Atranka į Baltijos kelio konkursą

2025-09-28

1. Įrodykite, kad bet kokiems realiesiems skaičiams $a_0, a_1, \ldots, a_n, k$, kur $n > 1$ ir $a_1 = a_{n-1} = 0$, galioja nelygybė:

$$|a_0| - |a_n| \leqslant \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ka_{i+1} - a_{i+2}|.$$

2. Tegul O ir H yra atitinkamai trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo centras ir aukštinių susikirtimo taškas. Taškas P yra taško A atspindys tiesės OH atžvilgiu. Tarkime, kad P nėra toje pačioje tiesės BC pusėje kaip A. Taškai E ir F yra atitinkamai ant AB ir AC, kad $BE = PC$ ir $CF = PB$. Tegul K yra tiesių AP ir OH susikirtimo taškas. Įrodykite, kad $\angle EKF = 90^\circ$.

3. Ant lentos kažkokia tvarka surašyti visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 2025 (kiekvienas skaičius parašytas po lygiai vieną kartą). Barbora daro tokius veiksmus: jei pirmasis ant lentos parašytas skaičius yra k, ji nutrina pirmuosius k skaičių, tada tuos pačius skaičius atvirkščia tvarka parašo lentos pradžioje, o likusių narių eilės tvarkos nekeičia. (Pavyzdžiui, seka $\{3, 5, 10, 4, ...\}$ tampa $\{10, 5, 3, 4, ...\}$). Įrodykite, kad po baigtinio ėjimų skaičiaus pirmasis ant lentos parašytas skaičius bus 1.

4. Raskite visus teigiamus racionaliuosius (x, y), tenkinančius lygtį:

$$yx^y = y + 1.$$