

73-ioji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

2025 m. balandžio 26 d., Vilnius

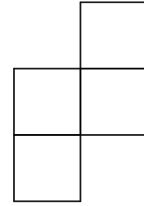
9–10 klasės

1. Išspręskite lygtį

$$\frac{x^2 + 11x - 6}{x^2 - x - 6} = \frac{26x}{x^2 - 6}.$$

2. Smailiojo trikampio ABC kraštinėse BC ir AB atitinkamai pažymėti tokie taškai D ir H , kad AD yra šio trikampio pusiaukraštinė, o CH – jo aukštinė. Atkarpos AD ir CH kertasi taške K . Atkarpoje AD pažymėtas toks taškas N , kad $AN = BN$. Nustatykite santykio $AK : DN$ reikšmę.

3. Iš 25 vienetinių langelių sudaryta 5×5 lentelė. Ją galima dengti tokiomis keturių vienetinių langelių figūromis, kaip parodyta paveikslėlyje. Kiekviena figūra turi dengti keturis lentelės langelius, kad figūros ir lentelės langelių kraštinės sutaptų. Figūros gali persidengti, jas galima sukti ir apversti, bet kiekvieną lentelės langelį gali dengti daugiausiai dvi figūros. Kiek daugiausiai lentelės langelių galima taip uždengti?



4. Skaičių n vadinkime *puikiuoju*, jei tai natūralusis skaičius, kuriam $n + 1$ dalijasi iš $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$.

a) Nustatykite visus puikiuosius skaičius n , kuriems $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = 44$.

b) Įrodykite, kad jei skaičius n puikusias, $n \geq 4$, tai $(n-1)(n-3)$ dalijasi iš $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1$.

Pastaba. Čia $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ žymi skaičiaus $\sqrt{n}$ sveikąją dalį, t. y. didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnę už $\sqrt{n}$.

73-ioji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

2025 m. balandžio 26 d., Vilnius

11–12 klasės

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{yz} \cdot \sqrt[3]{yzt}}{(y+z)(y+z+t)}, \\ y^2 = \frac{\sqrt{zt} \cdot \sqrt[3]{ztx}}{(z+t)(z+t+x)}, \\ z^2 = \frac{\sqrt{tx} \cdot \sqrt[3]{txy}}{(t+x)(t+x+y)}, \\ t^2 = \frac{\sqrt{xy} \cdot \sqrt[3]{xyz}}{(x+y)(x+y+z)}. \end{cases}$$

2. Smailiojo trikampio ABC kraštinėse BC ir AB atitinkamai pažymėti tokie taškai D ir H , kad AD yra šio trikampio pusiauakrastinė, o CH – jo aukštinė. Atkarpos AD ir CH kertasi taške K . Atkarpoje AD pažymėtas toks taškas N , kad $AN = BN$. Nustatykite santykio $AK : DN$ reikšmę.

3. Natūralųjį skaičių n vadinkime *geru*, jei jo dešimtainėje išraiškoje dvejetų yra daugiau nei penketų, ir *blogu*, jei jo dešimtainėje išraiškoje penketų yra daugiau nei dvejetų. Pavyzdžiui, skaičius 2025 yra geras, skaičius 543 blogas, o skaičiai 25852 ir 67 nei geri, nei blogi. Yra a gerų natūraliųjų skaičių ir b blogų natūraliųjų skaičių, mažesnių už 202500. Nustatykite skirtumo $a - b$ reikšmę.

4. Natūraliojo skaičiaus m dešimtainės išraiškos skaitmenų sumą žymėkime $S(m)$. Nustatykite visas galimas natūraliąsias k reikšmes, mažesnes už 30, kurioms lygtis

$$S(n) + k = S(23n) + S(77n)$$

turi bent vieną natūralųjį sprendinį n .