

73-ioji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada

Šalies etapo užduotys ir sprendimai

2025 m. balandžio 26 d., Vilnius

Edmundas Mazėtis ir Aivaras Novikas

9–10 klasės

1. Išspręskite lygtį

$$\frac{x^2 + 11x - 6}{x^2 - x - 6} = \frac{26x}{x^2 - 6}.$$

Pirmasis sprendimas. Pastebėkime, kad $x = 0$ nėra lygties sprendinys. Padalykime abiejų trupmenų skaitiklį ir vardiklį iš x :

$$\frac{x + 11 - 6x^{-1}}{x - 1 - 6x^{-1}} = \frac{26}{x - 6x^{-1}}.$$

Taigi

$$\frac{y + 11}{y - 1} = \frac{26}{y}, \quad \text{čia } y = x - 6x^{-1};$$

$$y(y + 11) = 26(y - 1), \quad y^2 - 15y + 26 = 0,$$

$$y = 2 \quad \text{arba} \quad y = 13.$$

Jei $y = 2$, tai

$$x - 6x^{-1} = 2, \quad x^2 - 2x - 6 = 0, \quad x = 1 \pm \sqrt{7}.$$

Jei $y = 13$, tai

$$x - 6x^{-1} = 13, \quad x^2 - 13x - 6 = 0, \quad x = \frac{13 \pm \sqrt{193}}{2}.$$

Ketrios gautosios x reikšmės yra duotosios lygties sprendiniai.

Antrasis sprendimas. Pažymėkime $z = x^2 - 6$ ir pertvarkykime duotąją lygtį:

$$\frac{z + 11x}{z - x} = \frac{26x}{z}, \quad z(z + 11x) = 26x(z - x), \quad z^2 - 15xz + 26x^2 = 0.$$

Jei gautojoje lygtyje $x = 0$, tai vienu metu $z = 0$ ir $z = x^2 - 6 = -6$. Taigi $x \neq 0$, ir gautąją lygtį galime padalyti iš x^2 :

$$y^2 - 15y + 26 = 0, \quad \text{kur } y = \frac{z}{x} = x - 6x^{-1}.$$

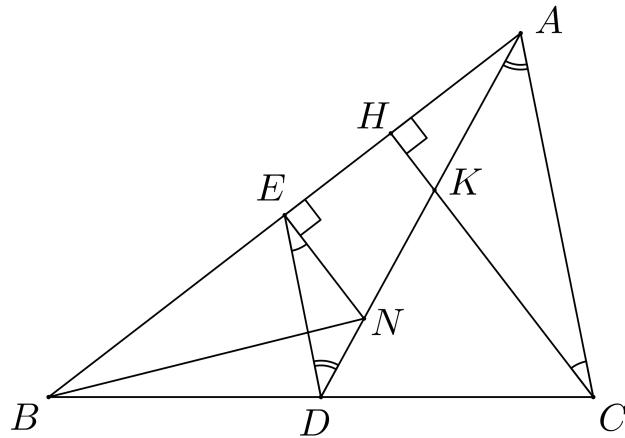
Toliau atsakymą gauname kaip pirmajame sprendime.

$$\text{Ats.: } x = 1 \pm \sqrt{7}, \quad \frac{13 \pm \sqrt{193}}{2}.$$

2. Smailiojo trikampio ABC kraštinėse BC ir AB atitinkamai pažymėti tokie taškai D ir H , kad AD yra šio trikampio pusiaukraštinė, o CH – jo aukštinė. Atkarpos AD ir CH kertasi taške K . Atkarpoje AD pažymėtas toks taškas N , kad $AN = BN$. Nustatykite santykio $AK : DN$ reikšmę.

Sprendimas. Iš taško N į atkarpą AB nuleiskime statmenį NE . Lygiašonio trikampio ABN ($AN = BN$) aukštinė NE yra ir jo pusiaukraštinė, $AE = BE$. Taigi atkarpa DE yra trikampio ABC vidurio linija, ir

$$AC : DE = 2, \quad AC \parallel DE, \\ \text{taip pat } CH \parallel NE \text{ (statmenys tiesei } AB \text{)}.$$

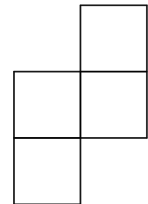


Kampų DEN ir ACK atitinkamos kraštinės lygiagrečios, todėl $\angle DEN = \angle ACK$. Kadangi tiesės DE ir AC yra lygiagrečios, tai $\angle EDN = \angle CAK$ (priešiniai kampai; žr. pav.). Vadinas, trikampiai DEN ir ACK yra panašieji pagal du kampus, ir

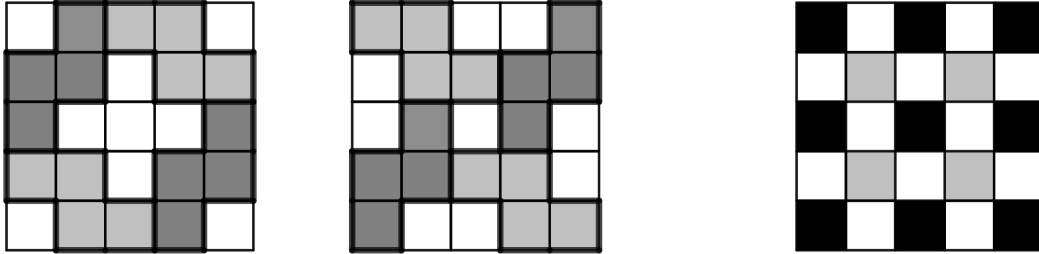
$$AK : DN = AC : DE = 2.$$

Ats.: $AK : DN = 2$.

3. Iš 25 vienetinių langelių sudaryta 5×5 lentelė. Ją galima dengti tokiomis keturių vienetinių langelių figūromis, kaip parodyta paveikslėlyje. Kiekviena figūra turi dengti keturis lentelės langelius, kad figūros ir lentelės langelių kraštinės sutaptų. Figūros gali persidengti, jas galima sukti ir apversti, bet kiekvieną lentelės langelį gali dengti daugiausiai dvi figūros. Kiek daugiausiai lentelės langelių galima taip uždengti?



Sprendimas. Nagrinėkime du figūrų išdėstymus, parodytus paveikslėlio kairėje. Jei lentelė uždenyta dviem tokiais figūrų sluoksniais, tai kiekvieną lentelės langelį, išskyrus neuždengtą vidurinį, dengia viena arba dvi figūros. Taigi nurodytu būdu įmanoma uždenkti lentelės 24 langelius.



Įrodysime, kad lentelės visų 25 langelių nurodytu būdu uždenkti neįmanoma. Kai kuriuos lentelės langelius nuspalvinkime, kaip parodyta paveikslėlio dešinėje. Tada kiekviena dedama figūra uždenkia po vieną pilkąjį ir juodąjį langelius. Yra keturi pilkieji langeliai. Kadangi kiekvieną iš jų gali dengti daugiausiai dvi figūros, tai gali būti panaudotos daugiausiai $4 \cdot 2 = 8$ figūros. Kiekviena figūra dengia tik vieną juodąjį langelį, todėl neįmanoma uždenkti visų 9 juodųjų langelių. Vadinasi, bent vienas lentelės langelis neišvengiamai liks neuždengtas.

Ats.: galima uždenkti daugiausiai 24 langelius.

4. Skaičių n vadinkime *puikiuoju*, jei tai natūralusis skaičius, kuriam $n + 1$ dalijasi iš $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$.

a) Nustatykite visus puikiuosius skaičius n , kuriems $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = 44$.

b) Įrodykite, kad jei skaičius n puikusias, $n \geq 4$, tai $(n-1)(n-3)$ dalijasi iš $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1$.

Pastaba. Čia $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ žymi skaičiaus $\sqrt{n}$ sveikąją dalį, t. y. didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnę už $\sqrt{n}$.

Sprendimas. a) Tarkime, kad skaičius n puikusias, $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = 44$. Tada $n + 1$ dalijasi iš 45, ir

$$44 \leq \sqrt{n} < 45, \quad 1936 \leq n < 2025, \quad 1937 \leq n + 1 \leq 2025.$$

Intervale $[1937; 2025]$ yra du sveikieji skaičiai, besidalijantys iš 45:

$$2025 = 45^2, \quad 1980 = 44 \cdot 45.$$

Taigi $n = 2024$ arba $n = 1979$. Abu šie skaičiai tenkina uždavinio sąlygą.

b) Tarkime, kad skaičius $n \geq 4$ puikusias. Pažymėkime $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Čia $\sqrt{n} \geq 2$, tad $m \geq 2$. Tada $n + 1$ dalijasi iš $m + 1$, ir

$$m \leq \sqrt{n} < m + 1, \quad m^2 \leq n < (m + 1)^2, \quad m^2 < n + 1 \leq (m + 1)^2.$$

Skaičiaus $m + 1$ kartotinis $n + 1$ yra didesnis už $m^2 - 1 = (m + 1) \cdot (m - 1)$, bet ne didesnis už $(m + 1)^2 = (m + 1) \cdot (m + 1)$. Todėl

$$n + 1 = (m + 1) \cdot m = m^2 + m \quad \text{arba} \quad n + 1 = (m + 1) \cdot (m + 1) = m^2 + 2m + 1.$$

Skaičius $(n - 1)(n - 3)$ atitinkamai lygus

$$(m^2 + m - 2)(m^2 + m - 4) = (m - 1)(m + 2)(m^2 + m - 4)$$

arba

$$(m^2 + 2m - 1)(m^2 + 2m - 3) = (m^2 + 2m - 1)(m - 1)(m + 3).$$

Abiem atvejais skaičius $(n - 1)(n - 3)$ yra skaičiaus $m - 1 \geq 1$ ir kito sveikąjo skaičiaus sandauga, tad dalijasi iš $m - 1$. Tai ir reikėjo įrodyti.

Ats.: a) $n = 1979, 2024$.

11–12 klasės

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{yz} \cdot \sqrt[3]{yzt}}{(y+z)(y+z+t)}, \\ y^2 = \frac{\sqrt{zt} \cdot \sqrt[3]{ztx}}{(z+t)(z+t+x)}, \\ z^2 = \frac{\sqrt{tx} \cdot \sqrt[3]{txy}}{(t+x)(t+x+y)}, \\ t^2 = \frac{\sqrt{xy} \cdot \sqrt[3]{xyz}}{(x+y)(x+y+z)}. \end{cases}$$

Sprendimas. Tarkime, kad (x, y, z, t) yra duotosios sistemos sprendinys. Jei $x = 0$, tai $t = 0$ (ketvirtoji lygtis). Tada trečiojoje lygtyje trupmenos vardiklis lygus 0. Taigi $x \neq 0$ ir analogiškai $y, z, t \neq 0$. Kadangi visi pošakniai yz, zt, tx, xy turi būti teigiami, tai skaičiai x, y, z, t turi būti to paties ženklo. Jei jie neigiami, tai kiekvienos lygties kairioji pusė teigiama, o dešinioji neigiama. Vadinasi, $x, y, z, t > 0$.

Teigiamiems skaičiams galime taikyti aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę:

$$\sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}, \quad \sqrt[3]{yzt} \leq \frac{y+z+t}{3},$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{yz}}{y+z} \cdot \frac{\sqrt[3]{yzt}}{y+z+t} \leq \frac{y+z}{2(y+z)} \cdot \frac{y+z+t}{3(y+z+t)} = \frac{1}{6}, \quad x \leq \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Analogiškai $y, z, t \leq \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Duotosiose lygtyse trupmenų skaitiklių sandauga lygi

$$\sqrt{x^2 y^2 z^2 t^2} \cdot \sqrt[3]{x^3 y^3 z^3 t^3} = x^2 y^2 z^2 t^2 > 0.$$

Šių trupmenų (teigiamus) vardiklius iš eilės pažymėkime a, b, c, d . Čia $a = (y + z)(y + z + t)$ ir t. t. Sudauginę keturias duotąsias lygtis, gauname

$$x^2 y^2 z^2 t^2 = \frac{x^2 y^2 z^2 t^2}{abcd} \quad (x^2 y^2 z^2 t^2 > 0), \quad abcd = 1.$$

Kita vertus,

$$y + z \leq \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad y + z + t \leq \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad a \leq \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = 1.$$

Analogiškai $b, c, d \leq 1$. Be to, jei bent vienas iš skaičių x, y, z, t mažesnis už $\frac{\sqrt{6}}{6}$, tai bent vienas iš skaičių a, b, c, d mažesnis už 1. Tada $1 = abcd < 1$ – prieštara. Vadinasi, $x = y = z = t = \frac{\sqrt{6}}{6}$. Nesunku patikrinti, kad šios reikšmės tenkina duotąją sistemą.

$$Ats.: (x, y, z, t) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

2. Žr. 9–10 klasių 2 uždavinį.

3. Natūralųjį skaičių n vadinkime *geru*, jei jo dešimtainėje išraiškoje dvejetų yra daugiau nei penketų, ir *blogu*, jei jo dešimtainėje išraiškoje penketų yra daugiau nei dvejetų. Pavyzdžiui, skaičius 2025 yra geras, skaičius 543 blogas, o skaičiai 25852 ir 67 nei geri, nei blogi. Yra a gerų natūraliųjų skaičių ir b blogų natūraliųjų skaičių, mažesnių už 202500. Nustatykite skirtumo $a - b$ reikšmę.

Sprendimas. Skaičiaus dešimtainėje išraiškoje kiekvieną dvejetą pakeitę penketu ir atvirkščiai, iš gero skaičiaus gauname blogą, o iš blogo – gerą. Taigi visi geri ir blogi skaičiai suskirstomi poromis. Kiekvienoje poroje geras ir blogas skaičiai turi po tiek pat skaitmenų. Atskiru atveju poromis suskirstomi visi geri ir blogi skaičiai nuo 1 iki 99999 ir, analogiškai, nuo 100000 iki 199999. Todėl intervale $[1; 200000)$ gerų ir blogų skaičių yra po lygiai. Taigi $a - b = a_1 - b_1$, kur a_1 ir b_1 atitinkamai parodo, kiek gerų ir blogų skaičių yra nuo 200000 iki 202499.

Tegu n yra geras arba blogas skaičius nuo 200000 iki 202499. Nagrinėsime tris atvejus.

1) Tegu $n = \overline{200ABC}$. Tada arba visi trys skaitmenys A, B, C lygūs 5, arba du iš jų lygūs 5, o likęs skaitmuo nei 2, nei 5, arba vienas lygus 5, kitas 2, o trečias nei 5, nei 2, arba vienas lygus 5, o kiti du lygūs 2, arba joks iš skaitmenų A, B, C nelygus 5. Atitinkamai gauname vieną blogą, $8 \cdot 3 = 24$ blogus, $8 \cdot 6 = 48$ gerus, tris gerus ir $9^3 = 729$ gerus skaičius.

2) Tegu $n = \overline{201ABC}$. Tokių gerų ir blogų skaičių yra po tiek pat kaip 1) atveju.

3) Tegu $n = \overline{202ABC}$, $A < 5$. Šie 500 skaičių geri, išskyrus 4 skaičius $n = \overline{202A55}$, $A = 0, 1, 3, 4$, kurie nėra nei geri, nei blogi. Gauname $500 - 4 = 496$ gerus skaičius.

Vadinasi, $a - b = a_1 - b_1 = (48 + 3 + 729) \cdot 2 + 496 - (1 + 24) \cdot 2 = 2006$.

Ats.: $a - b = 2006$.

4. Natūraliojo skaičiaus m dešimtainės išraiškos skaitmenų sumą žymėkime $S(m)$. Nustatykite visas galimas natūraliąsias k reikšmes, mažesnes už 30, kurioms lygtis

$$S(n) + k = S(23n) + S(77n)$$

turi bent vieną natūralųjį sprendinį n .

Sprendimas. Kadangi kiekvienas natūralusis skaičius m dalijasi iš 9 su ta pačia liekana kaip ir jo skaitmenų suma, tai $S(n) + k$ dalijasi iš 9 su ta pačia liekana kaip $n + k$, o $S(23n) + S(77n)$ – su ta pačia liekana kaip $23n + 77n = 100n = 99n + n$, taigi kaip skaičius n . Vadinasi, jei duotoji lygtis turi natūralųjį sprendinį n su koki nors $k \in [1; 30)$, tai skaičiai $n + k$ ir n dalijasi iš 9 su ta pačia liekana, o jų skirtumas k dalijasi iš 9. Todėl gali tikti tik $k = 9, 18$ arba 27 .

Lygtyje įrašę, pavyzdžiui, $n = 1$ ir $n = 11$, gauname $k = 18$ ir $k = 27$. Taigi šios k reikšmės tinka. Įrodysime, kad duotojoje lygtyje likusi reikšmė $k = 9$ yra negalima.

Tarkime, kad duotoji lygybė teisinga, kai $k = 9$, skaičius n natūralusis. Nemažindami bendrumo tarkime, kad n nesidalija iš 10. Priešingu atveju galėtume n sumažinti, nubraukdami jo dešimtainės išraiškos gale esančius nulius ir nepakeisdami $S(n)$, $S(23n)$, $S(77n)$, tad duotoji lygybė liktų teisinga.

Nagrinėkime skaičių $a = 23n$ ir $b = 77n$ sudėtį stulpeliu. Sumos $a + b = 100n$ skaitmenys gaunami sudedant atitinkamus dėmenų skaitmenis, galbūt kartais paliekant mintyje 1 ir pridėdant kitoje skiltyje. Kaskart, kai paliekame mintyje 1, tai iš turimo skaičiaus $\overline{1A} = 10 + A$ atimame 10, rašydami tik skaitmenį A , o tolimesnėje skiltyje papildomai pridėdame 1 (gaudami sumą, ne didesnę nei $9 + 9 + 1 < 20$, tad vėl mintyje palikdami daugiausiai 1). Todėl

$$S(a + b) = S(a) + S(b) - 10l + 1 \cdot l = S(a) + S(b) - 9l,$$

kur l parodo, kiek kartų sudėties stulpeliu metu palikome mintyje 1.

Skaičius $a + b = 100n$ baigiasi dviem nuliais, ir $S(a + b) = S(n)$. Skaičiai $a = 23n$ ir $b = 77n$ nesidalija iš 10 kaip ir n , taigi kiekvienas baigiasi nenuliniu skaitmeniu. Todėl, sudedant a ir b stulpeliu, vienetų skiltyje skaičiaus $a + b$ skaitmuo 0 gaunamas iš skaitmenų sumos 10 (o ne iš sumos $0 + 0$). Tačiau tada dešimčių skiltyje prie skaitmenų sumos pridėdame 1. Tad skaičiaus $a + b$ skaitmuo 0 dešimčių skiltyje gaunamas vėlgi ne iš skaitmenų sumos $0 + 0$, o iš sumos 10, jau antrą kartą paliekant mintyje 1. Vadinasi, $l \geq 2$ ir

$$S(23n) + S(77n) = S(100n) + 9l = S(n) + 9l > S(n) + 9.$$

Gavome prieštarą, tad reikšmė $k = 9$ netinka.

Ats.: $k = 18, 27$.