

V. SKAIČIAUS MODULIS

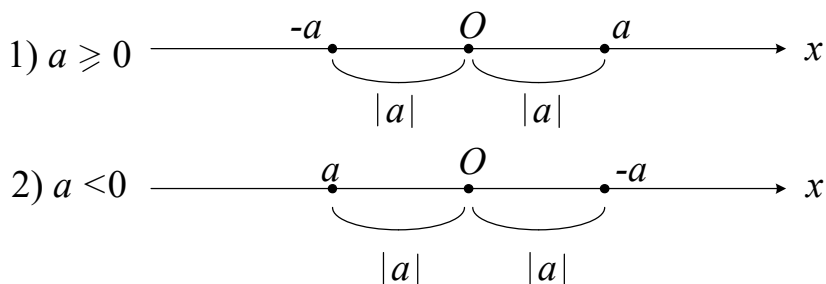
(2024–2026)

Teorinę medžiagą parengė ir penktąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis

Realiojo skaičiaus, sakykim, a *modulis* (žym. $|a|$) nusakomas formule

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{jei } a \geq 0; \\ -a, & \text{jei } a < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Paprasčiausia šios sąvokos *interpretacija* yra skaičių tiesės taško a atstumas nuo pradžios taško O (žr. 1 pav.).

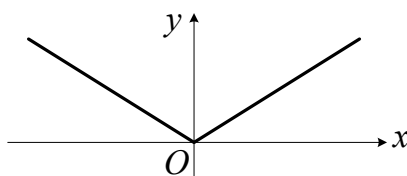


1 pav.

Bet kurio reiškinių $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *modulis* $|f(x)|$ apibrėžiamas analogiškai:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{jei } f(x) \geq 0; \\ -f(x), & \text{jei } f(x) < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Tikėtina, kad funkcijos $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, grafikas (žr. 2 pav.) yra jau gerai pažįstamas, todėl iš karto pereikime prie kitokių pavyzdžių.



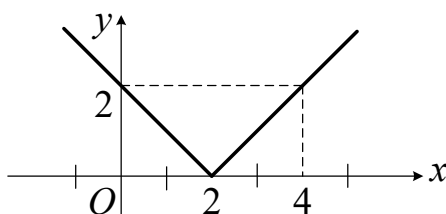
2 pav.

1 pavyzdys. Nubrėžkime funkcijos $y = |2 - x|$, $x \in \mathbb{R}$, grafiką.

Sprendimas. Pagal reiškinių modulio apibrėžimą (žr. (2)),

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x, & \text{jei } 2 - x \geq 0; \\ x - 2, & \text{jei } 2 - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 - x, & \text{jei } x \leq 2; \\ x - 2, & \text{jei } x > 2. \end{cases}$$

Vadinasi, funkcijos $y = |2 - x|$, $x \in \mathbb{R}$, grafikas yra laužtė (žr. 3 pav.), sudaryta iš dviejų spindulių (pustiesių): $y = 2 - x$, $x \in (-\infty; 2]$, ir $y = x - 2$, $x \in (2; +\infty)$.



3 pav.

2 pavyzdys. Nubrėžkime funkcijos $y = |x| + |x - 3|$, $x \in \mathbb{R}$, grafiką.

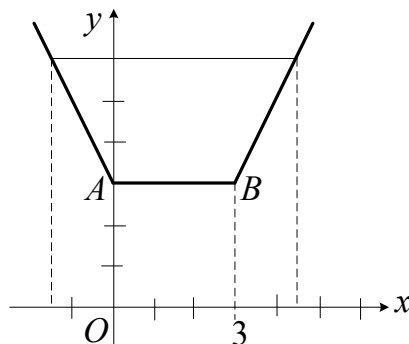
Sprendimas. Kadangi

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jei } x \geq 0; \\ -x, & \text{jei } x < 0 \end{cases} \quad \text{ir} \quad |x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{jei } x \geq 3; \\ 3-x, & \text{jei } x < 3, \end{cases}$$

tai

$$y = |x| + |x-3| = \begin{cases} -x + (3-x), & \text{jei } x < 0; \\ x + (3-x), & \text{jei } 0 \leq x < 3; \\ x + (x-3), & \text{jei } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} 3-2x, & \text{jei } x < 0; \\ 3, & \text{jei } 0 \leq x < 3; \\ 2x-3, & \text{jei } x \geq 3. \end{cases}$$

Vaizduodami šią funkciją grafiškai, gausime laužtę (žr. 4 pav.), kurią intervale $(-\infty; 0)$ sudaro spindulys $y = 3 - 2x$, intervale $[0; 3]$ – tiesės $y = 3$ atkarpa AB , o intervale $[3; +\infty)$ – spindulys $y = 2x - 3$. Taškų A ir B koordinatės yra atitinkamai $(0; 3)$ ir $(3; 3)$.



4 pav.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$|x| + |x-3| = a; \quad (3)$$

čia a yra realusis skaičius.

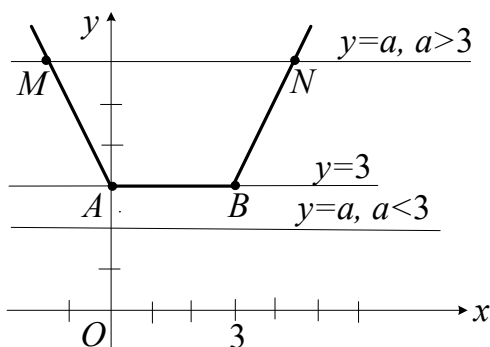
Sprendimas. Nagrinėkime funkciją, apibrėžtą lygtimis $y = |x| + |x-3|$, $x \in \mathbb{R}$, ir $y = a$, $x \in \mathbb{R}$, sistemą

$$\begin{cases} y = |x| + |x-3|, \\ y = a; \end{cases}$$

čia a yra (bet kuris) realusis skaičius.

Funkcijos $y = |x| + |x-3|$, $x \in \mathbb{R}$, grafikas pavaizduotas 4 paveiksle (žr. 2 pvz.), o funkcijos $y = a$, $x \in \mathbb{R}$, grafikas yra tiesė, lygiagreti su koordinačių sistemos ašimi Ox (ašį Oy ji kerta taške $(0; a)$).

Pavazduokime abi šias funkcijas viename paveiksle išskirdami tris atvejus: $a < 3$, $a = 3$ ir $a > 3$ (žr. 5 pav.).



5 pav.

Lengva suvokti, kad :

1) lygtis neturi sprendinių, jei $a < 3$

2) lygties $|x| + |x-3| = 3$ sprendinių aibė yra intervalas $[0; 3]$;

3) lygtis turi du sprendinius, jei $a > 3$. Šie sprendiniai yra taškų M ir N abscisės, kurios randamos atitinkamai iš lygčių

$$3 - 2x = a \quad \text{ir} \quad 2x - 3 = a.$$

Išsprendę gauname $x = \frac{1}{2}(3-a)$ ir $x = \frac{1}{2}(3+a)$.

Ats.: 1) $\emptyset$, jei $a < 3$; 2) $[0; 3]$, jei $a = 3$; 3) $\frac{1}{2}(3-a)$ ir $\frac{1}{2}(3+a)$, jei $a > 3$.

4 pavyzdys. Raskime nelygybės

$$|x| + |x-3| < a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

sprendinių aibę.

Sprendimas. Atidžiai išsižiūrėję į 5 paveikslą ir lygties $|x| + |x-3| = a$ sprendimo atsakymą, gausime, kad:

1) (4) nelygybės sprendinių neturi, jei $a \leq 3$;

2) (4) nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $\left(\frac{1}{2}(3-a); \frac{1}{2}(3+a)\right)$, jei $a > 3$.

Ats.: 1) $\emptyset$, jei $a \in (-\infty; 3]$; 2) $\left(\frac{1}{2}(3-a); \frac{1}{2}(3+a)\right)$, jei $a > 3$.

Čia pat atkreipkime dėmesį ir į nelygbę $|x| + |x-3| > a$, $a \in \mathbb{R}$. Išanalizavę (pagal 5 paveikslą) gautume, kad jos sprendinių aibė yra:

1) intervalas $(-\infty; +\infty)$, jei $a < 3$; 2) $\left(-\infty; \frac{1}{2}(3-a)\right) \cup \left(\frac{1}{2}(3+a); +\infty\right)$, jei $a \geq 3$.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. Nubrėžkite funkcijos $y = 2|x+3| - |2-x|$, $x \in \mathbb{R}$, grafiką.
2. Išspręskite lygtį $2|x+3| - |2-x| = a$; čia a yra bet koks realusis skaičius.
3. Raskite nelygybės $2|x+3| - |2-x| > a$, $a \in \mathbb{R}$, sprendinių aibę.
4. Nubrėžkite funkcijos $y = |x-1| - |x-2| + |x-3|$, $x \in \mathbb{R}$, grafiką.
5. Raskite visas parametro a , $a \in \mathbb{R}$, reikšmes, kurioms esant lygtis
 $|x-1| - |x-2| + |x-3| = a$
turi keturis sprendinius.
6. Raskite nelygybės $|x-1| - |x-2| + |x-3| < a$, $a \in \mathbb{R}$, sprendinių aibę.
7. Raskite funkcijų $y = a|x|$ ir $y = |x-2|$ grafikų bendrų taškų skaičiaus priklausomybę nuo parametro a , $a \in \mathbb{R}$, reikšmės.
8. Nustatykite, ar funkcija $y = |x+10| + |x-10|$, $x \in \mathbb{R}$, yra lyginė.
9. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = 5 + |x-1|. \end{cases}$$

10. Išspręskite lygtį

$$3\sqrt{x-3} + |x-7| = 6.$$

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2025 m. spalio 20 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: <https://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/>