 kartus daugiau taškų negu komandos užėmusios 5-tą, 6-tą, 7-tą ir 8-tą vietas kartu.

Nustatykite, kas laimėjo rungtynes tarp komandų užėmusių 4-tą ir 6-tą vietas. (Jeigu pasibaigus turnyrui kelios komandos surenka vienodą taškų skaičių, tai vietos tarp jų nustatomos burtų keliu).

Sprendimas. Jeigu kiekviena iš 8 komandų sužaidė po vienerias rungtynes su kiekviena kita komanda, o tų komandų buvo 8, tai iš viso įvyko 28 rungtynės. Tikrai, jeigu komandos yra A, B, C, D, E, F, G ir H, tai įvyksta rungtynės AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH, BC, BD, BE, BF, BG, BH, CD, CE, CF, CG, CH, DE, DF, DG, DH, EF, EG, EH, FG, FH ir GH, arba tikrai 28 rungtynės. Tada pagal uždavinio sąlygą ir visų komandų kartu surinktų taškų suma yra lygi 28, kadangi kiekvienose rungtynėse buvo išžaidžiamas 1 taškas. Akivaizdu, kad didžiausias taškų skaičius, kurį galėjo surinkti atskira komanda, yra 7, o pats mažiausias – 0.

Tegul komandos užėmusios 5, 6, 7 ir 8 vietas, kartu surinko x taškų, tada pagal sąlygą pirmosios trys komandos visos kartu surinko $3x$. Jeigu ketvirtą vietą užėmusi komanda surinko y taškų, tai tada $3x + y + x = 28$, arba $4x + y = 28$.

Bet $y \neq 0$. Tikrai, jeigu $y = 0$, tai ir visos komandos, užėmusios 5-tą, 6-tą, 7-tą ir 8-tą vietas surinko po 0 taškų, vadinasi $x = 0$ ir tada $4x + y = 0$, ko tikrai negali būti. Iš lygybės $4x + y = 28$ išplaukia, kad y dalijasi iš 4, o tai atsimenant sąlygą, kad $0 < y \leq 7$ veda prie lygybės $y = 4$, iš kur galutinai išplaukia, kad $x = 6$.

Vadinasi, komandos, užėmusios pirmąsias tris vietas kartu surinko 18 taškų. Žaisdamos tarpusavyje tos trys komandos surinko 3 taškus, o likusiose 15-oje rungtynių (su 5 komandomis užėmusiomis 4 – 8 vietas) jos surinko 15 taškų. Vadinasi, jos visas tas rungtynes laimėjo. Todėl 4-tą vietą užėmusi komanda rungtynėse su pirmas tris vietas užėmusiomis komandomis surinko 0 taškų, o keturiose rungtynėse su komandomis, užėmusiomis 5-8 vietas turi būti surinkusi 4 taškus, tai yra, ji bus laimėjusi su visomis tomis komandomis.

Atsakymas. Komanda, užėmusi 4-tą vietą, bus laimėjusi prieš komandą, užėmusią 6-tą vietą.

6. Tenisininkas Kęstutis skaičiuoja visų savo laimėtų rungtynių procentą nuo visų sužaistų rungtynių. Prieš paskutinį turnyrą, kuriame jis laimėjo visas savo sužaistas rungtynes, tas procentas buvo 25, o po turnyro jis pasidarė lygus 75. Nustatykite, kiek kartų Kęstučio sužaistų per paskutinį turnyrą rungtynių skaičius buvo didesnis už jo visų iki to turnyro sužaistų (laimėtų ir pralaimėtų) rungtynių skaičių.

Sprendimas. Tegul x yra Kęstučio iki paskutinio turnyro laimėtų rungtynių skaičius, o y yra paskutiniame turnyre laimėtų rungtynių skaičius. Pagal sąlygą iki paskutinio turnyro Kęstutis bus sužaidęs $4 \cdot x$ rungtynių. Todėl kadangi jis paskutiniame turnyre laimėjo visas rungtynes, tai po paskutinio turnyro bendras visų Kęstučio sužaistųjų rungtynių skaičius yra $4 \cdot x + y$, o laimėtųjų rungtynių skaičius yra $x + y$. Pagal sąlygą $x + y = 0,75(4x + y)$. Iš čia turime, kad $y = 8x$. Vadinasi,

Kęstučio paskutiniame turnyre sužaistų partijų skaičius $y = 8x$ yra 2 kartus didesnis kaip jo iki to paskutinio turnyro sužaistų partijų skaičius, kuris yra $4x$.

Atsakymas. 2 kartus didesnis.

7. Penki berniukai – Andrius, Balys, Celestinas, Donatas ir Evaldas – pravedė stalo teniso turnyrą, žaisdami poromis vieni su kitais tokiu būdu, kad kiekviena pora, kokia tik galima iš jų sudaryti, prieš kiekvieną kitą galimą porą sužaidė po vieną kartą. Po turnyro paaiškėjo, kad Andrius laimėjo iš viso 10 žaidimų, o Balys – 8 žaidimus; Celestinas pralaimėjo 9 žaidimus, o Donatas – 7 (lygiųjų tenise nebūna). Kiek žaidimų laimėjo ir kiek žaidimų pralaimėjo Evaldas?

Sprendimas. Paskaičiuokime bendrą visų žaidimų skaičių. Kadangi kiekviename žaidime nedalyvauja lygiai vienas berniukas, tai yra lygiai 5 būdai išrinkti ketvirtą žaidžiančių berniukų (kiekvienam nežaidžiančiam berniukui atitinka keturi žaidžiantys ir atvirkščiai). Toliau yra aišku, kad kiekviename ketverte berniukai gali lygiai 3-mis būdais susiskirstyti poromis. Todėl įvyks lygiai $5 \cdot 3 = 15$ žaidimų. Vadinas, jeigu kiekviename žaidime, mes kiekvienam iš dviejų berniukų, laimėjusių žaidimą skirsime po 1 tašką, o pralaimėjusiai porai skirsime 0 taškų, tai iš viso bus „išžaista“ $15 \cdot 2 = 30$ taškų. Be to, kadangi be kiekvieno berniuko, likusieji keturi gali sužaisti, kaip jau paminėta, 3 žaidimus, tai kiekvienas berniukas dalyvauja lygiai 12 žaidimų. Todėl pas kiekvieną iš jų laimėtų ir pralaimėtų žaidimų suma yra 12. Pagal uždavinio sąlygą Andrius, Balys, Celestinas ir Donatas surinko iš viso $10 + 8 + (12 - 9) + (12 - 7) = 26$ taškus. Todėl Evaldas surinko $30 - 26 = 4$ taškus, tai yra, jis laimėjo 4 žaidimus ir, vadinas, pralaimėjo $12 - 4 = 8$ žaidimus.

Atsakymas. Evaldas laimėjo 4 žaidimus ir 8 žaidimus pralaimėjo.

8. Dvi mokyklos žaidžia viena prieš kitą stalo teniso varžybas. Kiekvienai mokyklai atstovauja 5 mokiniai. Kiekvienas žaidimas yra dvejetų žaidimas ir kiekviena pora iš kiekvienos mokyklos turi sužaisti vieną kartą prieš kiekvieną galimą kitos mokyklos porą. Kiek žaidimų sužais kiekvienas mokinys?

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 50

Sprendimas. Yra 10 būdų išrinkti porą žaidėjų iš 5 esančių žaidėjų A, B, C, D ir E: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE ir DE. Kiekvienas žaidėjas pasirodo 4 porose, taigi jis turi sužaisti $4 \cdot 10 = 40$ žaidimų. Todėl teisingas yra atsakymas D, kurį ir renkamės.

Atsakymas. D arba 40.

9. Andrius, Balys, Celestinas ir Donatas suorganizavo šachmatų turnyrą, kuriame kiekvienas sužaidžia prieš kitą po vieną kartą. Tas, kuris laimi, gauna 3 taškus, už žaidimą pasibaigusį lygiosiomis, kiekvienam skiriama po $\frac{1}{2}$ taško, o už pralaimėtą partiją taškų neduodama. Turnyrui pasibaigus Andrius turėjo 7 taškus, Balys – 4, o Celestinas su Donatu – po 3 taškus. Kuris iš teiginių yra garantuotai teisingas?

(A) Andrius laimėjo prieš Donatą; (B) Turnyre apskritai nebuvo lygiųjų; (C) Donatas laimėjo prieš Andrių; (D) Andrius su Donatu sužaidė lygiosiomis; (E) Nurodytasis taškų pasiskirstymas yra apskritai neįmanomas.

Sprendimas. Įrodysime, kad Andrius jokia būdu per tris partijas negali surinkti 7 taškų ir tada teisingas pasirinkimas yra rinktis atsakymą E. Tikrai, kad Andrius surinktų 7 taškus, jis turi būti laimėjęs mažiausiai 2 partijas. Vadinas, trečioje partijoje jis negali būti nei pralaimėjęs, nes tada jis iš viso turėtų tik 6 taškus, nei sužaidęs lygiosiomis, nes tada jis turėtų tik 6,5 taško, nei laimėjęs, nes tada jis turėtų jau 9 taškus.

Atsakymas. Nurodytasis taškų pasiskirstymas yra apskritai neįmanomas arba atsakymas E.

10. Žirgų lenktynėse hipodrome dalyvauja 5 žirgai A, B, C, D ir E. Kalbėdami apie jų išsidėstymo galimybes, patyrę ekspertai konstatavo, kad jie taip mažai pažįsta tuos žirgus, kad jiems bet kokios jų išsidėstymo atskirame bėgime galimybes atrodo vienodai galimos – tik su viena išimtimi – kad žirgas B neatbėgs anksčiau negu žirgas A. Kiek žirgų išsidėstymo atskirame bėgime galimybių esant šitam apribojimui esama, jeigu tarsime, kad kiekvienas žirgas bėgime užtrunka skirtingą laiką.

Sprendimas. Kadangi kalbama apie 5 žirgus, tai nesant sąlygoje pateikto apribojimo žirgų A ir B išsidėstymo atžvilgiu jiems $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 = 5!$ galimybių išsidėstyti atskirame bėgime. (Pirmam atskiram – nesvarbu kuriam – žirgui yra 5 galimybės, antram paimtam žirgui tada lieka 4, trečiam – 3 ir t.t.). Kadangi yra tiek pat išsidėstymų kai žirgas B atbėga anksčiau negu A kaip ir galimybių, kad žirgas B atbėga vėliau negu A, tai mes turime bendrą visų galimų išsidėstymų skaičių arba 120 dalinti iš 2, ir todėl mes gauname, kad uždavinio atsakymas yra $120 : 2 = 60$.

Atsakymas. 60.

AŠTUNTOSIOS UŽDUOTIES SPRENDIMAS

1. Nustatykite: a) kurie du iš 12-os skaičių $19, 19^2, 19^3, \dots, 19^{12}$ dalijasi iš 39 su mažiausiomis liekanomis; b) 13-ąjį mažiausią natūralųjį skaičių x , kuriam $19^{296\,684} + x$ dalijasi iš 39.

Sprendimas. Skaičiai $19, 19^2, 19^3, \dots, 19^{12}$ dalijasi iš 39 atitinkamai su liekanomis 19, 10, 34, 22, 28, 25, 7, 16, 31, 4, 37, 1. (Kiekvieną naują liekaną gauname, dauginami praeitą iš 19 ir sandaugą dalydami su liekana iš 39.) Mažiausios liekanos 1 ir 4 atitinka skaičius 19^{12} ir 19^{10} .

Pažymėkime $a = 19^{296\,684}$. Kadangi $19^{12} \equiv 1 \pmod{39}$ ir $296\,684 \equiv 8 \pmod{12}$, tai $a \equiv 19^8 \equiv 16 \pmod{39}$, o x turi dalytis iš 39 su liekana $39 - 16 = 23$. Progresijoje 23, $23 + 39$, $23 + 78$, ... renkamės 13-ąjį narį $23 + 39 \cdot 12 = 491$.

Ats.: a) 19^{12} ir 19^{10} ; b) 491.

2. Nustatykite: a) mažiausią natūralųjį n , kuriam $138\,847^n$ dalijasi iš 49 su liekana 1; b) mažiausią keturženklį natūralųjį skaičių x , kuriam $138\,847^{300\,011^{263\,741^2\,711}} - x$ dalijasi iš 49.

Sprendimas. Kadangi $296\,684 \equiv 30 \equiv -19 \pmod{49}$, tai vietoj $138\,847$ imkime 30 arba -19 . Turime $30^2 \equiv 18 \pmod{49}$, $30^3 \equiv 18 \cdot 30 \equiv 1 \pmod{49}$. Taigi a) dalyje ieškoma mažiausia n reikšmė (skaičiaus $138\,847$ eilė moduliui 49) lygi 3.

Pažymėkime $c = 263\,741^{2\,711}$ (nelyginis skaičius), $b = 300\,011^c$, $a = 138\,847^b$. Turime $30^3 \equiv 1 \pmod{49}$ ir $b \equiv 2^c \equiv (-1)^c \equiv -1 \equiv 2 \pmod{3}$. Tada $a \equiv 30^b \equiv 30^2 \equiv 18 \pmod{49}$. Skaičius x turi dalytis iš 49 su liekana 18. Kadangi $1000 \equiv 20 \pmod{49}$, tai mažiausias keturženklis toks x yra $1000 - 2 + 49 = 1047$.

Ats.: a) 3; b) 1047.

3. Nustatykite $16\,353^{2^{601}} + 83^{681^{78}} + 2^{29^{542}}$ dalybos iš 23 liekaną.

Sprendimas. Pažymėkime $a = 16\,353^{2^{601}}$, $b = 83^{681^{78}}$ ir $c = 2^{29^{542}}$. Tada $a \equiv 0^{2^{601}} \equiv 0 \pmod{23}$. Skaičius 23 pirminis, o 83 ir 2 iš jo nesidalija. Todėl $83^{22} \equiv 2^{22} \equiv 1 \pmod{23}$. Kadangi $681^{78} \equiv 21^{78} \equiv (-1)^{78} \equiv 1 \pmod{22}$, tai $b \equiv 83^1 \equiv 14 \pmod{23}$.

Turime $29^{542} \equiv 7^{542} \pmod{22}$. Tiesiogiai tikrindami arba pagal Oilerio teoremą gauname, kad $7^{10} \equiv 1 \pmod{22}$ (skaičiai 7 ir 22 tarpusavyje pirminiai, $\varphi(22) = 10$). Tada

$$542 \equiv 2 \pmod{10}, \quad 7^{542} \equiv 7^2 \equiv 5 \pmod{22}, \quad c \equiv 2^5 \equiv 9 \pmod{23}.$$

Vadinasi, $a + b + c \equiv 0 + 14 + 9 \equiv 23 \equiv 0 \pmod{23}$.

Ats.: 0.

4. Apskaičiuokite a) $\varphi(61) + \varphi(63) + \varphi(625) + \varphi(627)$; b) $\varphi(119\,304\,306)$.

Sprendimas. Gauname tokius SPD: $61 = 61$, $63 = 3^2 \cdot 7$, $625 = 5^4$, $627 = 3 \cdot 11 \cdot 19$, $119\,304\,306 = 2 \cdot 3^3 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 31^2$. Ieškomos reikšmės lygios:

$$\text{a) } 60 + (9 - 3) \cdot 6 + (625 - 125) + 2 \cdot 10 \cdot 18 = 956;$$

$$\text{b) } \varphi(119\,304\,306) = 1 \cdot (27 - 9) \cdot (121 - 11) \cdot 18 \cdot (961 - 31) = 33\,145\,200.$$

Ats.: a) 956; b) 33 145 200.

5. Nustatykite visas galimas $\varphi(2250m) : \varphi(m)$ reikšmes (čia skaičius m natūralusis).

Sprendimas. Kadangi $2250 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$, tai iš $\varphi(m)$ gausime $\varphi(2250m)$, pirmiausiai dauginami iš 1 arba 2 (priklausomai nuo m dalumo iš 2), tada iš $2 \cdot 3$ arba 3^2 (priklausomai nuo m dalumo iš 3), pagaliau iš $4 \cdot 5^2$ arba 5^3 (priklausomai nuo m dalumo iš 5). Iš viso gauname $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ galimybes: $1 \cdot 6 \cdot 100 = 600$, $1 \cdot 6 \cdot 125 = 750$, $1 \cdot 9 \cdot 100 = 900$,

$1 \cdot 9 \cdot 125 = 1125$ ir dar keturias dvigubai didesnes sandaugas, kur vietoj dauginamojo 1 yra 2. (Visos 8 galimybės įmanomos, nes galima laisvai pasirinkti m dalumą ar nedalumą iš 2, 3 ir 5, pavyzdžiui, imant $m = abc$, kur $a = 1$ arba 2, $b = 1$ arba 3, $c = 1$ arba 5.)

Ats.: 600, 750, 900, 1125, 1200, 1500, 1800, 2250.

6. Nustatykite skaičiaus $917^{457} + 13^{4257}$ dalybos iš 100 liekaną (taigi paskutinius du skaitmenis).

Sprendimas. Pažymėkime $a = 917^{457}$, $b = 13^{4257}$. Tada $a \equiv 17^{457} \pmod{100}$. Skaičiai $100 = 2^2 \cdot 5^2$ ir 17 tarpusavyje pirminiai, $\varphi(100) = 2 \cdot 20 = 40$ ir $457 \equiv 17 \pmod{40}$. Vadinas, $a \equiv 17^{17} \equiv 83 \cdot 521^4 \cdot 17 \equiv 21^4 \cdot 17 \equiv 3 \cdot 306 \cdot 177 \equiv 77 \pmod{100}$.

Skaičiai 100 ir 13 tarpusavyje pirminiai, $\varphi(100) = 40$, $42^{57} \equiv 2^{57} \pmod{40}$, todėl $b \equiv 13^{2^{57}} \pmod{100}$. Rodiklį $c = 2^{57}$ toliau prastinkime moduliui $40 = 2^3 \cdot 5$. Skaičiai 2 ir 40 nėra tarpusavyje pirminiai. Skaičius c dalijasi iš $2^3 = 8$ ir tarpusavyje pirminis su 5. Kadangi $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$ ir $57 \equiv 1 \pmod{4}$, tai $c \equiv 2^1 \equiv 2 \pmod{5}$. Skaičius c priklauso progresijai 2, 2 + 5, 2 + 10, ... ir dalijasi iš 8. Jos lyginis narius galima išskaidyti į keturias aritmetines progresijas: 2, 2 + 40, ...; 12, 12 + 40, ...; 22, 22 + 40, ...; 32, 32 + 40, Tik ketvirtojoje iš jų skaičiai dalijasi iš 8. Taigi $c \equiv 32 \pmod{40}$ ir

$$b \equiv 13^{32} \equiv (13^4)^8 \equiv 61^8 \equiv (61^4)^2 \equiv 41^2 \equiv 81 \pmod{100}.$$

Vadinas, $a + b \equiv 77 + 81 \equiv 58 \pmod{100}$.

Ats.: 58.

7. Nustatykite $11\,173^{97^{83^{457}}} + 2^{457^{83^{97}}}$ dalybos iš 363 liekaną.

Užuomina. Kelis kartus pritaikius Oilerio teorema, dviejų dėmenų prastinimą galima tęsti naudojantis tokiais lyginiais kaip $283^7 \equiv -53 \pmod{363}$ ir $2^{36} \equiv 97 \pmod{363}$.

Sprendimas. Pažymėkime $a = 11\,173^{97^{83^{457}}}$, $b = 2^{457^{83^{97}}}$. Pastebėkime, kad $\varphi(363) = \varphi(3 \cdot 11^2) = 220$, $\varphi(220) = \varphi(2^2 \cdot 5 \cdot 11) = 80$, $\varphi(80) = \varphi(2^4 \cdot 5) = 32$.

Skaičiai 2, $17 \equiv 457 \pmod{220}$, $3 \equiv 83 \pmod{80}$ yra tarpusavyje pirminiai atitinkamai su 363, 220 ir 80, todėl $b \equiv 2^{17^{83^{97}}} \equiv 2^{17^{3^{97}}} \equiv 2^{17^{3^1}} \equiv 2^{4 \cdot 913} \equiv 2^{73} \pmod{363}$ (čia 97 suprastinome moduliui 32, o $4 \cdot 913$ moduliui 220). Pagaliau

$$2^{73} \equiv (2^{36})^2 \cdot 2 \equiv 97^2 \cdot 2 \equiv 305 \pmod{363}.$$

Analogiškai suprastinkime a . Skaičiai $283 \equiv 11\,173 \pmod{363}$, $97, 3 \equiv 83 \pmod{80}$ yra tarpusavyje pirminiai atitinkamai su 363, 220 ir 80, todėl

$$a \equiv 283^{97^{83^{457}}} \equiv 283^{97^{3^{457}}} \equiv 283^{97^{3^9}} \equiv 283^{97^{19 \cdot 683}} \equiv 283^{97^3} \equiv 283^{113} \pmod{363},$$

$$a \equiv (283^7)^{16} \cdot 283 \equiv 53^{16} \cdot 283 \equiv (53^4)^4 \cdot (-80) \equiv (-50)^4 \cdot (-80) \equiv 193 \pmod{363}.$$

Vadinas, $a + b \equiv 193 + 305 \equiv 135 \pmod{363}$.

Ats.: 135.

8. a) Nustatykite, kurie iš skaičių 7, -38, 187, 3829 yra primityviosios šaknys moduliui 43.
b) Duota, kad $g = 2$ yra primityvioji šaknis moduliui 13. Nustatykite, kurių iš 12 skaičių 2, 2^2 , 2^3 , ..., 2^{12} eilė moduliui 13 yra 3, o kurių 4. Tuo remdamiesi nustatykite, kurių iš 12 skaičių 1, 2, 3, ..., 12 eilė moduliui 13 yra 3, o kurių 4.

Sprendimas. a) Pirminiai $43 - 1 = 42$ dalikliai yra 2, 3, 7. Tikrinant, ar skaičius g yra primityvioji šaknis, pakanka nagrinėti laipsnius $g^{\frac{42}{2}} = g^{21}$, $g^{\frac{42}{3}} = g^{14}$ ir $g^{\frac{42}{7}} = g^6$. Vietoj duotųjų skaičių galime imti 7, $-38 + 43 = 5$, $187 - 43 \cdot 4 = 15$, $3829 - 43 \cdot 89 = 2$. Skaičiai 7, 187, 3829 nėra primityviosios šaknys moduliui 43, o -38 yra, nes

$$7^6 \equiv 15^{21} \equiv 2^{14} \equiv 1 \pmod{43},$$

$$5^6 \equiv 16 \pmod{43}, \quad 5^{14} \equiv 36 \pmod{43}, \quad 5^{21} \equiv 42 \pmod{43}.$$

b) Laipsnio 2^a , kur $a = 1, 2, 3, \dots, 12$, eilė modulių 13, yra mažiausias natūralusis k , kuriam skaičius ak dalijasi iš 12. Atitinkamai $k = 12, 6, 4, 3, 12, 2, 12, 3, 4, 6, 12, 1$. Taigi laipsnių 2^4 ir 2^8 eilė yra 3, o laipsnių 2^3 ir 2^9 eilė yra 4. Tokios yra ir šių keturių laipsnių atitinkamų dalybos iš 13 liekanų 3, 9, 8, 5 eilės. Kitų natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 12 eilės modulių 13 sutampa su kitų laipsnių 2^a , kur $a = 1, 2, 3, \dots, 12$, eilėmis, taigi nelygios 3 arba 4.

Ats.: a) -38 ; b) $2^4, 2^8, 3, 9$ (eilė 3); $2^3, 2^9, 8, 5$ (eilė 4).

9. Duota, kad 3 yra primityvioji šaknis modulių 31. Įrodykite, kad viena iš lygčių

$$x^{10} = 31y + 25, \quad x^7 = 31y + 10, \quad x^{10} = 31y + 13$$

neturi sveikųjų sprendinių (x, y) . Kitoms dviem lygtims nustatykite visas galimas reikšmes $n = 1, 2, 3, \dots, 30$, su kuriomis lygtis turi sveikąjį sprendinį $(x, y) = (3^n, y)$.

Sprendimas. Visose trijose lygtyse $x \not\equiv 0 \pmod{31}$, ir galime tarti, kad $x \equiv 3^n \pmod{31}$, kur $n = 1, 2, 3, \dots, 30$. Tada $x^{10} \equiv 3^{10n} \equiv (3^5)^{2n} \equiv (-5)^{2n} \equiv 25^n \pmod{31}$, o skaičiaus 25 laipsniai generuoja tik tris dalybos iš 31 liekanas: 25, 5, 1, 25, 5, 1, Tad $x^{10} \not\equiv 13 \pmod{31}$ – trečioji lygtis sveikųjų sprendinių (x, y) neturi. Tačiau turi pirmoji: $25^n \equiv 25 \pmod{31}$, kai $n = 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, \dots$. Spręsdami antrąją lygtį, gauname

$$10 \equiv x^7 \equiv 3^{7n} \equiv (3 \cdot 3^3 \cdot 3^3)^n \equiv (3 \cdot (-4) \cdot (-4))^n \equiv 17^n \pmod{31}.$$

Lyginys $17^n \equiv 10 \pmod{31}$ teisingas, jau kai $n = 2$. Kad kiti n nuo 1 iki 30 netinka, galima patikrinti tiesiogiai arba pastebėjus, kad 3^7 , taigi ir 17 yra primityviosios šaknys modulių 31.

Ats.: $n = 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28$ (pirmoji lygtis); $n = 2$ (antroji lygtis).

10. Skaičius $a < 391$ natūralusis ir tarpusavyje pirminis su 391. Padalijus skaičių a^{31} iš 391 su liekana, gauta liekana b – **pranešimo a šifras**. Padalijus skaičių b^{159} iš 391, gauta liekana c . Įrodykite, kad $c = a$, t. y. kad skaičių a , užšifruotą skaičiumi b , nurodytu būdu galima iššifruoti. *Užuomina.* Raskite $\varphi(391)$.

Įrodymas. Kadangi skaičius a yra tarpusavyje pirminis su $n = 391$, tai $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Čia $n = 17 \cdot 23$, $\varphi(n) = 16 \cdot 22 = 352$. Kadangi $b \equiv a^{31} \pmod{n}$ ir $c \equiv b^{159} \pmod{n}$, tai

$$c \equiv (a^{31})^{159} \equiv a^{4929} \equiv (a^{352})^{14} \cdot a \equiv 1^{14} \cdot a \equiv a \pmod{n}.$$

Taigi a ir c dalybos iš n liekana ta pati. Tačiau c yra tarp 0 ir $n - 1$ (dalybos liekana), kaip ir a (duota). Tad a ir c abu lygūs savo dalybos iš n tai pačiai liekanai, $a = c$. Tai ir reikėjo įrodyti.

Pastaba. Bendruoju atveju RSA sistemoje vietoj 391 imamas toks $n = pq$, kur p ir q yra skirtingi pirminiai skaičiai, o vietoj 31 ir 159 – natūralieji u ir v , kuriems $uv \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$. Natūraliojo $a < n$, nesidalijančio iš p arba q , šifras yra a^u dalybos iš n liekana b . Pranešimas a vėl gaunamas iš šifro b kaip skaičiaus b^v dalybos iš n liekana (bendras įrodymas analogiškas duotajam). RSA sistemos raktai sukuriama, pasirinkus skaičius p, q ir u , tada apskaičiavus n ir $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$, parinkus tinkamą v . Užšifruojant a , galima nežinoti p, q ar v , pakanka žinoti tik n ir u . Šie du skaičiai siunčiami, kad būtų panaudoti šifravimui, ir sudaro sistemos **viešąjį raktą**. Bet **privatusis raktas** v slepiamas, žinomas tik iššifruojant atsiųstąjį šifrą b . Taigi duomenų vagis gali perimti siunčiamus skaičius n, u ir b , bet ne v . Jei skaičiai p ir q labai dideli (o tokie ir parenkami), tai nėra veiksmingo būdo, kaip juos rasti, žinant n , t. y. kaip išskaidyti n pirminiais daugikliais: įprasta galimų n pirminių daliklių perranka net kompiuteriui užtrunka per ilgai. Neturėdamas p ir q , vagis negali rasti $\varphi(n)$, pagal u nustatyti v , tada pagal b nustatyti a , taigi negauna norimų pavogti duomenų. Tuo ir yra pagrįstas RSA sistemos saugumas.

BAIGIAMOSIOS UŽDUOTIES ATSAKYMAI

1	2	3	4
mažiausioji reikšmė $f(-1) = 1$, didžiausioji reikšmė $f(1,5) = 7,25$	$(x, y, z) = (-4 + t, 5,5 - 2t, t),$ $t \in \mathbb{R}$	$x \in (-\infty; 2]$	$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{8}\overrightarrow{AD}$