

**Atranka į 2025 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos
olimpiadas**

Pirmoji diena, 2025–05–03

1. Begalinė natūraliųjų skaičių seka $a_1, a_2, a_3, \dots$ tenkina tokias sąlygas:
- (i) $2 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$;
 - (ii) kiekvienam sekos nariui a_i visi jo dalikliai, didesni už 2, taip pat yra šios sekos nariai;
 - (iii) kiekvienai narių porai (a_i, a_j) , $i \neq j$, skaičius $a_i a_j + 1$ taip pat yra šios sekos narys.

Nustatykite visas tokias sekas.

2. Kiekviename 7×7 lentelės langelyje įrašytas vienas iš trijų skaičių -1 , 0 ir 1 . Lentelėje kiekvieno 3×3 kvadrato devynių skaičių suma lygi 0 . Visų 49 skaičių suma lygi s . Nustatykite didžiausią galimą skaičiaus s reikšmę.

3. Nustatykite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurioms lygybė

$$f(xf(x+y) + y) = f(x^2) + yf(x) + f(y)$$

galioja su visais realiaisiais x ir y .

**Atranka į 2025 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos
olimpiadas**

Antroji diena, 2025–05–04

4. Lygiagretainio $ABCD$ išorėje nubrėžti panašieji trikampiai ABE ir CFB (čia $\angle ABE = \angle CFB$, $\angle BAE = \angle FCB$). Tiesės AD ir BF kertasi taške G , o tiesės CD ir BE kertasi taške H . Įrodykite, kad taškai D , E , F , G ir H priklauso vienam apskritimui.

5. Realieji teigiami skaičiai a ir b tenkina lygybę

$$(a + b + ab)(a + b - ab) = ab.$$

Kiekvienam iš reiškinių $a + b + ab$ ir $a + b - ab$ nustatykite mažiausią galimą jo reikšmę.

6. Skaičiai a , b , c yra natūralieji. Tris skaičius $a^2 + 1$, $b^2 + 1$ ir $c^2 + 1$ padalijus iš jų bendro teigiamo daliklio, atitinkamai gauti skaičiai x , $x + 3$ ir $x + y$. Nustatykite, kurios iš šių y reikšmių yra galimos: a) $y = 2025$; b) $y = 99$; c) $y = 75$.