

**Atrankos į 2025 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos
matematikos olimpiadas užduotys ir sprendimai**

Aivaras Novikas

2025 m. gegužės 3–4 d., Vilnius

1. Begalinė natūraliųjų skaičių seka $a_1, a_2, a_3, \dots$ tenkina tokias sąlygas:
- (i) $2 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$;
 - (ii) kiekvienam sekos nariui a_i visi jo dalikliai, didesni už 2, taip pat yra šios sekos nariai;
 - (iii) kiekvienai narių porai (a_i, a_j) , $i \neq j$, skaičius $a_i a_j + 1$ taip pat yra šios sekos narys.

Nustatykite visas tokias sekas.

Pirmasis sprendimas. Duotosios sekos narių aibę pažymėkime A .

Jei sekoje yra be galo daug lyginių arba be galo daug nelyginių narių, tai pagal (iii) joje atitinkamai gauname ir be galo daug nelyginių arba lyginių narių. Taigi tiek lyginių, tiek nelyginių narių yra be galo daug.

Jei bent vienas lyginis a_i dalijasi iš 4, tai $4 \in A$. Tarkime, kad tokio a_i nėra. Tada lyginiai sekos nariai dalijasi iš 4 su liekana 2. Sąlygoje (iii) imant lyginį a_i ir nelyginį a_j , gaunamas skaičius $a_i a_j + 1$, kuris dalijasi iš 4 su liekana 3. Tuo tarpu imant a_i ir a_j abu lyginius, gaunamas skaičius $a_i a_j + 1$, kuris dalijasi iš 4 su liekana 1. Pagaliau imant a_i ir a_j , atitinkamai besidalijančius iš 4 su liekana 1 ir 3, sekos narys $a_i a_j + 1$ dalijasi iš 4. Gavome prieštarą. Vadinasi, $4 \in A$.

Jei bent vienas a_i dalijasi iš 3, tai $3 \in A$. Tarkime, kad tokio a_i nėra. Tada sekoje yra be galo daug narių, kurie dalijasi iš 3 su ta pačia nenuline liekana (1 arba 2). Sąlygoje (iii) imant tokius a_i ir a_j , gaunamas skaičius $a_i a_j + 1$, kuris dalijasi iš 3 su liekana 2. Tuo tarpu imant $a_i = 4$, o a_j – besidalijantį iš 3 su liekana 2, sekos narys $a_i a_j + 1$ dalijasi iš 3. Gavome prieštarą. Vadinasi, $3 \in A$.

Kadangi $3, 4 \in A$, tai sekoje taip pat yra šie skaičiai:

$$3 \cdot 4 + 1 = 13; \quad 3 \cdot 13 + 1 = 40, \quad \text{taigi ir } 40 \text{ dalikliai } 5, 8, 10;$$

$$4 \cdot 5 + 1 = 21, \quad \text{taigi ir } 7; \quad 5 \cdot 7 + 1 = 36, \quad \text{taigi ir } 6, 9.$$

Taigi sekos pirmieji 8 nariai sudaro aritmetinę progresiją: 3, 4, 5, ..., 10. Begalinė aritmetinė progresija 3, 4, 5, ... tenkina uždavinio sąlygą. Toliau tarkime, kad esama natūraliųjų skaičių, didesnių už 2, kurių nėra duotojoje sekoje. Mažiausią tokį skaičių pažymėkime a .

Tada $3, 4, 5, \dots, a-1 \in A$, $a \notin A$, $a \geq 11$. Vienas iš skaičių $a-1$, a ir $a+1$ dalijasi iš 3. Kiekvienu atveju gauname, kad skaičiaus a kartotinis, taigi ir pats skaičius a yra aibėje A :

- 1) jei $a-1$ dalijasi iš 3, tai sveikasis skaičius $\frac{a-1}{3} \in (3; a)$ yra aibėje A , ir $a = 3 \cdot \frac{a-1}{3} + 1 \in A$;
- 2) jei a dalijasi iš 3, tai sveikasis skaičius $\frac{a}{3} \in (3; a)$ yra aibėje A , taip pat $a+1 = 3 \cdot \frac{a}{3} + 1 \in A$ ir $a^2 = (a-1)(a+1) + 1 \in A$;
- 3) jei $a+1$ dalijasi iš 3, tai sveikasis skaičius $\frac{2a-1}{3} \in (3; a)$ yra aibėje A , ir $2a = 3 \cdot \frac{2a-1}{3} + 1 \in A$.

Gavome prieštarą. Vadinasi, tėra vienintelė tinkama seka – aritmetinė progresija 3, 4, 5, ...

Antrasis sprendimas. Aritmetinė progresija 3, 4, 5, ... tenkina uždavinio sąlygą. Tarkime, kad duotoji seka yra kitokia. Tada egzistuoja skaičius $b \geq 3$, kurio duotojoje sekoje nėra, bet joje yra narys $a_k = b+1$.

Joks a_i nesidalija iš b . Kiekvienam a_i jo dalybos iš b liekaną pažymėkime $r_i \in \{1, 2, \dots, b-1\}$. Sekoje $r_{k+1}, r_{k+2}, \dots$ pasirinkime didžiausią reikšmę r_m . Skaičius $a_k a_m + 1 > a_k$ taip pat yra duotosios sekos narys. Taigi turime sekos narį a_t , $t > k$, lygų

$$a_k a_m + 1 = (b+1)a_m + 1 = b a_m + a_m + 1$$

ir besidalijantį iš b su ta pačia liekana kaip $a_m + 1$. Liekana r_t lygi arba $r_m + 1$ (jei $r_m \neq b-1$), arba 0 (jei $r_m = b-1$). Abiem atvejais gauname prieštarą: arba liekana $r_m < r_t$ nėra didžiausia sekoje $r_{k+1}, r_{k+2}, \dots$, arba duotojoje sekoje yra narys a_t , dalus iš b .

Vadinasi, progresija 3, 4, 5, ... yra vienintelė tinkama seka.

Atsakymas: aritmetinė progresija 3, 4, 5, ...

2. Kiekviename 7×7 lentelės langelyje įrašytas vienas iš trijų skaičių -1 , 0 ir 1 . Lentelėje kiekvieno 3×3 kvadrato devynių skaičių suma lygi 0 . Visų 49 skaičių suma lygi s . Nustatykite didžiausią galimą skaičiaus s reikšmę.

Analogiškai įrodoma, kad $s \leq 11$, kai trys vienetai yra kairiojoje viršutinėje brūkšniuotoje eilutėje. Liko atvejis, kai abiejose viršutinėse brūkšniuotose eilutėse yra po daugiausiai du vienetus. Vėlgi lentelę galima padalyti į šias dvi eilutes, keturis 3×3 kvadratus ir dar 7 langelius. Tad ir šiuo paskutiniu atveju turime $s \leq 2 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 7 = 11$.

Vadinasi, didžiausia galima s reikšmė yra 11.

Atsakymas: $s = 11$.

3. Nustatykite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurioms lygybė

$$f(xf(x+y) + y) = f(x^2) + yf(x) + f(y)$$

galioja su visais realiaisiais x ir y .

Sprendimas. Duotojoje lygtyje įrašę $x = y = 0$, gauname $f(0) = 2f(0)$ ir $f(0) = 0$. Įrašę $y = 0$, gauname $f(xf(x)) = f(x^2)$. Taigi jei funkcija f yra injektyvi, tai $xf(x) = x^2$, kai $x \in \mathbb{R}$, ir tada $f(x) = x$, kai $x \neq 0$, bet taip pat ir kai $x = 0$. Funkcija $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, tenkina duotąją lygtį. Toliau tarkime, kad funkcija f nėra injektyvi: egzistuoja tokie $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, kad $u_1 \neq u_2$, $f(u_1) = f(u_2)$.

Duotojoje lygtyje įrašę $y = -x$, gauname $f(x^2) = xf(x)$. Čia vietoj x imdami $-x$, gauname $f(x^2) = -xf(-x)$. Taigi $xf(x) = -xf(-x)$ ir $f(-x) = -f(x)$, kai $x \neq 0$, taip pat kai $x = 0$. Jei duotojoje lygtyje turime $f(x+y) = 0$, tai

$$0 = f(x^2) + yf(x) = xf(x) + yf(x) = (x+y)f(x).$$

Taigi jei $f(x_0) = 0$ kuriam nors $x_0 \neq 0$, tai kiekvienam $x \in \mathbb{R}$ pasirinkdami $y = x_0 - x$, gauname $x_0f(x) = 0$ ir $f(x) = 0$. Funkcija $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, tenkina duotąją lygtį. Toliau tarkime, kad $f(x) \neq 0$, kai $x \neq 0$.

Duotojoje lygtyje vietoj x įrašykime $-x$ ir gautąją lygtį atimkime iš pradinės:

$$f(xf(x+y) + y) - f(xf(x-y) + y) = 2yf(x)$$

(pasinaudojome lygybėmis $f(-x) = -f(x)$ ir $f(y-x) = -f(x-y)$). Čia galime parinkti $x = \frac{u_1+u_2}{2}$ ir $y = \frac{u_1-u_2}{2}$, kuriems $x+y = u_1$ ir $x-y = u_2$. Prisiminkime, kad $f(u_1) = f(u_2)$, $u_1 \neq u_2$. Tada $y \neq 0$ ir

$$f(xf(x+y) + y) = f(xf(x-y) + y), \quad 2yf(x) = 0, \quad f(x) = 0.$$

Taigi $x = \frac{u_1+u_2}{2} = 0$ ir $u_2 = -u_1$. Kadangi $f(u_1) = f(u_2) = f(-u_1) = -f(u_1)$, tai $f(u_1) = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = -u_1 = 0 = u_1$. Gavome prieštarą. Vadinasi, kitų tinkamų funkcijų nei dvi gautosios nėra.

Atsakymas: $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, ir $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Lygiagretainio $ABCD$ išorėje nubrėžti panašieji trikampiai ABE ir CFB (čia $\angle ABE = \angle CFB$, $\angle BAE = \angle FCB$). Tiesės AD ir BF kertasi taške G , o tiesės CD ir BE kertasi taške H . Įrodykite, kad taškai D , E , F , G ir H priklauso vienam apskritimui.

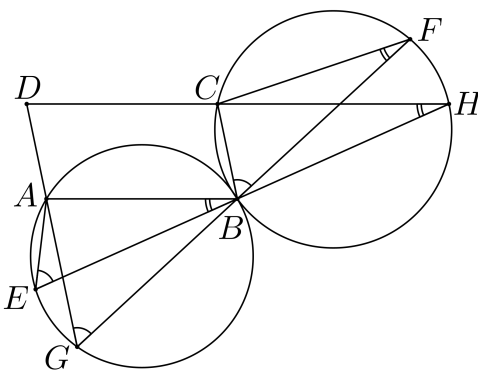
Sprendimas. Kadangi $AD \parallel BC$, tai $\angle DGB = \angle CBF$ (atitinkamieji kampai; žr. pav.). Pagal $\triangle ABE \sim \triangle CFB$ gauname $\angle AEB = \angle CBF$. Kadangi

$$\angle AEB = \angle CBF = \angle DGB = \angle AGB,$$

tai taškai A , B , G , E priklauso vienam apskritimui. Todėl

$$\begin{aligned} \angle GEH &= \angle GEB = \angle GAB \text{ (įbrėžtiniai kampai)} = \\ &= \angle GDH \text{ (atitinkamieji kampai, } AB \parallel CD). \end{aligned}$$

Taigi taškas E priklauso trikampio DGH apibrėžtiniam apskritimui.



Analogiškai gaunama, kad taškai B , C , F , H priklauso vienam apskritimui, o tada – kad taškas F priklauso trikampio DGH apibrėžtiniam apskritimui. Vadinasi, taškai D , E , F , G , H priklauso vienam apskritimui. Tai ir reikėjo įrodyti.

5. Realieji teigiami skaičiai a ir b tenkina lygybę

$$(a + b + ab)(a + b - ab) = ab.$$

Kiekvienam iš reiškinių $a + b + ab$ ir $a + b - ab$ nustatykite mažiausią galimą jo reikšmę.

Sprendimas. Pertvarkykime duotąją lygybę bei pritaikykime aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę:

$$(a + b)^2 - a^2b^2 = ab, \quad a^2b^2 + ab = (a + b)^2 \geq 4ab.$$

Taigi $a^2b^2 \geq 4ab - ab = 3ab$ ir $ab \geq 3$. Kadangi $a + b = \sqrt{a^2b^2 + ab}$, tai

$$a + b + ab \geq \sqrt{3^2 + 3} + 3 = 2\sqrt{3} + 3,$$

$$\begin{aligned} a + b - ab &= \frac{ab}{a + b + ab} = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + ab} + ab} = \\ &= \left(\sqrt{1 + (ab)^{-1}} + 1 \right)^{-1} \geq \left(\sqrt{1 + 3^{-1}} + 1 \right)^{-1} = 2\sqrt{3} - 3. \end{aligned}$$

Gautosios reikšmės $2\sqrt{3} \pm 3$ iš tiesų yra ieškomos mažiausios reikšmės: jos gaunamos, pasirinkus tinkamą skaičių porą $(a, b) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Atsakymas: atitinkamai $2\sqrt{3} + 3$ ir $2\sqrt{3} - 3$.

6. Skaičiai a , b , c yra natūralieji. Tris skaičius $a^2 + 1$, $b^2 + 1$ ir $c^2 + 1$ padalijus iš bendro teigiamo daliklio, atitinkamai gauti skaičiai x , $x + 3$ ir $x + y$. Nustatykite, kurios iš šių y reikšmių yra galimos: a) $y = 2025$; b) $y = 99$; c) $y = 75$.

Sprendimas. Bendrą daliklį, iš kurio padalyti skaičiai $a^2 + 1$, $b^2 + 1$ ir $c^2 + 1$, pažymėkime d . Tada

$$a^2 = dx - 1, \quad b^2 = d(x + 3) - 1, \quad c^2 = d(x + y) - 1.$$

b) Pasirinkus $y = 99$ ir $x = 2$, tris turimas lygybes galima užrašyti pavidalu

$$d = \frac{a^2 + 1}{2} = \frac{b^2 + 1}{5} = \frac{c^2 + 1}{101}.$$

Dabar nesunku atspėti, kad tinka skaičiai $(a, b, c, d) = (1, 2, 10, 1)$.

a) ir c) Tarkime, kad $y = 2025$ arba 75 . Atkreipkime dėmesį, kad tikslusis kvadratas visada dalijasi iš 4 su liekana 0 arba 1 (remiantis formulėmis $(2m)^2 = 4m^2$ ir $(2m + 1)^2 = 4(m^2 + m) + 1$), o sveikojo

lyginio skaičiaus kvadratas dalijasi iš 16 su liekana 0 arba 4 (remiantis formulėmis $(4m)^2 = 16m^2$ ir $(4m + 2)^2 = 16(m^2 + m) + 4$).

Tarkime, kad skaičius x nelyginis. Tada skaičius $x + 3$ lyginis. Jei jis dalijasi iš 4, tai tikslusis kvadratas $b^2 = d(x + 3) - 1$ dalijasi iš 4 su liekana 3 – prieštara. Taigi $x + 3 = 4k + 2$, kur skaičius k sveikasis. Lengvai galime atmesti atvejį $y = 2025$: turėtume $x + y = 4k + 2024$, o c^2 dalytųsi iš 4 su liekana 3 – prieštara.

Atmeskime ir atvejį $y = 75$. Skaičius $x = 4k - 1 = \frac{a^2+1}{d} > 0$ yra natūralusis ir dalijasi iš 4 su liekana 3. Jis turi (nelyginių) pirminių daliklių, ir bent vienas iš jų taip pat dalijasi iš 4 su liekana 3. Taigi x dalijasi iš pirminio skaičiaus $p = 4l - 1$, kur skaičius l natūralusis. Tada

$$a^{p-1} \equiv (a^2)^{2l-1} \equiv (dx - 1)^{2l-1} \equiv (-1)^{2l-1} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Kita vertus, $a^{p-1} \equiv 0$ arba $1 \pmod{p}$ (Mažoji Ferma teorema), $p > 2$, tad $a^{p-1} \not\equiv -1 \pmod{p}$. Gavome prieštarą. (Ją galima gauti ir pasinaudojus žinomu faktu, kad -1 yra kvadratinė neliekana moduliui p , kai skaičius p pirminis, $p \equiv -1 \pmod{4}$.)

Vadinasi, skaičius x lyginis. Jei lyginis yra ir skaičius d , tai $a^2 = dx - 1$ dalijasi iš 4 su liekana 3 – prieštara. Taigi skaičius d nelyginis. Tada skaičiai $x + 3$ ir $x + y$ nelyginiai, o skaičiai $b^2 = d(x + 3) - 1$ ir $c^2 = d(x + y) - 1$ lyginiai. Tuo pačiu lyginiai yra ir skaičiai b bei c . Taigi

$$c^2 - b^2 \equiv -4, 0 \text{ arba } 4 \pmod{16},$$

$$\text{kur } c^2 - b^2 = d(x + y) - d(x + 3) = (y - 3)d.$$

Jei $y = 2025$, tai $2022d \equiv 0 \pmod{4}$. Tačiau skaičius d nelyginis, todėl $2022d$ nesidalija iš 4.

Jei $y = 75$, tai $72d \equiv -4, 0$ arba $4 \pmod{16}$. Tačiau skaičius d nelyginis, todėl $72d$ dalijasi iš 8, bet ne iš 16, ir $72d \equiv 8 \pmod{16}$.

Abiem atvejais gavome prieštarą. Vadinasi, reikšmės $y = 2025$ ir $y = 75$ nėra galimos.

Atsakymas: tinka tik b) $y = 99$.